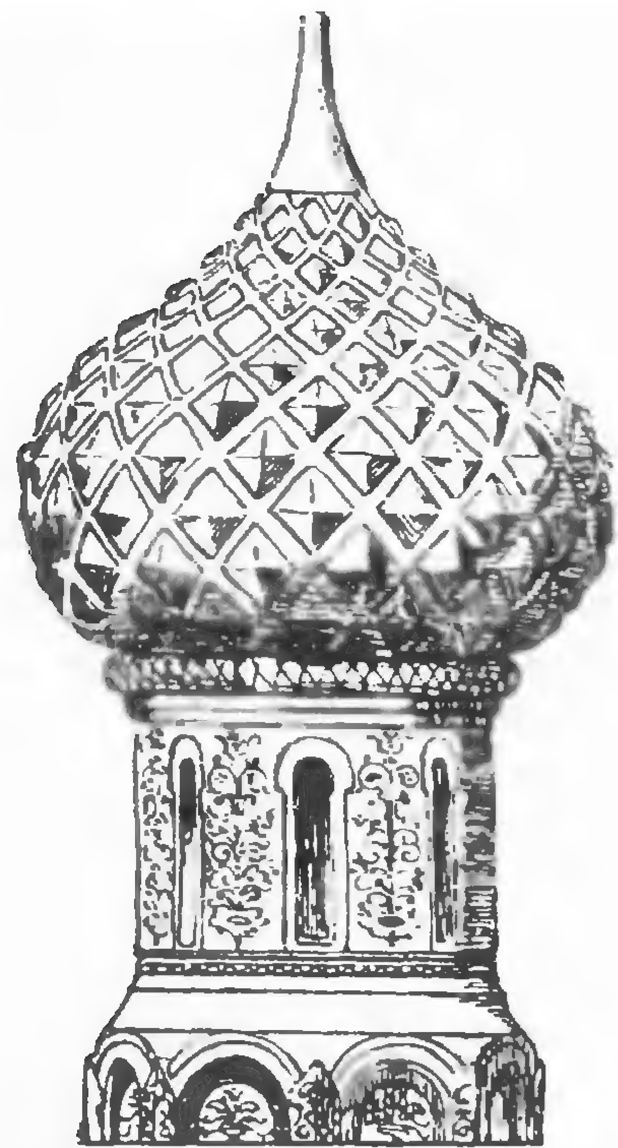


俄罗斯数学教材选译

● 数学天元基金资助项目

复分析导论(第二卷)

多复变函数(第4版)

□ Б. В. 沙巴特 著

□ 许 明 欧阳彦虹 译



高等教育出版社
Higher Education Press

图字: 01–2006–6985 号

Б. В. Шабат

Введение в комплексный анализ (II) 2004

Originally published in Russian under the title

Introduction to Complex Analysis (II) by B. V. Shabat

图书在版编目(CIP)数据

复分析导论. 第 2 卷, 多复变函数: 第 4 版/ (俄罗斯) 沙巴特著; 许明, 欧阳彦虹译. —北京: 高等教育出版社, 2008.1

ISBN 978-7-04-022360-6

Ⅰ.复··· Ⅱ.①沙···②许···③欧··· Ⅲ.①复分析②多复变函数 Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2007) 第 169066 号

策划编辑 赵天夫 **责任编辑** 蒋 青 **封面设计** 王凌波

版式设计 王 莹 **责任校对** 姜国萍 **责任印制** 陈伟光

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	涿州市星河印刷有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×1092　1/16	版　　次	2008 年 1 月第 1 版
印　　张	22.5	印　　次	2008 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	470 000	定　　价	48.00 元

物料号 22360-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从上世纪 50 年代初起, 在当时全面学习苏联的大背景下, 国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材. 这些教材体系严密, 论证严谨, 有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础, 培养了一大批优秀的数学人才. 到了 60 年代, 国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材, 但还在很大程度上保留着苏联教材的影响, 同时, 一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用. 客观地说, 从解放初一直到文化大革命前夕, 苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用, 起了不可忽略的影响, 是功不可没的.

改革开放以来, 通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材, 大家眼界为之一新, 并得到了很大的启发和教益. 但在很长一段时间中, 尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革, 引进却基本中断, 更没有及时地进行跟踪, 能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少, 事实上已造成了很大的隔膜, 不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机. 今年初, 在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上, 有数学家提出, 莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材, 建议将其中的一些数学教材组织翻译出版. 这一建议在会上得到广泛支持, 并得到高等教育出版社的高度重视. 会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论, 大家一致认为: 在当前着力引进俄罗斯的数学教材, 有助于扩大视野, 开拓思路, 对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要. 《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下, 经数学天元基金资助, 由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订, 本系列中所列入的教材, 以莫斯科大学的教材为主, 也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材. 有大学基础课程的教材, 也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书. 有些教材虽曾翻译出版, 但经多次修订重版, 面目已有较大变化, 至今仍广泛采用、深受欢迎, 反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力, 对我们也是一个有益的借鉴. 这一教材系列的出版, 将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来, 对推动我国数学课程设置和教学内容的改革, 对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才, 可望发挥积极的作用, 并起着深远的影响, 无疑值得庆贺, 特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

第三版前言

这本书的意图是想要当作学习高维复分析的入门教程, 就是说, 它包括了多复变量的全纯函数理论, 全纯映射以及复欧氏空间中的子流形. 本书是作者的《复分析导论 (第一卷)》的后续篇; 某些在那里仅只提及的思想都可在本卷中相应部分找到.

比起一维的理论来, 高维复分析还相当年轻. 如果不算上 G. 雅可比在 1830 年和 1857 年的工作, 狄东 (F. Didon) 1873 年的工作, 在这些工作中已出现了二元复函数及其积分; 也不算上 Ch. 埃尔米特在 1852 年和 J. 西尔维斯特在 1854 年和 1857 年的工作, 这些工作均致力于解多变量方程组, 高维理论的发端则可追溯到 1879 年, 那时 K. 魏尔斯特拉斯发表了他的文章《与多变量解析函数有关的若干定理》. 高维理论的另一位创立者是亨利 • 庞加莱 (1854 — 1912). 在 1883 年他发表了一篇论文, 其中证明了两个变量的局部有理函数是两个整函数的商 (在 1895 年, 这个结果被他的学生库赞 (P. Cousin) 推广到了任意多个变量的情形). 同一年, 他与皮卡合作, 开始研究复空间的代数子流形. 在 1886 年到 1887 年的文章中, 庞加莱推广了二元函数的柯西定理, 并建立了高维留数 (残数) 论的基础.

高维复分析的第一个繁荣时期可追溯到 20 世纪初. 1907 年庞加莱发表了一篇论文, 预期了其后的关于复欧氏空间中区域的双全纯映射的研究. 大体在相同的时间, 出现了哈托格斯的一大系列的文章, 均致力于多元函数的解析延拓问题, 同样还有莱维的重要工作.

但是, 在随后相当长的一个时期中, 复分析的高维问题研究落后了, 关注它的数学家只占单复变论的专家们中的一小部分.

到了 20 世纪 60 年代情况发生了迅速的变化, 这时高维问题开始吸引其他领域中的数学家和理论物理学家的注意. 其中的一个明显的理由来自于从 20 世纪 30 年

代开始的 H. 嘉当, 冈洁和其他一些人的研究, 这些研究把高维复分析与代数, 拓扑和代数几何联系了起来. 另一个原因是与博戈柳博夫, 弗拉吉米洛夫, 约斯特 (Jost), 怀特曼 (Wightman) 等人在 20 世纪 50 年代的发现有关, 他们把多复变论用到了量子场论中.

接着就出现了高维复分析的第二个繁荣期, 它一直持续到现在. 这个领域中的新老结果在分析、微分几何、代数几何中得到了大量应用, 特别是在当代数学物理中的应用. 掌握高维复分析的基础对许多现代数学领域中的任何一位专家来说都变成必须的了.

相对于过去十几年中高维复分析的迅猛发展, 本书相对其前一版 (1976 年) 做了大量的重写工作, 但是要详细描述这种变化还是无能为力的. 我们只是作为应用的例子, 提及了最近由彭罗斯提出的解决麦克斯韦方程的扭子方法的一个初等阐述.

本书这一卷的基础是我在莫斯科大学时学校所给的一系列的 "特殊课程", 它是由 "函数论和泛函分析" 分部所支持的一种课程. 在进行这一版的工作中我大量采用了我的朋友和学生们的建议, 对他们我谨表示深深的谢意.

沙巴特

目　　录

第 I 章
多变量全纯函数

对于在多复变函数领域的初学者而言, 最大的困难可能是缺少简单而直观的几何观念. 因此, 我们从一开始便注意到了复空间的特性并且详细地描述了其中许多最简单的区域.

§1. 复空间

1. 空间 $\mathbb{C}^n$

考虑偶数维的欧氏空间 $\mathbb{R}^{2n}$, 它的点是 $2n$ 个实数的有序数组 $(x_1,\cdots,x_{2n})$. 令 $z_\nu = x_\nu + ix_{n+\nu}(\nu=1,\cdots,n)$, 从而我们在其中引进了复结构. 在后文中. 我们常常记 $x_{n+\nu}=y_\nu$, 故而有 $z_\nu = x_\nu + iy_\nu(\nu=1,\cdots,n)$. 由 n 个有序的复数组作为点

$$z=(z_1,\cdots,z_n) \tag{1}$$

构成的空间被称做 n 维复空间并以 $\mathbb{C}^n$ 表示. 特别地, 当 $n=1$ 时我们得到了 $\mathbb{C}^1=\mathbb{C}$, 即复数的平面表示. 空间 $\mathbb{C}^n$ 是 n 个平面的笛卡儿乘积

$$\mathbb{C}^n = \underbrace{\mathbb{C}\times\cdots\times\mathbb{C}}_{n\text{ 次}}. \tag{2}$$

于是, n 维复空间 $\mathbb{C}^n$ 的点就是 $2n$ 维实空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 的点. 然而在 $\mathbb{R}^{2n}$ 引进复结构立即就在此空间中引进了某种*非对称性*: 不是其中所有的坐标都是等价的 (例如, 我们把 x_1 和 x_{n+1} 组合成复数 z_1, 然而 x_1 和 x_2 则没有这种组合).

在 $\mathbb{C}^n$ 中自然地引入了在域 $\mathbb{C}$ 上的向量空间结构; 其加法和对复标量 λ 的乘法按坐标定义为: $z+w=(z_1+w_1,\cdots,z_n+w_n), \lambda z=(\lambda z_1,\cdots,\lambda z_n)$. 向量 $z\in\mathbb{C}^n$ 有时写成 $z=x+iy$ 的形状, 其中 $x=(x_1,\cdots,x_n), y=(y_1,\cdots,y_n)$, 它们是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 空间 $\mathbb{R}^n(x)$ 由形如 $z=x+i0$ 的向量构成, 我们称其为 $\mathbb{C}^n$ 的实子空间 (当 $n=1$ 时, 它即是实轴).

在 $\mathbb{C}^n$ 中定义有埃尔米特 (Hermite) 内积

$$(z,w)=\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{w}_\nu, \tag{3}$$

它具有显见的性质:

$$(w,z)=\overline{(z,w)}, \quad (\lambda z,w)=\lambda(z,w), \tag{4}$$

其中 $\lambda\in\mathbb{C}$ 为任意复数. 如果 $z_\nu=x_\nu+ix_{n+\nu}, w_\nu=u_\nu+iu_{n+\nu}$, 则根据 (3) 有

$$(z,w)=\sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu u_\nu + i\sum_{\nu=1}^{n}(x_{n+\nu}u_\nu - x_\nu u_{n+\nu}),$$

由此可见, 如果我们已把 z 和 w 看作 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的向量, 那么, 埃尔米特内积的实部 $\mathrm{Re}(z,w)$ 就是 z 和 w 的欧几里得内积. 虚部 $\mathrm{Im}(z,w)$ 在交换 z 和 w 时改变了符号, 而当 $z=w$ 时它化为零:

$$(z,z)=\sum_{\nu=1}^{2n} x_\nu^2 \quad \text{或者} \quad |z|^2=\sum_{\nu=1}^{n}|z_\nu|^2 \tag{5}$$

是欧几里得长度 (模) 的平方, 其中的 z 被看为 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的向量. 我们还注意到另一个明显的关系式: $\mathrm{Im}(z,w)=\mathrm{Re}(z,iw)$.

$\mathbb{C}^n$ 中的包含点 z^0 的实超平面是这样的点 z 的集合, 使得向量 $z-z^0$ 实正交于某个定向量 $a\neq 0$:

$$\mathrm{Re}(z-z^0,a)=0 \quad \text{或者} \quad \mathrm{Re}(z,a)=\beta, \tag{6}$$

其中 β 为某个实数. 每个这样的超平面都被纤维化为余维为 2 的实平面:

$$(z,a)=b, \tag{7}$$

其中的 $b=\beta+i\beta'$, 而 β' 是任意的实数 [1]. 形如 (7) 所代表的平面被称做 $\mathbb{C}^n$ 中的复超平面.

现设已知 $k\leqslant 2n$ 个向量 $a^\mu\in\mathbb{C}^n$, 它们在 $\mathbb{R}$ 上线性无关; 由 k 个实方程组

$$\mathrm{Re}(z,a^\mu)=\beta_\mu, \quad \mu=1,\cdots,k, \tag{8}$$

[1] 事实上, 复方程 (7) 等价于两个实的方程: $\mathrm{Re}(z,a)=\beta, \mathrm{Im}(z,a)=\beta'$. 第一个方程等同于 (6), 而第二个方程可化为 $\mathrm{Re}(z,ia)=\beta'$, 从而表示了另一个显然不同于 (6) 的实超平面.

所描述的点 $z \in \mathbb{C}^n$ 组成的集合称之为余维 k 的实平面或者说, $m = 2n - k$ 维实平面 (当 $k = 2n$ 时, 这是一个点). 如果这些向量 a^μ 在 $\mathbb{C}$ 上线性无关 (设其个数 $k \leqslant n$), 则由复方程组

$$(z, a^\mu) = b_\mu, \quad \mu = 1, \cdots, k, \tag{9}$$

所描述的点集被称之为余维 k 的复平面, 或者维数 $m = n - k$ 的复平面. 因为这个方程组可以改写为 $2k$ 个实的线性方程组 $\mathrm{Re}(z, a^\mu) = \mathrm{Re}\ b_\mu, \mathrm{Re}(z, ia^\mu) = \mathrm{Im}\ b_\mu$, 以及向量组 $a^\mu, ia^\mu (\mu = 1, \cdots, k)$ 在 $\mathbb{R}$ 上线性无关, 故而这是实余维 $2k$ 的平面.

但是并非所有偶实余维的平面 $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ 都是复平面, 这是由于引进的复结构所产生的非对称性引起的. (我们在前面已谈到过它). 对于包含了点 $z = 0$ 的平面, 可以找到一个简便的判别办法: 平面 $\Pi \ni 0$ 是个复平面当且仅当对任意 $z \in \Pi$, 向量 $iz \in \Pi$.

必要条件是显然的, 因为由条件 $(z, a^\mu) = 0$ 得到了 $(iz, a^\mu) = 0$. 反之, 如果 Π 满足这个条件, 则由 $z \in \Pi$ 得出 $(\alpha + i\alpha')z \in \Pi$, 其中 $\alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$ 为任意数, 就是说, Π 是 $\mathbb{C}^n$ 的一个复子空间. 如果在 Π 的正交补空间 (关于 $\mathbb{C}^n$ 中的埃尔米特度量) 中选取基 $a^1, \cdots, a^k$, 则 z 属于 Π 的这个性质由方程组 $(z, a^\mu) = 0, \mu = 1, \cdots, k$ 给出, 这意味着 Π 是个复平面.

例题. 平面 $\Pi_1 = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = z_2\}$ 是复的, 这是因为由 $z_1 = z_2$ 得出 $iz_1 = iz_2$. 平面 $\Pi_2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = \overline{z}_2\}$ 尽管与 Π_1 一样具实维 2, 但并非复的平面, 因为如果 $z_1 = \overline{z}_2$, 则当 $z_2 \neq 0$ 时, $iz_1 \neq \overline{iz_2}$.

我们注意到, 与超平面不同, 余维为 $k > 1$ 的实平面不必一定包含有 (非平凡的) 复平面. 对于平面 $\Pi \ni 0$ 具最大维数的复平面 $\Pi^c \subset \Pi$ 显然是 Π 与平面 $i\Pi$ 的交集, 后者由向量 iz 组成, 其中的 $z \in \Pi$. 如果 $k > 1$, 交集 $\Pi^c = \Pi \bigcap i\Pi$ 可能会变为 $z = 0$ (就像上面例题中的平面 Π_2).

称复一维平面为复直线[1]). 它们由 $n - 1$ 个复线性方程所定义, 并可写成下面的形状:

$$\frac{z_1 - z_1^0}{\omega_1} = \cdots = \frac{z_n - z_n^0}{\omega_n}, \tag{10}$$

其中 $z^0 = (z_1^0, \cdots, z_n^0)$ 是该直线上的一个点, 而 $\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \neq 0$ 为给出其方向的一个向量 (它被确定到一个复的比例因子). 以 ζ 表示 (10) 中比的公共量, 则此复直线方程组可改写为参数形式:

$$z = z^0 + \omega\zeta. \tag{11}$$

在 $\mathbb{C}^n$ 中我们有通常的欧几里得度量, 在此度量下两个点 z 和 w 之间的距离等

[1]) 事实上, 这是实二维平面.

于 $|z-w|$; 这个度量的埃尔米特形式为

$$ds^2 = \sum_{\nu=1}^{2n} dx_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n} |dz_\nu|^2, \tag{12}$$

其中 $|dz_\nu|^2 = dx_\nu^2 + dx_{n+\nu}^2$. 有时, 我们会考虑这种度量, 在其下两点 z 和 w 之间的距离具有形式

$$\|z-w\| = \max_\nu |z_\nu - w_\nu|. \tag{13}$$

* 证明, $\rho(z,w) = \|z-w\|$ 满足度量公理: a) $\rho(z,w) = \rho(w,z)$ (对称公理); b) $\rho(z,w) \geqslant 0$, 且等号成立仅当 $z = w$; c) $\rho(z,w) \leqslant \rho(z,w') + \rho(w',w)$ (三角公理) *

在度量 (13) 下的球 $\{\|z-a\| < r\}$ 表示了在复直线 $\mathbb{C}(z_\nu)$ 上圆盘 $\{|z_\nu - a_\nu| < r\}$ 的乘积, 称其为*多圆盘* (参看下面的小节). 相应于此, 度量 (13) 也被称做*多圆盘度量*. 下面显然的双重不等式

$$\|z-w\| \leqslant |z-w| \leqslant \sqrt{n}\|z-w\| \tag{14}$$

表明, 在 $\mathbb{C}^n$ 所引进的两个度量给出了 $\mathbb{C}^n$ 中同一个拓扑.

最后, 我们来描述空间 $\mathbb{C}^n$ 的*紧化*, 即添加其无穷远处的元素. 为此, 令

$$z_\nu = \frac{\omega_\nu}{\omega_0} \quad (\nu = 1, \cdots, n; \omega_0 \neq 0), \tag{15}$$

以在其中引进齐次坐标 $\omega_0, \cdots, \omega_n$. 这样的坐标确定点 z 到一个复比例因子 $\lambda \neq 0$, 并且反过来, 任意数组 $\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_n), \omega_0 \neq 0$ 以及它的比例数组 $\lambda\omega$ 按公式 (15) 对应了同一个点 $z \in \mathbb{C}^n$. 除去这个齐次坐标 ω_0 的特定情形, 我们在 $\mathbb{C}^n$ 中添加上*非正常元素* (即无穷远元素), 它们对应了形如 $(0, \omega_1, \cdots, \omega_n) \neq 0$ 的数组. 于是任意数组 $\omega = (\omega_0, \cdots, \omega_n) \neq 0$ 对应于某个空间的点; 我们称这个空间为*复射影空间*, 以 $\mathbb{CP}^n$ 表示它, 或简单地记为 $\mathbb{P}^n$. 更准确地说, 不是那些点组 ω 自身的点, 而是它们按下述关系的等价类: $\omega' \sim \omega''$, 如果这些数组成比例, 即 $\omega'' = \lambda\omega'$, 其中 $\lambda \neq 0$ 为某个复数. 包含了数组 ω 的等价类被记作 $[\omega]$.

在紧化下, 我们对 $\mathbb{C}^n$ 补充了点 $[0, '\omega]$, 其中 $'\omega = (\omega_1, \cdots, \omega_n) \neq 0$. 这些点可以等同于等价类 $['\omega]$, 它们的集合显然代表了奇异的 $n-1$ 维射影空间, 记其为 $\mathbb{P}_\infty^{n-1}$. 因此,

$$\mathbb{P}^n = \mathbb{C}^n + \mathbb{P}_\infty^{n-1}, \tag{16}$$

而且只在 $n = 1$ 情形的紧化中才补充了一个单点: $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} + \{\infty\}$.

* 证明, 任意复直线 $l \subset \mathbb{C}^n$ 在紧化时补充了一个单点. *

对等价类 $[\omega]$ 有一个好的几何表示, 它给出了 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中一条通过原点的复直线:

$$\frac{z_1}{\omega_0} = \cdots = \frac{z_{n+1}}{\omega_n},$$

它的方向 $\omega=(\omega_0,\cdots,\omega_n)$ 也确定到一个复数因子 $\lambda\neq 0$, 而与其不等价的数组对应于不同的直线. 因此, $\mathbb{P}^n$ 也可表示为 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中通过原点的复直线的集合. 特别地, $\mathbb{C}^n$ 中的点对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中那些 $\omega_0\neq 0$ 的过原点的直线, 而无穷远点对应于 $\omega_0=0$ (垂直于向量 $(1,0,\cdots,0)\in\mathbb{C}^{n+1}$) 的那些直线.

直线 $l: z=\omega\zeta$ ($\omega\in\mathbb{C}^{n+1},\zeta\in\mathbb{C}$) 完全由它与球面 $S^{2n+1}=\{z\in\mathbb{C}^{n+1}:|z|=1\}$ 的交所描述. 如果 (不失一般性) 设 $|\omega|=1$, 那么这个交集由条件 $|\omega\zeta|=|\zeta|=1$ 决定, 它代表了复直线 l 上的一个圆. 将这样相交出的圆 $l\bigcap S^{2n+1}$ 粘合为一个点,[1] 我们又得到了 $\mathbb{P}^n$ 的一个表示. 这是对所熟知的实射影空间 $\mathbb{RP}^n$ 模型的一个复类比; 在实的情形, 我们把 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的实直线与球面交出的一对点粘合为一个点.

所描述的这个模型让我们在空间 $\mathbb{P}^n$ 上可以引进一个自然的度量. 就是说, 对于点 $[\omega]$ 和 $[\omega']$ 之间的距离我们采用 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中两个圆 γ 和 γ' 之间的欧几里得距离. 其中的 γ 和 γ' 分别代表在球面 S^{2n+1} 上的这两个点 (我们假定 $|\omega|=|\omega'|=1$). 初等的计算给出

$$\begin{aligned}\rho^2([\omega],[\omega'])&=\min_{\theta,\theta'}|\omega e^{i\theta}-\omega' e^{i\theta'}|^2\\&=\min_{\theta,\theta'}2\{1-\mathrm{Re}[(\omega,\omega')e^{i(\theta-\theta')}]\}\\&=2(1-|(\omega,\omega')|),\end{aligned}$$

或者, 如果 ω 和 ω' 在具有任意模时,

$$\rho^2([\omega],[\omega'])=2\left(1-\frac{|(\omega,\omega')|}{|\omega||\omega'|}\right). \tag{17}$$

如果在这里假定 $\omega'=\omega+d\omega$ 并舍去关于 $|d\omega|$ 的二阶以上的小量, 我们便得到相应的度量形式:

$$ds^2=\frac{(\omega,\omega)(d\omega,d\omega)-(\omega,d\omega)(d\omega,\omega)}{(\omega,\omega)^2}. \tag{18}$$

称这个度量为富比尼 – 施图迪 (Fubini-Study) 度量, 它是在 $\overline{\mathbb{C}}=\mathbb{P}^1$ 上的球面度量的高维推广 (如果在 $n=1$ 时引进局部坐标 $z=\omega_1/\omega_0$, 则 (18) 可改写为 $ds^2=|dz|^2/(1+|z|^2)^2$, 这正是球面度量形式).

* 1. 证明, 由形式 (17) 定义的度量形式满足距离公理. (提示: 在证明三角不等式时利用集合间的距离概念.)

2. 有时对于两个点 $[\omega],[\omega']\in\mathbb{P}^n$ 间的距离我们采用量 $d=\arccos\dfrac{|(\omega,\omega')|}{|\omega||\omega'|}$. 证明 d 可以利用公式 $d=2\arcsin\dfrac{\rho}{2}$ 通过 ρ 表示, 它等于代表 $[\omega]$ 和 $[\omega']$ 的 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中复直线上相应的实直线间的最小夹角. *

[1] 球面 S^{2n+1} 具实维 $2n+1$, 而粘合圆为一个点使其维数减少了 1. 因此, 我们所得到的模型的实维数等于 $2n$.

最后我们注意到, 在某些问题中还采用了 $\mathbb{C}^n$ 的另一种紧化, 从而导致一个所谓的函数论式的空间 $\overline{\mathbb{C}}^n = \overline{\mathbb{C}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{C}}$ (n 个). $\overline{\mathbb{C}}^n$ 的无穷远点的集合被分成了 n 个集合 $\{z \in \overline{\mathbb{C}}^n : z_\nu = \infty, z_\mu \in \overline{\mathbb{C}}$, 其中 $\mu \neq \nu\}$, 其中每一个的复维均为 $n-1$; 它们全体相交于点 $(\infty, \cdots, \infty)$.

2. 最简单的区域

在此我们将描述在空间 $\mathbb{C}^n$ 中最简单的几个区域的例子. 像通常那样, 我们所指的区域是开的连通集, 而集合的开性意味着每个属于它的点及其该点的某个邻域也属于此集合, 而开集合 D 的连通性意味着, 对任意点 $z', z'' \in D$, 存在连续道路 $\gamma : [0,1] \to D$, 使得 $\gamma(0) = z', \gamma(1) = z''$.

(1) 半径为 r, 中心为点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的球定义为点集

$$B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| < r\}. \tag{1}$$

这是通常的欧氏球; 其边界 ∂B 是个 $(2n-1)$ 维球面

$$S^{2n-1} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - a| = r\}.$$

(2) 多圆盘 (或多圆柱), 其半径为 r, 中心为 $a \in \mathbb{C}^n$, 定义为点集

$$U(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z - a\| < r\}. \tag{2}$$

这是中心于 a 的, 在多圆盘度量 ρ 下的球. 它表示了 n 个半径为 r, 中心在点 a_ν 的平面圆盘的乘积. 还可以考虑更加一般的情形, 即中心在 a 而具向量半径 $r = (r_1, \cdots, r_n)$ 的多圆盘:

$$U(a, r) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu - a_\nu| < r_\nu, \nu = 1, \cdots, n\}. \tag{3}$$

多圆盘的边界 ∂U 是那样的点 z 的集合, 其中至少有一个坐标 z_ν 属于构成 U 的第 ν 个圆盘的边界, 而其余的坐标 z_μ $(\mu \neq \nu)$ 可在闭圆盘内任意变动. 这个边界以自然的方式分解为 n 个集合

$$\Gamma^\nu = \{z : |z_\nu - a_\nu| = r_\nu, |z_\mu - a_\mu| \leqslant r_\mu, \mu \neq \nu\},$$

它们每一个的维数为 $2n-1$ (因为点 z 的 $2n$ 个坐标以一个实关系式 $|z_\nu - a_\nu| = r_\nu$ 相关联). 因此, 多圆盘的总边界 $\partial U = \bigcup\limits_{\nu=1}^{n} P^\nu$ 为 $2n-1$ 维. 所有集合 Γ^ν 相交为一个 n 维集合

$$\Gamma = \{z : |z_\nu - a_\nu| = r_\nu, \nu = 1, \cdots, n\},$$

称其为该多圆盘的骨架, 它是 n 个圆的乘积.

我们来仔细描述半径为 1, 中心在原点的双圆盘:

$$U = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\}.$$

这个四维体是两个圆柱体的交集:

$$x_1^2 + x_3^2 < 1 \quad 和 \quad x_2^2 + x_4^2 < 1.$$

它的边缘为三维体: $\partial U = \Gamma^1 \bigcup \Gamma^2$, 其中 $\Gamma^1 = \{|z_1| = 1, |z_2| \leqslant 1\}$ 也是个三维体, 它被纤维化为单参数的圆盘族: $\Gamma^1 = \bigcup\limits_{\theta=0}^{2\pi} \{z_1 = e^{i\theta}, |z_2| \leqslant 1\}$, 而 Γ^2 是类似的情形. 该双圆盘的骨架 $\Gamma = \Gamma^1 \bigcap \Gamma^2$ 为二维的. 这是个环面 $\Gamma = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$; 事实上, 映射 $z_1 = e^{i\theta_1}, z_2 = e^{i\theta_2}$ 将带有粘合正方形 $\{0 \leqslant \theta_1 \leqslant 2\pi, 0 \leqslant \theta_2 \leqslant 2\pi\}$ 同胚地映成 Γ, 其中的这个粘合由图 1 显示, 它将对边等同 (因为 $e^{i(\theta_\nu + 2\pi)} = e^{i\theta_\nu}$), 而这样的粘合给出了一个环面. 环面 Γ 可以看成是一个单参数圆族 $\{z_1 = e^{i\theta_1}, |z_2| = 1\}$ 和 $\{|z_1| = 1, z_2 = e^{i\theta_2}\}, 0 \leqslant \theta_1, \theta_2 < 2\pi$ (图 1 上显示了每个族中的一个代表元). 它可以作为两个三维圆柱 $\{x_1^2 + x_3^2 = 1\}$ 和 $\{x_2^2 + x_4^2 = 1\}$ 的交集, 而且显然地, 落在 $\mathbb{R}^4$ 中的 (三维) 球面 $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 2\}$ 上.

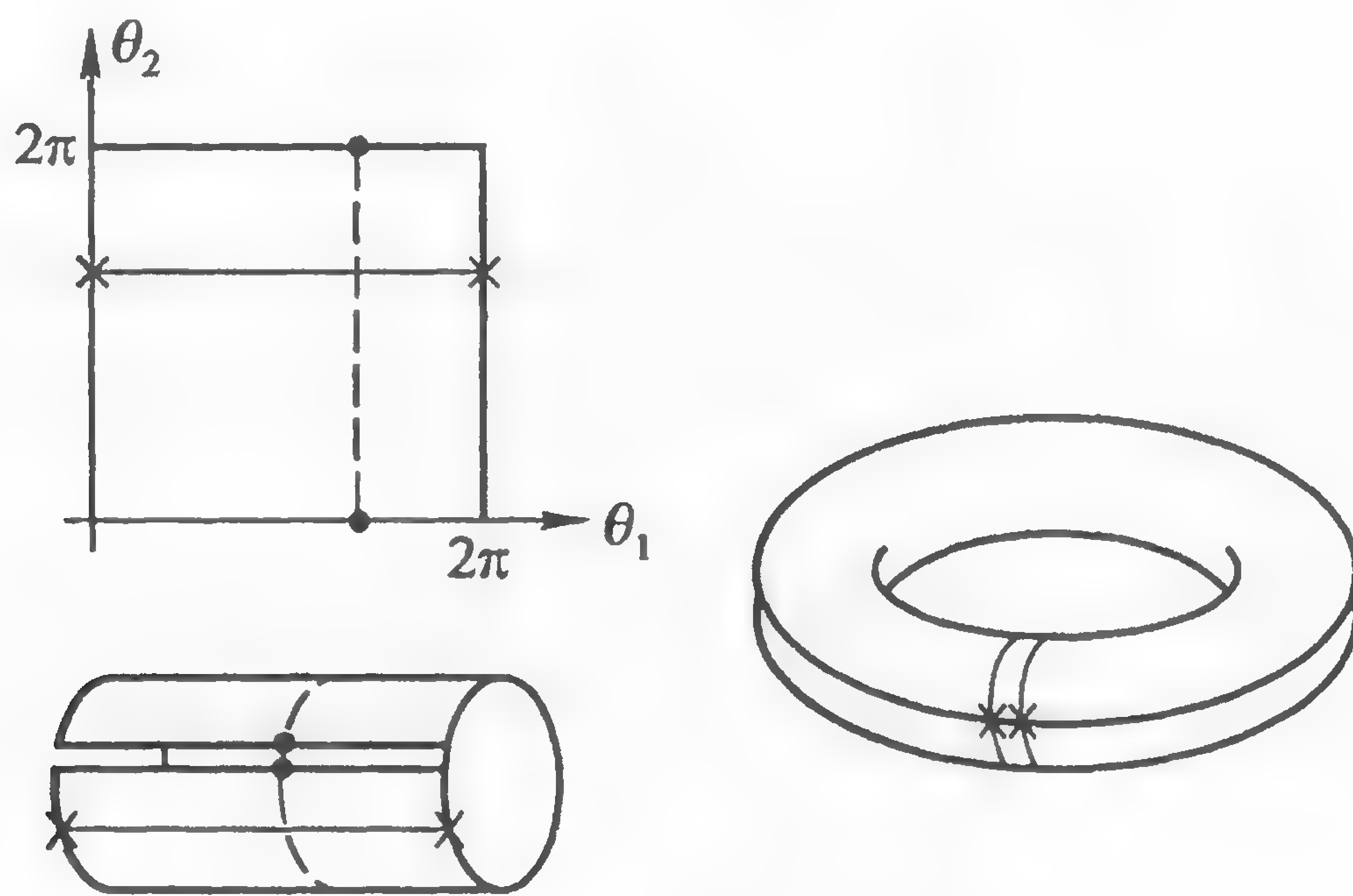


图 1

因此, 双圆盘几何上应该可以这样表示: 需要在 $\mathbb{C}^2$ 中取一个 (三维) 球面 $\{|z| = \sqrt{2}\}$, 并在其上选取环面 $\Gamma = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$. 在这个环面上张开两个三维体 $\Gamma^1 = \{|z_1| = 1, |z_2| \leqslant 1\}$ 和 $\Gamma^2 = \{|z_1| \leqslant 1, |z_2| = 1\}$, 它们位于球层 $\{1 \leqslant |z| \leqslant \sqrt{2}\}$ 中; 其并集 $\Gamma^1 \bigcup \Gamma^2$ 是双圆盘的边缘.

(3) $\mathbb{C}^n$ 中的多圆形 (或多圆柱形) 区域是 n 个平面区域的乘积:

$$D = D_1 \times \cdots \times D_n \tag{4}$$

(多圆盘是这种区域的特殊情形). 如果所有的 D_ν 为单连通区域, 则 D 同胚于球. 多圆形区域 D 的边界 ∂D 可分为 n 个维数为 $(2n-1)$ 的集合:

$$\Gamma^\nu = \{z : z_\nu \in \partial D_\nu, z_\mu \in \overline{D}_\mu, \mu \neq \nu\}.$$

所有这些 Γ^ν 的公共部分是个 n 维的集合

$$\Gamma = \{z : z_\nu \in \partial D_\nu, \nu = 1, \cdots, n\},$$

称其为多圆形区域 D 的骨架.

(4) 中心在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的赖因哈特 (Reinhardt) 区域 (或者 n –圆形区域), 它被定义为具有下列性质的区域: 对区域中的每个点 $z^0 = \{z_\nu^0\}$, 以及所有形如

$$z = \{a_\nu + (z_\nu^0 - a_\nu)e^{i\theta_\nu}\}, \quad 0 < \theta_\nu < 2\pi$$

的点都属于此区域.

称中心在 a 的赖因哈特区域为完全的, 是说如果连同属于此区域中每个点 z^0, 所有满足 $|z_\nu - a_\nu| \leqslant |z_\nu^0 - a_\nu|, \nu = 1, \cdots, n$ 的点也都属于此区域.

显然, 球和多圆盘是完全赖因哈特区域. 在 $n = 1$ 时圆环 $\{r < |z - a| < R\}$ 不是个完全赖因哈特区域, 而圆盘 $\{|z - a| < R\}$ 则是完全的.

不失一般性, 可以假定赖因哈特区域的中心 $a = 0$ (可经移动得到). 这样的区域连同其每个点 $\{z_\nu\}$ 也包含了所有那些具有相同模 $|z_\nu|, \nu = 1, \cdots, n$ 且具所有可能辐角的点. 有了这个论断, 我们便可考虑映射 α:

$$z \mapsto \alpha(z) = (|z_1|, \cdots, |z_n|), \tag{5}$$

它把 $2n$ 维空间 $\mathbb{C}^n$ 映到 n 维空间 $\mathbb{R}^n$, 更准确地说, 映到了所谓的绝对相限 $\mathbb{R}_+^n = \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \cdots \times \mathbb{R}_+}_{n\ 个}$ 中, 其中 $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ 为非负数半轴. 这个映射 $\alpha : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+^n$ 把赖因哈特区域 D 映到点集 $D_+ \subset \mathbb{R}_+^n$, 我们称其为赖因哈特区域 D 的像 (或图). 如果 D 是完全赖因哈特区域, 则 D_+ 与每个点 $\{|z_\nu^0|\}$ 一起的还包含了所有的直角平行体 $\{|z_\nu| \leqslant |z_\nu^0|, \nu = 1, \cdots, n\}$.

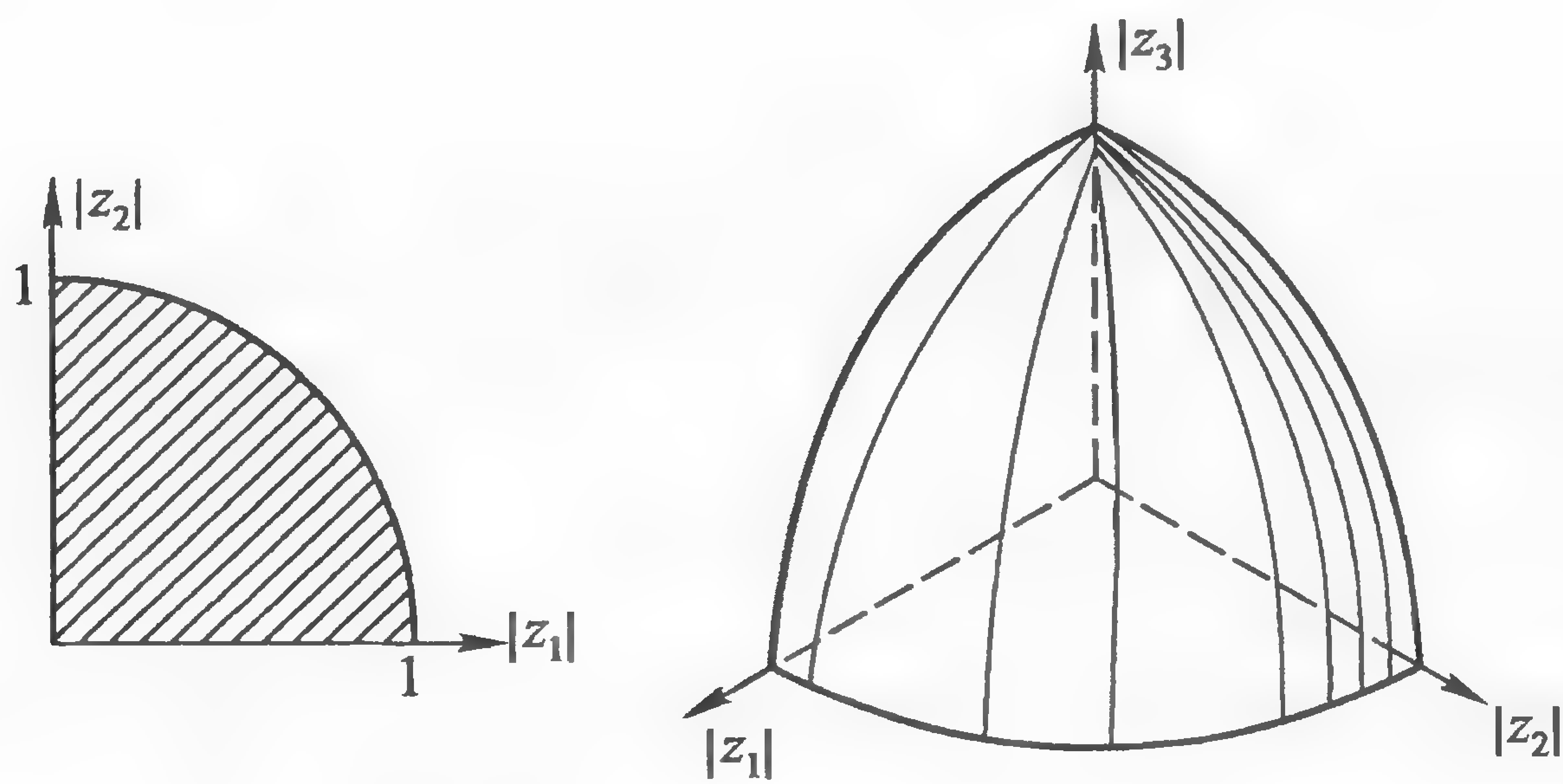


图 2

所描述的这个图完全给出了赖因哈特区域的一个特征刻画, 而且维数降低了 n; 对于 $n = 2$ 和 3, 我们构造出了它的可视图像. 在图 2 和图 3 中的图像对应 $n = 2$ 和 $n = 3$ 时的球 $\{|z| < 1\}$ 和多圆盘 $\{|z_\nu| < 1\}$ 的赖因哈特的图; 在它们的第二个中显示出了集合 Γ^ν 和骨架 Γ.

(5) 具对称平面 $\{z_n = a_n\}$ 的哈托格斯 (Hartogs) 区域. 它定义为具有下面性质的区域: 与属于此区域中每个点 $z^0 = \{z_\nu^0\}$ 一起的, 还有任意点 $z = (z_1^0, \cdots, z_{n-1}^0, a_n +$

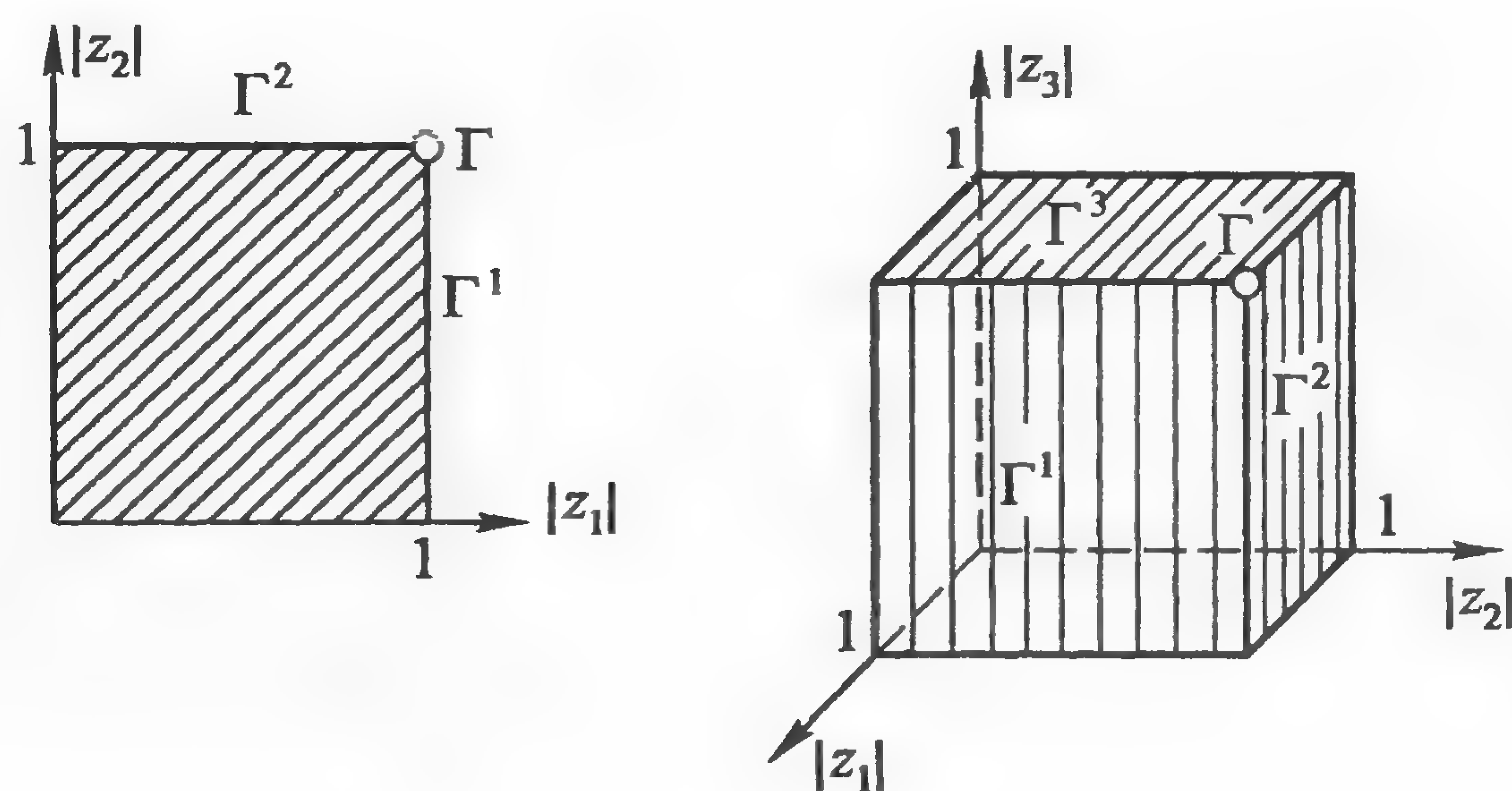


图 3

$(z_n^0 - a_n)e^{i\theta_n}), 0 < \theta_n < 2\pi$ 也属于此区域. 称一个哈托格斯区域为完全的是说, 如果与每个属于它的点 z^0 一起的, 还有所有那些满足 $z_\nu = z_\nu^0$ $(\nu = 1, \cdots, n-1)$, $|z_n - a_n| \leqslant |z_n^0 - a_n|$ 的点 z 也属于此区域. 显然, 哈托格斯区域比赖因哈特区域有更多的构成类型.

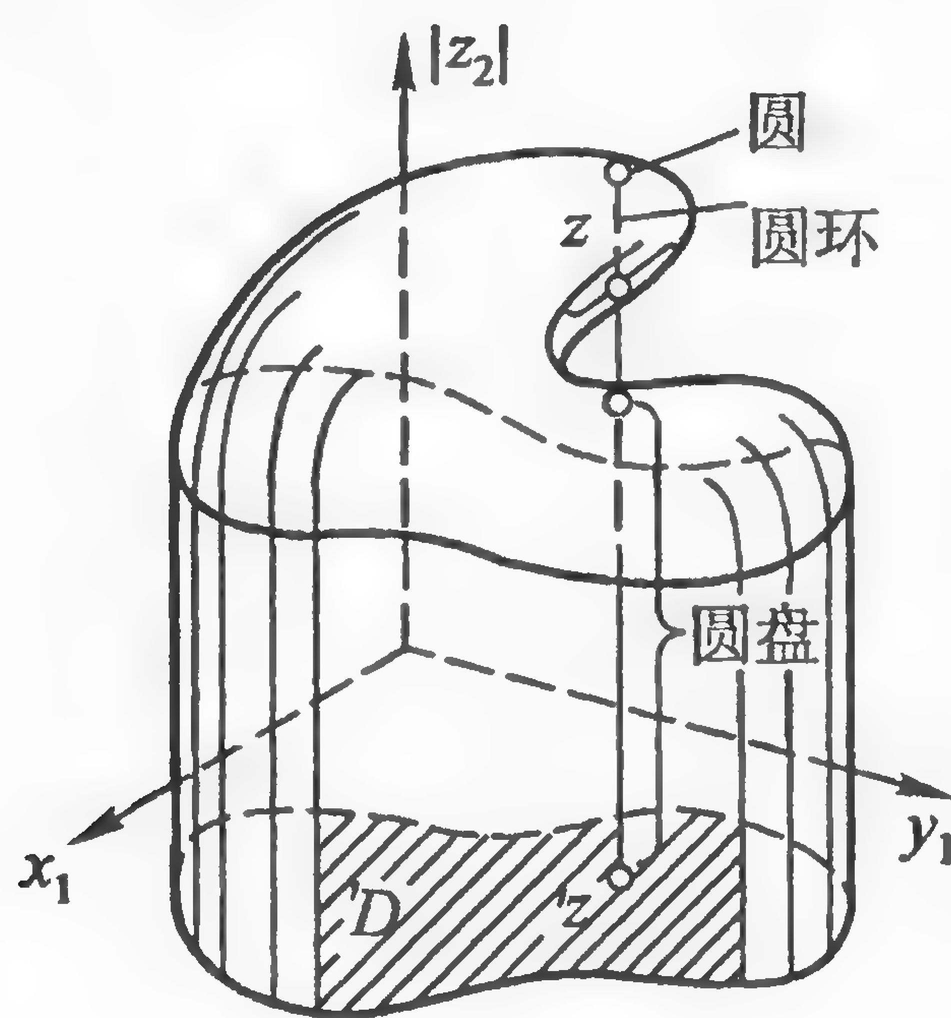


图 4

具对称平面 $\{z_n = 0\}$ 的哈托格斯区域可以被映到 $(2n-1)$ 维的空间中, 这只要利用公式

$$z \mapsto \beta(z) = \{z_1, \cdots, z_{n-1}, |z_n|\} \tag{6}$$

定义的映射 $\beta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ 即可做到.

为书写方便, 我们以 $'z = (z_1, \cdots, z_{n-1})$ 表示点 z 在空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的投影, 而以 $'D$ 表示 D 在 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的投影 (即对 $z \in D$ 的所有 $'z$ 的集合). 完全哈托格斯区域的像与每个点 $('z^0, |z_n^0|)$ 在一起的还包含了所有线段 $\{('z^0, |z_n|) : |z_n| \leqslant |z_n^0|\}$.

哈托格斯图把维数降低了 1, 并且当 $n = 2$ 时是完全可以看见的. 图 4 上画出了非完全哈托格斯区域; 应该记住, 在这个图上点代表的是圆, 而位于 $'D$ 上的竖直线段代表的是圆盘. 在图 5 上画出了在 $\mathbb{C}^2$ 中的球以及双圆盘. 在这个图上可很好地看出边缘的三维圆盘 Γ^1 和 Γ^2, 以及双圆盘的骨架 Γ.

(6) 中心在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的**圆形 (区) 域**, 与这个区域中每个点 z 一起的, 还包含了

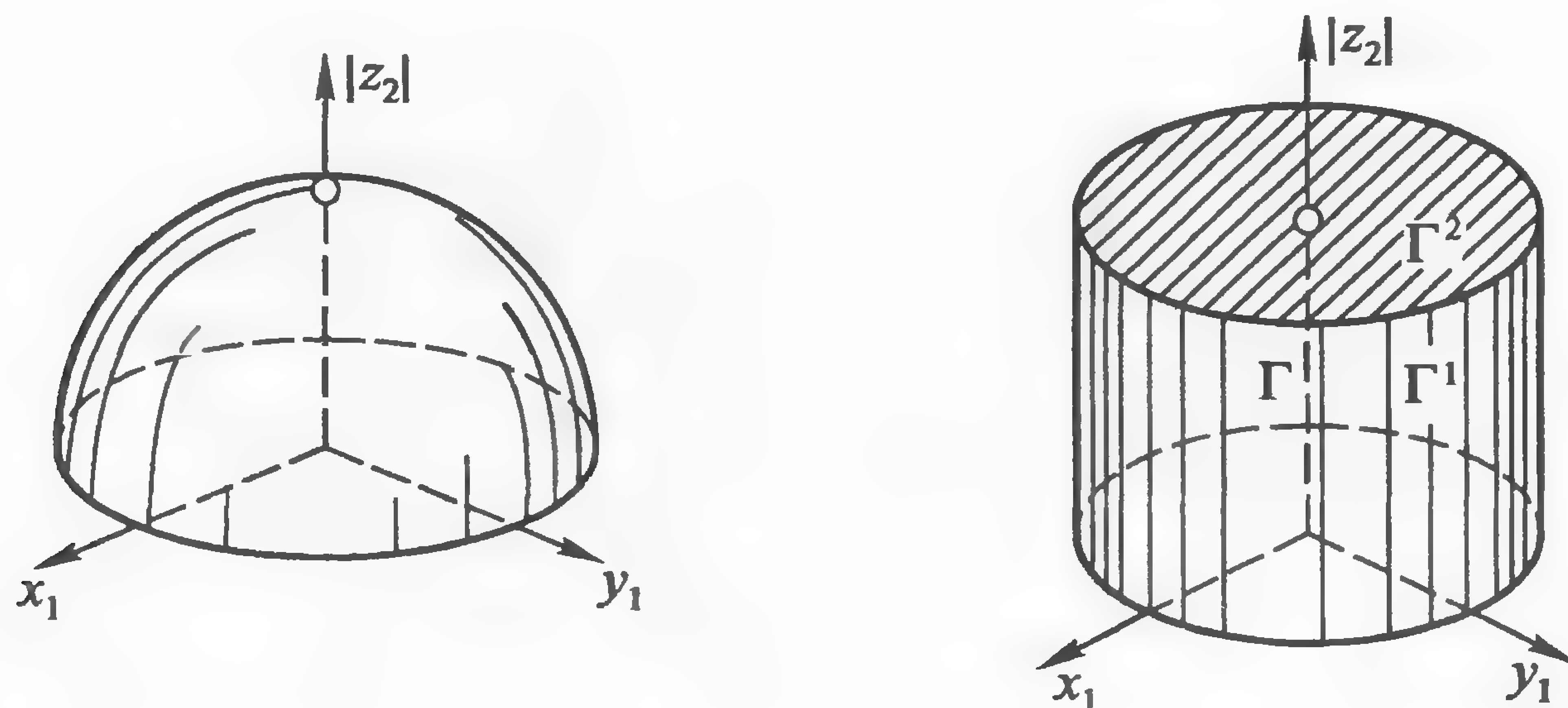


图 5

所有 $a+(z-a)e^{i\theta}, 0<\theta<2\pi$ 的点, 即在经过 z 和 a 的复直线上的圆, 其中心在 a, 半径为 $|z-a|$. 而完全圆形区域则是与 z 一起的还包含了圆盘 $\{a+(z-a)\zeta, |\zeta|\leqslant 1\}$. 如果 $a=0$, 则简单的变换 $(z_1,\cdots,z_n)\mapsto(z_1/z_n,\cdots,z_{n-1}/z_n,z_n)$ 将圆形区域变成了哈托格斯区域 (这个变换在 $z_n=0$ 有奇点, 从而只在 $D\backslash\{z_n=0\}$ 有定义).

(7) **管状 (或圆柱状) 区域.** 被定义为具有下面性质的区域: 与属于此区域的每个点 $z^0=\{z_\nu^0\}$ 还包含了所有点 $z=\{z_\nu^0+iy_\nu\}, -\infty<y_\nu<\infty, \nu=1,\cdots,n$. 任意管状区域均可表示为乘积形式 $B\times\mathbb{R}^n(y)$, 其中 B 是所谓的底区域, 它是 n 维实空间 $\mathbb{R}^n(x), x=(x_1,\cdots,x_n)$, 中的某个区域, 而 $\mathbb{R}^n(y)$ 是点 $y=(y_1,\cdots,y_n)$ 的实空间. 因此, 管状区域完全被它的底 B 所刻画, 即一个实 n 维空间中的区域.

令 $z=x+iy$, 其中的 x 和 y 为实的 n 维向量, 那么管状区域可以符号记为 $T=B+i\mathbb{R}^n(y)$ 的形式, 或者更细致一些, 记为 $T=\{x+iy: x\in B, y\in\mathbb{R}^n\}$. 当 $n=1$ 时, 管状区域显然为带状 $\{\alpha<x<\beta, -\infty<y<\infty\}$, 以及半平面 $\{x>\alpha\}$ 或 $\{x<\alpha\}$.

我们还注意到, 映射 $\varphi: z_\nu\mapsto e^{z_\nu}$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 将管状区域 T 变为某个赖因哈特区域 D. 在此情形下, 底区域 B 对应了 D_+, 这是 D 在赖因哈特图上的像.

(8) **广义上半平面.** 在某些问题中, 把点 $z\in\mathbb{C}^{n^2}$ 表示为方形矩阵 $Z=(z_{jk}), j, k=1,\cdots,n$ 颇为方便. 设 $Z^*=(\overline{z}_{kj})$ 为 Z 的共轭转置矩阵; 令

$$\operatorname{Im} Z=\frac{1}{2i}(Z-Z^*). \tag{7}$$

显然, 这个矩阵是埃尔米特的: 它的分量 $w_{jk}=\dfrac{1}{2i}(z_{jk}-\overline{z}_{kj})$ 满足条件 $w_{kj}=\overline{w}_{jk}$, 特别地, $w_{jj}=\overline{w}_{jj}$ 为实数. 我们约定记埃尔米特矩阵 $W>0$ 表示这个矩阵是正定的, 就是说, 它的所有特征值都是正的.

称区域

$$H=\{Z\in\mathbb{C}^{n^2}: \operatorname{Im} Z>0\} \tag{8}$$

为**广义上半平面**. 当 $n=1$ 时, 这是通常的上半平面. 这个区域的边界由那些矩阵 Z 组成, 使得 $\operatorname{Im} Z$ 为非负, 然而又不是正定的埃尔米特矩阵 (其特征值非负且至少有

一个等于 0). 由于埃尔米特矩阵的特征值化为零的条件由实解析方程表达, 故 ∂H 由一些 $2n^2-1$ 维的实解析曲面组成.

在 ∂H 上存在集合 $\Gamma=\{Z:\operatorname{Im} Z=0\}$, 称其为上半平面 H 的骨架. 它由那些满足 $z_{jk}=\overline{z}_{kj}$ 的矩阵 $Z=(z_{jk})$ 所代表的点构成, 即那些埃尔米特矩阵. 埃尔米特条件由 n^2 个独立的方程表达, 因此 Γ 的实维数等于 n^2.

我们特别留意 $n=2$ 的情形, 即空间 $\mathbb{C}^4$. 这时的广义上半平面

$$H=\left\{Z\in\mathbb{C}^4:\begin{pmatrix} y_{11} & \dfrac{z_{12}-\overline{z}_{21}}{2i} \\ \dfrac{z_{21}-\overline{z}_{12}}{2i} & y_{22}\end{pmatrix}>0\right\} \tag{9}$$

由不等式 $y_{11}>0, y_{11}y_{22}-\dfrac{1}{4}|z_{12}-\overline{z}_{21}|^2>0$ 定义 (我们在其中令 $z_{jk}=x_{jk}+iy_{jk}$ 并利用了西尔维斯特 (Sylvester) 判别法), 而它的边界由方程 $y_{11}y_{22}=\dfrac{1}{4}|z_{12}-\overline{z}_{21}|^2$ 决定, 骨架则是实四维平面 $y_{11}=y_{22}=0, z_{12}=\overline{z}_{21}$.

我们还知道, 非退化仿射变换

$$Z\mapsto\begin{pmatrix} z_{11}+z_{22} & z_{12}+z_{21} \\ i(z_{21}-z_{12}) & z_{11}-z_{22}\end{pmatrix} \tag{10}$$

将 H 变到由不等式 $y_{11}>0, y_{11}^2-y_{22}^2-y_{12}^2-y_{21}^2>0$ 所定义的区域, 即变到在锥体 $C=\{y_{11}^2-y_{22}^2-y_{12}^2-y_{21}^2>0\}$ 上的管状区域 $T=\mathbb{R}^4(x)+iC$, 更准确地说, 是在这个锥体上由 $y_{11}>0$ 定义的那一叶 C_+. 边界 ∂H 在此变换下变为 $\partial C_+\times\mathbb{R}^4(x)$, 而骨架变到实子空间 $\mathbb{R}^4(x)$, 更准确地说, 是这个空间与锥 C_+ 的顶点的乘积.

§2. 全纯函数

3. 全纯的概念

多变量函数的全纯性是卷 I 中相应概念的推广.

定义 1. 称函数 $l:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ 为 $\mathbb{R}$ – 线性的 (相应地, $\mathbb{C}$ – 线性的) 是说, 如果
a) $l(z'+z'')=l(z')+l(z'')$ 对所有 $z', z''\in\mathbb{C}^n$ 成立,
b) $l(\lambda z)=\lambda l(z)$ 对 $z\in\mathbb{C}^n$ 和所有 $\lambda\in\mathbb{R}$ (相应地, $\lambda\in\mathbb{C}$) 成立.

$\mathbb{C}^n$ 上的任意 $\mathbb{R}$ – 线性函数具有形式

$$l(z)=\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu z_\nu+b_\nu\overline{z}_\nu),\quad a_\nu, b_\nu\in\mathbb{C}, \tag{1}$$

而 $\mathbb{C}$ – 线性的形式为

$$l(z)=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu z_\nu,\quad a_\nu\in\mathbb{C}. \tag{2}$$

$\mathbb{R}$ – 线性函数 l 为 $\mathbb{C}$ – 线性函数当且仅当

$$l(iz) = il(z). \tag{3}$$

(参看卷 I 第 6 目的相应论断.)

定义 2. 函数 $f: U \to \mathbb{C}$, 其中 U 为点 $z \in \mathbb{C}^n$ 的一个邻域, 是在该点 $\mathbb{R}$ – 可微的 (相应地, $\mathbb{C}$ – 可微的) 是说, 如果成立

$$f(z+h) = f(z) + l(h) + o(h), \tag{4}$$

其中 l 为某个 $\mathbb{R}$ – 线性 (相应地, $\mathbb{C}$ – 线性) 函数, 而 $o(h)/|h| \to 0$ 当 $h \to 0$.

称函数 l 为函数 f 在点 z 的微分, 记为 df. 令 $h = dz = dx + idy$, 其中的 $dz = (dz_1, \cdots, dz_n)$ 是个复向量, 而 $dx = (dx_1, \cdots, dx_n)$ 和 $dy = (dy_1, \cdots, dy_n)$ 为实向量, 当 f 是 $\mathbb{R}$ – 可微时, 我们可以把 f 的微分写成

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} dx_\nu + \frac{\partial f}{\partial y_\nu} dy_\nu \right)$$

的形状, 或者转向复坐标时, 有形状

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} d\overline{z}_\nu \right), \tag{5}$$

其中, 我们引进了记号

$$\frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} - i \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + i \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \right), \quad \nu = 1, \cdots, n. \tag{6}$$

(5) 中的第一项的和以符号 ∂f 表示, 而第二个记为 $\overline{\partial} f$, 于是

$$\partial = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_\nu} dz_\nu, \quad \overline{\partial} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu} d\overline{z}_\nu, \quad d = \partial + \overline{\partial}. \tag{7}$$

定理 1. 在点 $z \in \mathbb{C}^n$ 为 $\mathbb{R}$ – 可微的函数 f 在此点为 $\mathbb{C}$ – 可微的充要条件是它满足柯西 – 黎曼条件

$$\overline{\partial} f = 0. \tag{8}$$

证明. 由 (5) 可知 $df(ih) = i\partial f(h) - i\overline{\partial} f(h)$ 和 $idf(h) = i\partial f(h) + i\overline{\partial} f(h)$. 故而 $\mathbb{C}$ – 可微性 $df(ih) = idf(h)$ 等价于条件 $\overline{\partial} f(h) = 0$ 对所有 $h \in \mathbb{C}^n$ 成立. □

柯西 – 黎曼条件 (8) 等价于 n 个复方程组

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_\nu} + i \frac{\partial f}{\partial y_\nu} \right) = 0, \quad \nu = 1, \cdots, n, \tag{9}$$

或者等价于 $2n$ 个实方程的方程组

$$\frac{\partial u}{\partial x_\nu}=\frac{\partial v}{\partial y_\nu},\quad \frac{\partial u}{\partial y_\nu}=-\frac{\partial v}{\partial x_\nu},\quad \nu=1,\cdots,n, \tag{10}$$

其中 $u=\mathrm{Re}\, f, v=\mathrm{Im}\, f$. 当 $n>1$ 时, 这个方程组是超定的 (这是关于两个未知函数的 $2n$ 个方程), 并且这个情形从根本上说正是高维复分析和一维之间的区别.

定义 3. 称函数 f *在点* $z\in\mathbb{C}^n$ *是全纯的*是说, 如果它在这个点的某个邻域中为 $\mathbb{C}$ – 可微. 在开集上 $\mathbb{C}$ – 可微的概念与全纯的概念相合.

我们应该留意到在任意 (不必一定为开) 集合 M 上的全纯性概念的微妙之处; 这可在后面的例子中清楚看出.

例题. 设集合 $M\subset\mathbb{C}^2$ 由两个闭球 $\overline{B}_1=\left\{|z-(0,1)|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 和 $\overline{B}_2=\left\{|z+(0,1)|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$, 以及联结它们的线段 $L=\left\{z_1=0,z_2=x_2,|x_2|\leqslant\frac{1}{2}\right\}$ 组成. 我们定义在 M 上的函数 f 为

$$f(z)=\begin{cases} z_1, & z\in\overline{B}_1,\\ 0, & z\in L,\\ -z_1, & z\in\overline{B}_2.\end{cases}$$

显然, 它在 M 上连续, 并且对每个点 $z^0\in M$ 可以构建一个邻域 U_{z^0}, 使得 f 可作为全纯函数延拓到它的上面. 事实上, 对于包括 $\overline{B}_1$ 与 L 的交点 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 在内的 $\overline{B}_1$ 的点, 可以取一个与 $\overline{B}_2$ 不相交的球当作这样的邻域, 并令 f 在其上等于 z_1, 从而将 f 延拓到此邻域. 对于 $\overline{B}_2$ 中的点进行类似的构造, 但令 $f(z)=-z_1$. 最后, 对 L 内部的点, 我们取的球不包含这个线段的端点, 并在其中令 $f=0$. 但是由我们将在第 5 目证明的唯一性定理知道, f 不可能延拓为一个在整个集合 M 的任何连通邻域 Ω 中的全纯函数. 事实上, 由此定理推出不存在 Ω 中的全纯函数使得它在 Ω 中一个球上等于 z_1 而在另一个球上等于 $-z_1$.

由这个例子可以看出, 有必要区分在一个集合上的*局部全纯函数*和*整体全纯函数*. 前者在集合中每点均可局部地延拓为全纯函数, 而后者可延拓为整个集合的一个全纯函数. 在此之后, 当谈及集合上的全纯函数时, 我们作为一种规则约定为整体全纯函数.

在点 $z\in\mathbb{C}^n$ 的全纯函数间的和与积仍是在此点的全纯函数, 因此所有在点 z 全纯函数的集合构成一个环, 记其为 $\mathscr{O}_z$. 全纯于区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 的全纯函数环记为 $\mathscr{O}(D)$.

由柯西 – 黎曼条件 (9) 可以看出, 在点 z^0 的邻域 $U\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数 f 对每一个变量 z_ν 为全纯, 这时我们假定其他的变量固定不动 (在点 z_ν^0 的位于复直线

$\{z: z_\mu = z_\mu^0, \mu \neq \nu\}$ 里的邻域中). 另外, 由于方程组 (9) 被分成了各个单独的方程, 其中的每一个只涉及对一个变量的导数, 似乎对一些变量的全纯性条件并没有加上对其他变量的任何关联. 但是毕竟还是建立了某种关联: 原来, 在 U 中对每个单独变量 z_ν 为全纯的函数必定是对全体变量为 $\mathbb{R}$ – 可微的, 从而才可由定理 1 知此函数在 U 中为全纯.

这个事实构成了被称做哈托格斯基本定理 [1] 的内容, 这远非一个平凡的事实. 例如, 它的在实数域上的类比就不再正确: 函数

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, \quad f(0,0) = 0$$

在任意的 y 值下对于变量 x 可微, 同时对任意固定的 x 对于变量 y 可微, 然而在点 $(0,0) \subset \mathbb{R}^2$, 这个函数甚至都不连续. 我们将在第 6 目证明哈托格斯定理.

4. 多重调和函数

我们从简单的注解开始: 如果函数 $f = u + iv$ 在点 $z \in \mathbb{C}^n$ 为全纯, 则函数 $\overline{f} = u - iv$ 在此点的邻域中为 $\mathbb{R}$ – 可微且对任意 $\nu = 1, \cdots, n$ 有

$$\frac{\partial \overline{f}}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial x_\nu} - i\frac{\partial \overline{f}}{\partial y_\nu}\right) = \overline{\left(\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}\right)} = 0. \tag{1}$$

我们称这样的函数 $\overline{f}$ 在点 z 为**反全纯的**.

设 f 在点 $z \in \mathbb{C}^n$ 为全纯, 那么由上面的注解知道, 对其实部 $u = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ 而言, 在点 z 的邻域中我们有 $\frac{\partial u}{\partial z_\nu} = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial z_\nu}$. 我们还利用全纯函数的偏导数仍为全纯的事实 (将在第 5 目证明), 从而由此得到: 对任意 $\mu, \nu = 1, \cdots, n$ 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\left(\frac{\partial u}{\partial z_\mu}\right) = 0. \tag{2}$$

分离出 (2) 的左端算子的实部和虚部:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_\mu}\frac{\partial}{\partial z_\nu} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2}{\partial y_\mu \partial y_\nu}\right) + \frac{i}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu} - \frac{\partial^2}{\partial x_\nu \partial y_\mu}\right),$$

我们从而得出, 条件 (2) 被分解为 n^2 个关于二阶偏导数的方程:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial x_\nu} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu \partial y_\nu} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu \partial y_\nu} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu \partial y_\mu} = 0 \tag{3}$$

$(\mu, \nu = 1, \cdots, n$; 第二组方程当 $\mu = \nu$ 时为平凡).

如果利用第 3 目式 (7) 引进的算子 ∂ 和 $\overline{\partial}$, 则方程组 (2) 可以重写为一个单一的条件

$$\partial\overline{\partial}u = 0. \tag{4}$$

[1] 哈托格斯 (F. Hartogs, 1874 — 1943) 在 1906 年发表了对这个定理的证明.

定义. 称在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中每点满足条件 (4) 的 C^2 类函数 u 为在此区域中的**多重调和函数**.

* 1. 证明, 函数 $u\in C^2(D)$ 在 D 中为多重调和的当且仅当它在任意复直线 $\{z=z^0+\omega\zeta\}$ 的限制, 即函数 $h(\zeta)=u(z^0+\omega\zeta)$, 是在开集 $\{\zeta\in\mathbb{C}: z^0+\omega\zeta\in D\}$ 上的调和函数.

2. 如果 $u\in C^2$ 在任意实二维平面 $\{z=z^0+\omega\zeta+\omega'\overline{\zeta}\}$ 上的限制是调和的, 则 u 为线性函数. *

多重调和函数与多复变全纯函数之间的关系同于 ($\mathbb{R}^2$ 上) 调和函数与单变量全纯函数之间的关系. 就是说, 成立下面的两个定理:

定理 1. 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中全纯的函数 f 的实部和虚部是此区域中的多重调和函数.

证明. 对实部 $u=\operatorname{Re} f$ 定理已得证明. 因为与 f 一起的, 函数 $-if\in\mathscr{O}(D)$ 也成立, 故 $\operatorname{Im} f=\operatorname{Re}(-if)$, 故定理对虚部亦真. □

一般说来, 逆定理只在局部成立.

定理 2. 对任意在点 $(x^0,y^0)\in\mathbb{R}^{2n}$ 的邻域 U 中为多重调和的函数 u, 存在在点 (x^0,y^0) 的全纯函数 f, 使其实部 (或虚部) 等于 u.

证明. 我们考虑与 $du=\sum\left(\frac{\partial u}{\partial x_\nu}dx_\nu+\frac{\partial u}{\partial y_\nu}dy_\nu\right)$ 相关的所谓**共轭微分**

$$*du=\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{\partial u}{\partial y_\nu}dx_\nu+\frac{\partial u}{\partial x_\nu}dy_\nu\right). \tag{5}$$

形式 [1] $\omega=*du$ 在 U 中为闭, 这是因为 u 的多重调和性, 它的系数属于 C^1 类, 以及根据 (3) 有

$$d\omega=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu\partial y_\mu}-\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial y_\nu}\right)(dx_\mu\wedge dx_\nu+dy_\mu\wedge dy_\nu)+$$
$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\mu\partial x_\nu}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_\mu\partial y_\nu}\right)dx_\mu\wedge dy_\nu=0.$$

然而每个闭形式为局部恰当, 故而在 z^0 的一个邻域中存在函数 v 使得 $*du=dv$: 它可以积分表达为

$$v(z)=\int_{z_0}^{z}*du, \tag{6}$$

[1] 对微分形式不熟悉的读者, 我们建议转到第 14 目.

由于 $*du$ 的闭性, 它不依赖于路径的选取. 然而由于在 z^0 的邻域有

$$\frac{\partial v}{\partial x_\nu} = -\frac{\partial u}{\partial y_\nu}, \quad \frac{\partial v}{\partial y_\nu} = \frac{\partial u}{\partial x_\nu},$$

从而函数 $f = u + iv$ 属于 C^2 类并满足上一目中的柯西 – 黎曼条件; 由第 3 目中的定理 1, 它在点 z^0 为全纯, 且 $u = \mathrm{Re}\, f$.

在点 z^0 的全纯函数 $if = iu - v$ 以 u 为其虚部. □

(3) 的第一组方程在 $\mu = \nu$ 时给出了

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} = 0. \tag{7}$$

把这些方程按 $\nu = 1, \cdots, n$ 相加, 我们得到函数 u 对变量 $x_1, y_1, \cdots, x_n, y_n$ 的拉普拉斯 (Laplace) 算子

$$\triangle u = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\nu^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_\nu^2} \right) = 0. \tag{8}$$

因此, 在空间 $\mathbb{R}^{2n}$ 中, 多重调和函数构成了调和函数类中的子类 (当然是在 $n > 1$ 时成立).

按给定边界值确定在某个区域 $D \subset \mathbb{R}^{2n}$ 上的多重调和函数是个自然产生的问题 (即狄利克雷 (Dirichlet) 问题). 这个问题解决起来并不像调和函数情形时那样简单. 我们以一个最简单区域作为例子来解释所产生的这种困难; 这个区域是多圆盘 $U = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu| < 1\}$. 因为根据 (7), 多重调和函数是对每个变量 $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$ 在圆盘 $\{|z_\nu| < 1\}$ 中的调和函数, 于是我们可以逐次取泊松 (Poisson) 积分 (见卷 I 的附录的第 2 目). 对任意 $z \in U$ 我们得到

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(\zeta_1, z_1) dt_1 \cdots \int_0^{2\pi} u(\zeta) P(\zeta_n, z_n) dt_n,$$

其中 $\zeta_\nu = e^{it_\nu}, \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ 和

$$P(\zeta_\nu, z_\nu) = \frac{1}{2\pi} \frac{1 - |z_\nu|^2}{|\zeta_\nu - z_\nu|^2},$$

这是泊松核. 以

$$P_n(\zeta, z) = \prod_{\nu=1}^{n} P(\zeta_\nu, z_\nu) \tag{9}$$

表示 n 维泊松核, 以 $Q_n = \underbrace{[0, 2\pi] \times \cdots \times [0, 2\pi]}_{n\ 个}$ 表示 n 维立方体, 以 $dt = dt_1 \cdots dt_n$ 表示体积元, 我们将泊松公式改写为下面的紧凑形状:

$$u(z) = \int_{Q_n} u(\zeta) P_n(\zeta, z) dt. \tag{10}$$

在此公式的右端出现的只有 u 在多圆盘 Γ 的骨架上的值, 即在边界 ∂U 的 n 维部分 (整个边界为 $(2n-1)$ 维). 由此清楚看出, 不能随便给出多重调和函数 u 在整个多圆盘边界上的值. 如果在 (10) 的右端我们替换为在 Γ 上连续的某个函数 $u(\zeta)$ 的值, 则由此公式定义在 U 上的函数 $u(z)$ 对所有 $\nu=1,\cdots,n$ 满足方程 (7), 这并不难验证. 但是这个函数, 一般说来, 不满足另外的方程 (3), 就是说, 在 U 上不是多重调和的. 为了使 $u(z)$ 为多重调和必须对 $u(\zeta)$ 的值加上补充的条件, 我们在此不再做进一步的讨论.

5. 全纯函数的最简单的性质

在这里我们将建立多复变全纯函数的一系列初等性质, 它们可类比于单变量函数的性质. 为简便起见, 以 $U=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu-a_\nu|<r_\nu,\nu=1,\cdots,n\}$ 表示以 a 为中心, 以 $r=(r_1,\cdots,r_n)$ 为向量半径的多圆盘, 以 $\mathscr{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$ 表示在 $\overline{U}$ 上连续而在 U 上全纯的函数集合.

定理 1. 任意函数 $f\in\mathscr{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$ 在任意点 $z\in U$ 可由柯西重积分

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)d\zeta_1\cdots d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}\tag{1}$$

表示, 其中 Γ 为 U 的骨架, 即边界圆 $\gamma_\nu=\{|z_\nu-a_\nu|=r_\nu\},\nu=1,\cdots,n$ 的乘积.

证明. 设 $'z$ 和 $'U$ 为 z 和 U 在空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的投影; 因为对任意 $'z\in{}'U$, 函数 $f(z)=f('z,z_n)$ 对 z_n 在圆盘 $\{|z_n-a_n|<r_n\}$ 中为全纯, 并且在其闭包上连续, 故由第 I 卷中的柯西积分公式有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_n}\frac{f('z,\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n.$$

对任意 $\zeta_n\in\gamma_n$ 和任意 $'z\in{}'U$, 被积函数可以由对变量 z_{n-1} 的柯西积分表示, 其中由于 f 的连续性, 对变量组的累次积分可以表示为在乘积 $\gamma_{n-1}\times\gamma_n$ 上的重积分. 继续这种讨论我们便得到了 (1). □

今后我们将把公式 (1) 写成简缩形状:

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\tag{2}$$

其中 $d\zeta=d\zeta_1\cdots d\zeta_n,\dfrac{1}{\zeta-z}=\dfrac{1}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}$.

注. 正如我们在定理 1 的证明中所看到的, 为了使函数 f 可以以柯西重积分 (1) 表示, 只需 f 对每个单个变量 z_ν 在圆盘 $\{|z_\nu-a_\nu|<r_\nu\}$ 上全纯, 以及在 $\overline{U}$ 上对整个变量组为连续即可.

正像在卷 I 中所显示的, 函数的柯西积分表示给出了将其展开为幂级数的可能性. 为此, 我们把积分 (2) 的核展开为多重几何级数:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - a} \cdot \frac{1}{\left(1 - \dfrac{z_1 - a_1}{\zeta_1 - a_1}\right) \cdots \left(1 - \dfrac{z_n - a_n}{\zeta_n - a_n}\right)}$$

$$= \frac{1}{\zeta - a} \sum_{|k|=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\zeta - a}\right)^k,$$

其中 $k = (k_1, \cdots, k_n)$ 为整数值向量, $|k| = k_1 + \cdots + k_n$, 而

$$\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^k = \left(\frac{z_1 - a_1}{\zeta_1 - a_1}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{z_n - a_n}{\zeta_n - a_n}\right)^{k_n}.$$

可以把这个展开式重写为形式

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{|k|=0}^{\infty} \frac{(z-a)^k}{(\zeta - a)^{k+1}},$$

其中 $k + 1 = (k_1 + 1, \cdots, k_n + 1)$; 对于任意的 $z \in U$, 它对在 Γ 上的 ζ 为绝对收敛和一致收敛. 对它乘以在 Γ 上连续 (从而有界) 的函数 $\dfrac{f(\zeta)}{(2\pi i)^n}$, 并在 Γ 上逐项积分, 我们便得到所需要的论断:

定理 2. 如果 $f \in \mathscr{O}(U) \bigcap C(\overline{U})$, 则在每点 $z \in U$ 它可表示为多重幂级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{3}$$

其系数

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta) d\zeta}{(\zeta - a)^{k+1}}. \tag{4}$$

注. 任意函数 $f \in \mathscr{O}(U)$ 均可在每点 $z \in U$ 表示为级数和 (3). 为证明此论断我们只需注意到, 点 z 属于某个多圆盘 $U' \Subset U$ 并对 U' 应用定理 2.

引理 (阿贝尔). 如果多重幂级数 $\sum\limits_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k$ 的项在任意点 $\zeta \in \mathbb{C}^n$ 有界, 则它在多圆盘 $U(a, \rho)$ 的任意紧子集 K 上绝对且一致收敛, 其中的 $U(a, \rho)$ 以 a 为中心, 以 $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n)$ 为向量半径, 而 $\rho_\nu = |\zeta_\nu - a_\nu|$.

证明. 设 $|c_k(\zeta - a)^k| = |c_k| \rho^k \leqslant M$, 其中 $\rho^k = \rho_1^{k_1} \cdots \rho_n^{k_n}$, 另外可假定所有的 $\rho_\nu > 0$ (否则 K 为空). 由条件 $K \Subset U(a, \rho)$ 得出

$$q_\nu = \max_{z \in K} \frac{1}{\rho_\nu} |z_\nu - a_\nu| < 1 \quad (\nu = 1, \cdots, n),$$

从而在任意点 $z\in K$ 有 $|c_k(z-a)^k|\leqslant|c_k|\rho^k q^k\leqslant Mq^k$, 其中 $q^k=q_1^{k_1}\cdots q_n^{k_n}$. 还需注意, 多重几何级数 $\sum Mq^k$ 收敛, 这是因为所有的 $q_\nu<1$. □

定理 3. 如果 $f\in\mathscr{O}(U)$, 则在任意点 $z\in U$, 这个函数有任意阶的偏导数, 而且它们也属于 $\mathscr{O}(U)$.

证明. 由定理 2, 在任意点 $z\in U$ 函数 f 可表示为幂级数和 (3). 利用阿贝尔引理或者卷 I 中的结果知道, 该级数的项可重排, 我们便证明了 f 具有所有阶的偏导数: 这些偏导数由级数表示, 而这些级数则是由对级数 (3) 进行逐项微分得到.

由阿贝尔引理, 这些级数在 U 的紧子集上一致收敛, 而它们的项对整个变量组为连续, 故而任何一个导数都是在 U 上 $\mathbb{R}$ – 可微的, 所以由对每个单独变量的导数的全纯性得到了该函数在 U 上的全纯性. □

注. 设函数 f 在 $\overline{U}$ 上连续, 并对每个单独变量为全纯. 于是它可由柯西积分表示 (参看定理 1 后面的注), 从而由定理 2, 它可用幂级数表示. 由定理 3 的证明看出, 函数 f 是 $\mathbb{C}$ – 可微的, 从而意味着在 U 上全纯. 因此, 为了证明在第 3 目谈及的哈托格斯基本定理, 则只要证明由函数 f 对每个单独变量在 $\overline{U}$ 的全纯性可推导出它在 $\overline{U}$ 中的连续性即可.

像通常那样, 还要证明函数展开成具已知中心的幂级数的唯一性定理.

定理 4. 如果在点 a 为全纯的函数 f 展开为形如 (3) 的幂级数, 则这个级数的系数由泰勒公式决定:

$$c_k=\frac{1}{k_1!\cdots k_n!}\frac{\partial^{k_1+\cdots+k_n}f}{\partial z_1^{k_1}\cdots\partial z_n^{k_n}}\Big|_{z=a}=\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}f}{\partial z^k}\Big|_{z=a},\tag{5}$$

其中 $k!=k_1!\cdots k_n!$.

对同一个系数利用公式 (4) 并对 (4) 中的积分进行估值, 我们得到

柯西不等式. 如果函数 $f\in\mathscr{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$, 且在骨架 Γ 上 $|f|\leqslant M$, 则 f 在点 a 的泰勒展式的系数满足不等式

$$|c_k|\leqslant M/r^k,\tag{6}$$

其中 $r^k=r_1^{k_1}\cdots r_n^{k_n}$.

在卷 I 第 22 目所阐述的唯一性定理的条件不能推广到空间中: 函数 z_1z_2 在 $\mathbb{C}^2$ 为全纯且不恒等于零, 但在其聚点集 (在复直线 $\{z_1=0\}$ 和 $\{z_2=0\}$ 上) 上化为零. 我们有

定理 5 (唯一性). 如果函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 及其所有偏导数在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中某个点 a 都化为零则在 D 上 $f\equiv0$.

证明. f 的泰勒展式的所有系数在 a 等于 0, 因此在此点的某个邻域中 $f \equiv 0$. 我们记 $E = \{z \in D : f(z) = 0\}$, 记 $\overset{\circ}{E}$ 为 E 的开核 (即 E 的内点集合). 集合 $\overset{\circ}{E}$ 为开且非空 (包含了 a); 因为 f 的所有导数均连续, 故 $\overset{\circ}{E}$ 又闭于 D. 于是 $\overset{\circ}{E} = D$. □

在此定理的证明中本质性的要求是 f 在点 a 的一个 $2n$ 维的邻域中为零. 甚至只在点的一个 $(2n-2)$ 维邻域为零, 一般来说, 也推导不出函数恒为零 (例如 $f(z) = z_n$ 在 $(2n-2)$ 维集合 $\{z \in \mathbb{C}^n : z_n = 0\}$ 上为零). 但是, 存在这样的情形, 当函数在一点的 n 维邻域化为零意味着此函数等于零:

如果函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 在点 $a \in D$ 的一个实邻域内为零, 即在集合 $\{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : |x - x^0| < r, y = y^0\}$ 为零, 则在 D 中 $f \equiv 0$.

证明. 在某个中心为 z^0 的多圆盘中函数 f 展成了级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z - z^0)^k.$$

在此令 $y = y^0$, 我们得到

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (x - x^0)^k \equiv 0$$

对所有 $x \in \{|x - x^0| < r\}$ 成立. 关于 $x^k = x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$ 微分上恒等式, 并令 $x = x^0$, 然后得到所有 $c_k = 0$. 由定理 5 得到在 D 上 $f \equiv 0$. □

定理 6 (极大模原理). 如果函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 和 $|f|$ 在某个点 $a \in D$ 达到极大值, 则在 D 中 f 恒为常数.

证明. 考虑通过点 a 的任意复直线 $l(\zeta) = a + \omega\zeta$. f 在此直线上的限制为函数 $\varphi_\omega(\zeta) = f \circ l(\zeta)$, 它在某个圆盘 $\{|\zeta| < \rho\}$ 上全纯而 $|\varphi_\omega|$ 当 $\zeta = 0$ 时达到极大. 由对单变量函数的极大模原理, $\varphi_\omega(\zeta) = c(\omega)$ 为常数, 此常数依赖于 ω. 但是 $\varphi_\omega(0) = f(a)$ 不依赖于 ω, 故而 $c(\omega) =$ 常数, 从而 f 在点 a 的邻域中为常数. 由定理 5, f 在 D 中为常数. □

如果 f 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中全纯并在 $\overline{D}$ 中连续, 则在边界 ∂D 上 $|f|$ 达到极大值. 但是当 $n > 1$ 时在 $\mathbb{C}^n$ 中存在这样的区域 D, 使得对所有 $f \in \mathscr{O}(D)$ 并在 $\overline{D}$ 连续时, $\max|f|$ 达到的点并非填满整个 ∂D, 而仅仅是它的某个子集. 称具这种性质的最小闭子集为区域 D 的*希洛夫* (Shilov) *边界*[1]. 更准确地说, 区域 D 的希洛夫边界是那样的闭子集 $S \subset \partial D$, 使得: 1) 对任意 $f \in \mathscr{O}(D)$, 它在 $\overline{D}$ 连续, 有

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z)| = \max_{z \in S} |f(z)|; \tag{7}$$

[1]格奥尔基 • 叶夫根尼也维奇 • 希洛夫 (1917 — 1975) 为莫斯科大学教授, 泛函分析方面的专家.

2) 具有性质 1) 的任意闭集 $\widetilde{S}$ 必包含 S.

例题.

(1) **球** $B=\{z\in\mathbb{C}^n:|z|<1\}$. 我们将证明这种情形下的希洛夫边界与其拓扑边界相同. 为此, 取任意点 $\zeta\in\partial B$ 并构造一个函数 f, 它在 B 中全纯, 在 $\overline{B}$ 中连续并且对所有 $z\in\overline{B}\backslash\{\zeta\}$, $|f(\zeta)|>|f(z)|$ 即可. 对埃尔米特内积 (z,ζ) 由布尼亚科夫斯基 – 施瓦茨 (Bunyakovskiĭ–Schwarz) 不等式, 我们有

$$\mathrm{Re}(z,\zeta)\leqslant|(z,\zeta)|\leqslant|z|,$$

因为 $|\zeta|=1$, 而且等式 $\mathrm{Re}(z,\zeta)=|z|=1$ 仅当在 $\overline{B}$ 中 $z=\zeta$. 所以函数 $f(z)=e^{(z,\zeta)}$ 具有所需的性质.

(2) **多圆盘** $U=\{z\in\mathbb{C}^n:\|z\|<1\}$. 其希洛夫边界仅由 $(2n-1)$ 维拓扑边界的 n 维部分构成, 就是说, 它与多圆盘的骨架重合. 为证明此论断, 我们考虑任意全纯于 U 且连续于 $\overline{U}$ 的函数 f. 首先我们注意到, 对任意固定的 $\zeta_n,|\zeta_n|=1$, 函数 $f('z,\zeta_n)$ 是多圆盘 $'U\subset\mathbb{C}^{n-1}$ 中 $'z$ 的全纯函数. 事实上, 它可以表示为函数序列 $\varphi_\mu('z)=f('z,z_n^{(\mu)})$ 的极限, 其中 $z_n^{(\mu)}$ 为圆盘 $\{|z_n|<1\}$ 上收敛于 ζ_n 的任一个点序列. 因为 $('z,z_n^{(\mu)})\in U$, 则所有的 φ_μ 全纯于 $'U$ 中, 而由于 f 在 $\overline{U}$ 上的一致连续性, 序列 φ_μ 在 $'\overline{U}$ 中一致收敛. 由魏尔斯特拉斯定理 (参看后面的定理 8) 得到了所要的论断. 以完全相同的方式可证明所有的函数 $f(z_1,\cdots,z_m,\zeta_{m+1},\cdots,\zeta_n)$ 在相应的多圆盘中对 $(z_1,\cdots,z_m)$ 全纯, 其中 $m=1,\cdots,n-1$ 且 $\zeta_{m+1},\cdots,\zeta_n$ 固定且模为 1.

设 $M=\max\limits_{z\in\overline{U}}|f(z)|$ 在某个点 $\zeta\in\partial U$ 实现, 它属于集合 $\Gamma^\nu=\{|\zeta_\nu|=1,|\zeta_\mu|\leqslant 1,\mu\neq\nu\}$ 中的一个; 在必要时可对变量重新编号, 不妨设它等于 Γ^n. 或者 $|\zeta_{n-1}|=1$ 或者由极大模原理 (按上面的证明应用于它), f 对变量 z_{n-1} 为常值, 于是在某个点达到了值 M, 而这个点的最后的两个坐标的模为 1. 继续这种讨论, 我们便得到了论断说, 在多圆盘的骨架 $\Gamma=\{|z_\nu|=1,\nu=1,\cdots,n\}$ 达到了 M. 因此, 多圆盘的希洛夫边界包含在 Γ 中.

然而对任意点 $\zeta\in\Gamma$, 可以找到全纯于 U 且连续于 $\overline{U}$ 的函数 f, 使得它对所有 $z\in\overline{U}\backslash\{\zeta\}$ 有 $|f(\zeta)|>|f(z)|$: 可以取乘积 $\prod\limits_{\nu=1}^{n}(1+\overline{\zeta}_\nu z_\nu)$ 为这样的函数. 所以, 多圆盘的希洛夫边界等于它的骨架.

(3) 在圆柱体 $C_+=\{y\in\mathbb{R}^4:y_{11}^2>y_{12}^2+y_{21}^2+y_{22}^2,y_{11}>0\}$ 上的管状区域 $T=\mathbb{R}^4(x)+iC_+$, 它像在第 2 目例 8 中所指出的, 等价于广义上半平面 H. 其边界 $\partial T=\{z=x+iy:x\in\mathbb{R}^4,y\in\partial C_+\}$ 被分层 (或被纤维化) 为复半直线 $\{z=x+\zeta y:(x,y)\in\partial T,\zeta\in\mathbb{C},\mathrm{Im}\,\zeta\geqslant 0\}$, 并且以与上一个例子同样的论证得到, 在 T 为全纯并在 $\overline{T}$ (在 $\mathbb{C}^4$ 中的闭包) 上连续的任意函数, 当 $\mathrm{Im}\,\zeta=0$ 时取得极大模, 即在集合 $\mathbb{R}^4(x)+i0$, 这个 T 的骨架上取得极大模. 另一方面, 对任意固定点 x^0+i0 存在函数 $f(z)=(z_{11}-x_{11}^0+i)^{-1}\cdots(z_{22}-x_{22}^0+i)^{-1}\in\mathscr{O}(T)\bigcap C(\overline{T})$ 在此点达到其

极大模. 因此, T 的希洛夫边界也是它的骨架.

定理 7 (刘维尔 (Liouville)). 如果函数 f 在 $\mathbb{C}^n$ 全纯并有界, 则其为常数.

证明. 像在卷 I 那样, 这可由柯西不等式得到. 函数 f 能被展成于任意多圆盘 $\{\|z\| < r\}$ 中收敛的多重幂级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k.$$

如果处处有 $|f(z)| \leqslant M$, 则由柯西不等式 (6), 对所有 r 有 $|c_k| \leqslant M/r^{|k|}$, 其中 $r_1 = \cdots = r_n = r$. 当 $r \to \infty$ 时取极限, 我们得到, 当 $|k| = k_1 + \cdots + k_n > 0$ 时有 $c_k = 0$, 即 $f(z) = c_0$. □

定理 8 (魏尔斯特拉斯). 设函数序列 $f_\mu \in \mathscr{O}(D)$ 在 D 的每个紧子集上一致收敛于函数 f, 于是 $f \in \mathscr{O}(D)$, 并且对任意 $k = (k_1, \cdots, k_n)$, 在任意 $K \Subset D$ 上有

$$\frac{\partial^{|k|} f_\mu}{\partial x^k} \to \frac{\partial^{|k|} f}{\partial x^k}. \tag{8}$$

证明. 由卷 I, 第 23 目知, 函数 f 在任意点 $z \in D$ 相对于每个单独的变量为全纯, 而因为它显然在 D 相对于整个变量组为连续, 则按照定理 3 后面的注解知道它属于 $\mathscr{O}(D)$. 对定理的第二部分只需对于任意点 $z^0 \in D$ 的邻域和对一个变量 z_ν 的导数去证明就足够了. 我们取多圆盘 $U = U(z^0, r) \Subset D$, 并利用柯西公式, 由此在任意点 $z \in U$ 有

$$\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} - \frac{\partial f}{\partial z_\nu} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f_\mu(\zeta) - f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta_\nu - z_\nu)} d\zeta, \tag{9}$$

其中 Γ 为 U 的骨架. 因为 $f_\mu \to f$ 在 Γ 上为一致的, 故对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 μ_0, 使得对所有 $\mu \geqslant \mu_0$ 有 $\|f_\mu - f\|_\Gamma < \varepsilon$. 如果 $K \Subset U$, 则由 (9) 我们对所有的 $z \in K$ 及 $\mu \geqslant \mu_0$ 有

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} - \frac{\partial f}{\partial z_\nu}\right| < \frac{\varepsilon}{(2\pi)^n} \frac{(2\pi)^n r_1 \cdots r_n}{\min\limits_{z \in K, \zeta \in \Gamma} |\zeta - z||\zeta_\nu - z_\nu|},$$

因此得出 $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \to \dfrac{\partial f}{\partial z_\nu}$ 在 K 上是一致的. □

在本目的最后, 我们要证明一个关于积分对参数的全纯依赖性的引理.

引理. 设 $\gamma_\mu : \zeta_\mu = \zeta_\mu(t)$ 为 ζ_μ – 平面中的一条可求长的曲线 $(\mu = 1, \cdots, m)$, $\gamma = \gamma_1 \times \cdots \times \gamma_m$, D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域; 设 $\zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_m)$ 和 $z = (z_1, \cdots, z_n)$. 如果函数 $g(\zeta, z)$ 在 $\gamma \times D$ 上连续, 相对 z 当 $\zeta \in \gamma$ 时在 D 上全纯, 并且在 $\gamma \times D$ 上有连续的偏导数 $\dfrac{\partial g}{\partial z_\nu}$, 于是积分

$$G(z) = \int_{\gamma_1} d\zeta_1 \cdots \int_{\gamma_m} g(\zeta, z) d\zeta_m = \int_\gamma g(\zeta, z) d\zeta \tag{10}$$

在 D 上全纯, 并且

$$\frac{\partial G}{\partial z_\nu}=\int_\gamma \frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_\nu}d\zeta, \quad \nu=1,\cdots,n. \tag{11}$$

证明. 对任意 $z\in D$ 我们选取 $r>0$ 使得多圆盘 $U(z,r)\subset D$; 设 $|h_\nu|<r, h=(0,\cdots,h_\nu,0,\cdots,0)\in\mathbb{C}^n$ 为一个向量, 其坐标除第 ν 个外全为 0. 我们有

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_\nu}(G(z+h)-G(z))\\&=\frac{1}{h_\nu}\int_\gamma\{g(\zeta,z+h)-g(\zeta,z)\}d\zeta=\int_\gamma d\zeta\int_0^1\frac{\partial g(\zeta,z+\theta h)}{\partial z_\nu}d\theta,\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&\frac{1}{h_\nu}\{G(z+h)-G(z)\}-\int_\gamma\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_\nu}d\zeta\\&=\int_\gamma d\zeta\int_0^1\left\{\frac{\partial g(\zeta,z+\theta h)}{\partial z_\nu}-\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_\nu}\right\}d\theta.\end{aligned} \tag{12}$$

由于 $\dfrac{\partial g(\zeta,z+\theta h)}{\partial z_\nu}$ 当 z 固定时在紧集 $\gamma\times[0,1]$ 上一致连续, 于是对任意 $\varepsilon>0$ 可以选取 $\delta>0$ 充分小, 使得对所有 $(\zeta,\theta)\in\gamma\times[0.1]$, 当 $|h|<\delta$ 时有

$$\left|\frac{\partial g(\zeta,z+\theta h)}{\partial z_\nu}-\frac{\partial g(\zeta,z)}{\partial z_\nu}\right|<\varepsilon.$$

因此, 逐次对 (12) 的右端进行估值, 我们发现这个等式的左端的模不超过 $\varepsilon|\gamma_1|\cdots|\gamma_m|$. 于是在每个点 $z\in D$ 所有的偏导数 $\dfrac{\partial G}{\partial z_\nu}$ 存在且以公式 (11) 表达. □

6. 哈托格斯基本定理

在这里我们要证明的定理是, 由函数对每个单独变量的全纯性推出它对整体变量的全纯性; 关于这个定理我们已在第 3 目谈到过. 在第 5 目我们曾明确, 为了证明这个定理, 只需证明对任意相对于单个变量为全纯的函数, 则它对于整个变量组为连续即可.

为了证明它, 我们先需要一些引理. 其中第一个论断是要建立所考虑函数的有界性. 这时我们要利用施瓦茨引理, 但其形式比卷 I 第 37 目更为广泛:

设函数 φ 在圆盘 $U_r=\{|z|<r\}\subset\mathbb{C}$ 中为全纯, 又在某点 $z_0\in U_r$ 有 $\varphi=0$, 并且在 U_r 处处成立 $|\varphi|\leqslant M$; 于是在整个 U_r 中

$$|\varphi(z)|\leqslant Mr\frac{|z-z_0|}{|r^2-\overline{z}_0z|} \tag{1}$$

(当 $r=M=1$ 和 $z_0=0$ 时我们便得到通常的表述).

为了证明此不等式, 我们应用由 U_r 到单位圆盘 U 的线性分式映射:

$$\lambda : z \mapsto r\frac{z-z_0}{r^2-\overline{z}_0 z},$$

并以 λ^{-1} 表示逆映射 $U \to U_r$, 再考虑函数 $\psi = \frac{1}{M}\varphi\circ\lambda^{-1}$. 它满足通常的施瓦茨引理, 按此引理对 U 中每个点成立 $|\psi(z)| \leqslant |z|$. 以 $\lambda(z)$ 替换这里的 z 便得到了不等式 (1).

引理 1. 如果函数 f 对每个单独的变量 z_ν 在 $U = U(a,r)$ [1] 中全纯, 并且有界, 则它在 U 中每个点对整个变量组连续.

证明. 设 $z^0, z \in U$ 为任意点; 我们把 f 的增量写成对各个不同坐标的增量的和

$$\begin{aligned} &f(z) - f(z^0) \\ &= \sum_{\nu=1}^{n}\{f(z_1^0,\cdots,z_{\nu-1}^0,z_\nu,\cdots,z_n) - f(z_1^0,\cdots,z_\nu^0,z_{\nu+1},\cdots,z_n)\} \end{aligned} \tag{2}$$

并考虑将第 ν 项看成是变量 z_ν 的函数 φ_ν, 但此时我们将其他的变量固定. 如果在 U 中 $|f| \leqslant M/2$, 则函数 φ_ν 只满足前面所提到的那种形式的施瓦茨引理的条件, 并对和 (2) 中每一项应用不等式 (1), 于是我们得到

$$|f(z) - f(z^0)| \leqslant M\sum_{\nu=1}^{n} r_\nu \frac{|z_\nu - z_\nu^0|}{|r_\nu^2 - \overline{z}_\nu^0 z_\nu|}.$$

因此论断得到证明. □

因此, 要证明哈托格斯定理还需证明对于每个单独的变量为全纯的函数必在某个中心为 a 的多圆盘中是有界的. 我们知道, 在任意一个中心不一定在 a 的圆盘中的有界性可由 f 对每个单独变量的连续性推出. 这个事实构成了被称做奥斯古德 (Osgood) 引理的内容:

引理 2. 我们将多圆盘 $U = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < R\}$ 表示为 $'U = \{'z \in \mathbb{C}^{n-1} : \|'z\| < R\}$[2] 与圆盘 $U_n = \{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| < R\}$ 的乘积. 如果函数 $f('z, z_n)$ 当任意 $z_n \in \overline{U}_n$ 时对属于 $'\overline{U}$ 的 $'z$ 为连续, 并且当任意 $'z \in '\overline{U}$ 时对属于 $\overline{U}_n$ 的 z_n 为连续, 则存在多圆盘 $W = 'W \times U_n \subset U$ 使 f 在其上有界 (参看图 6 上的哈托格斯图).

证明. 对于固定的 $'z \in '\overline{U}$ 记

$$M('z) = \max_{z_n \in \overline{U}_n} |f('z, z_n)|,$$

[1] 这表明, 对任意 $a \in U$ 和任意 $\nu = 1,\cdots,n$, 函数 $f(a_1,\cdots,a_{\nu-1},z_\nu,a_{\nu+1}.\cdots,a_n)$ 对变量 z_ν 全纯, 其中 z_ν 在圆盘 $\{|z| < r_\nu\} \subset \mathbb{C}$.

[2] 我们记得, 我们曾以 $'z = (z_1,\cdots,z_{n-1})$ 表示点 $z \in \mathbb{C}^n$ 在 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的投影.

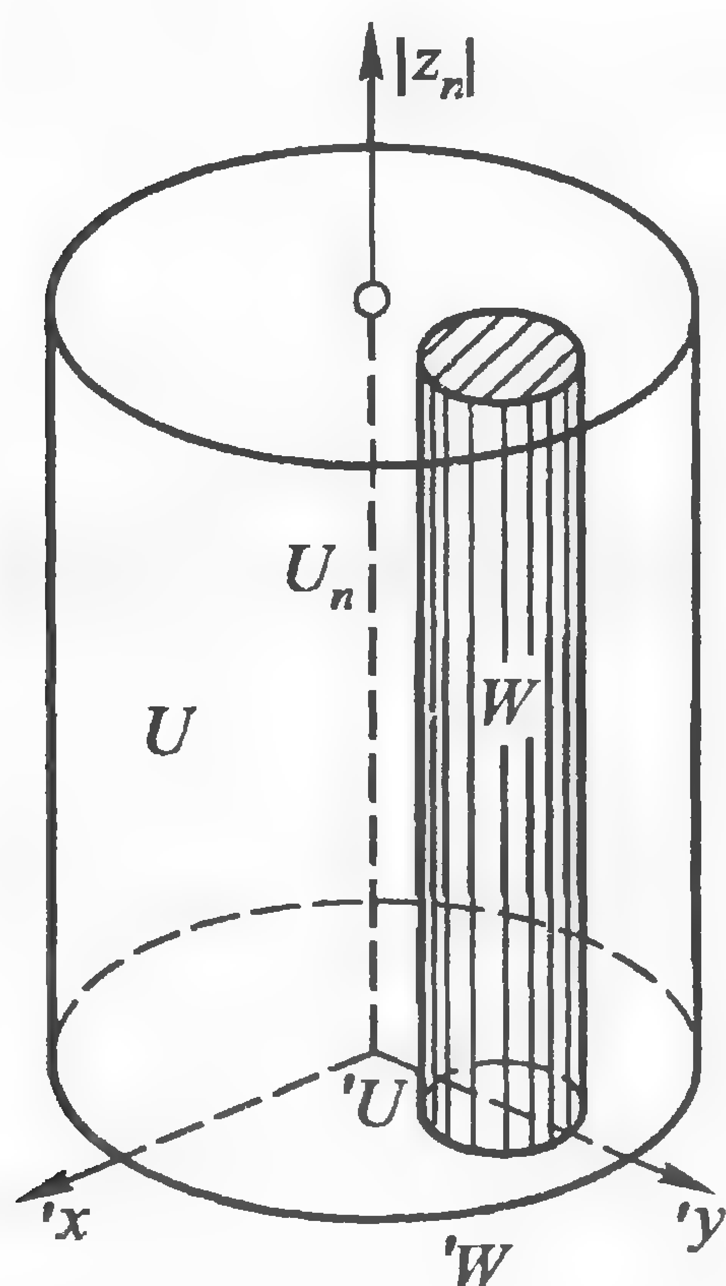


图 6

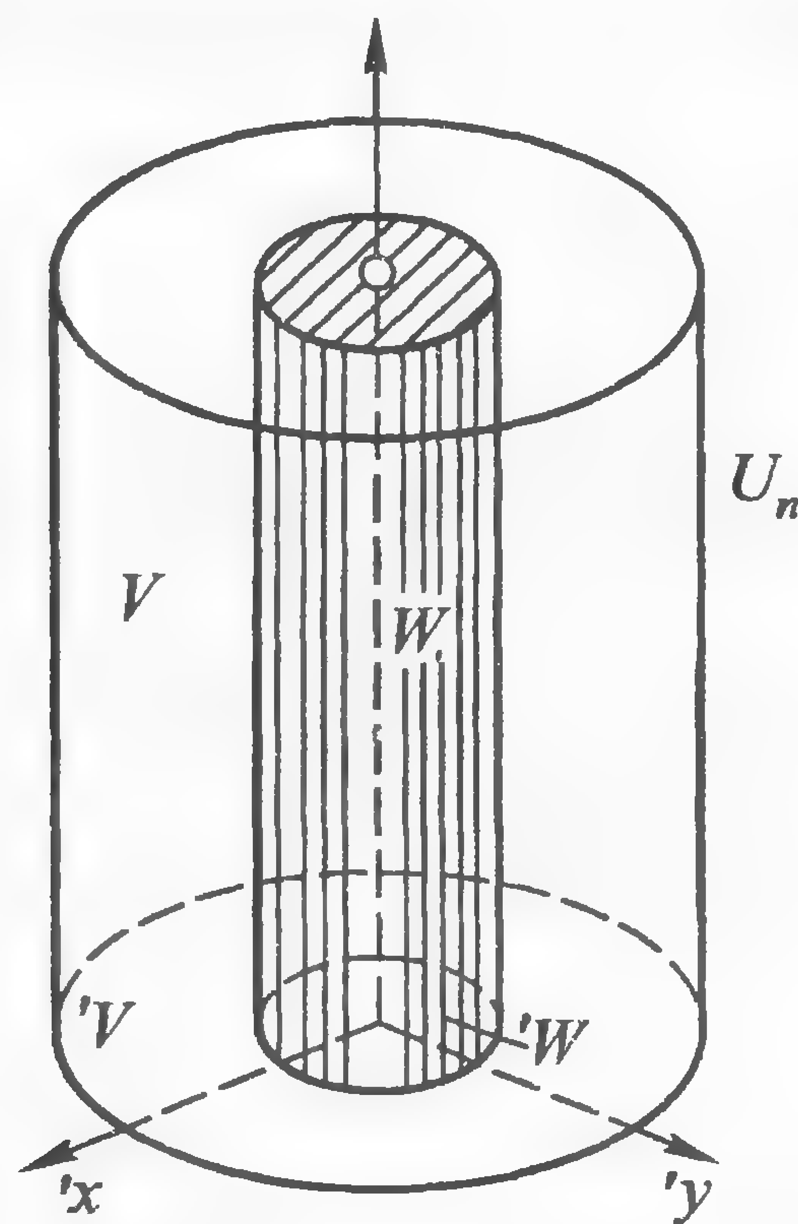


图 7

并考虑集合 $E_m = \{'z \in '\overline{U} : M('z) \leqslant m\}$. 这些集合为闭. 因为如果 $'z^{(\mu)} \in E_m$ ($\mu = 1, 2, \cdots$) 且 $'z^{(\mu)} \to 'z$, 从而有 $'z \in E_m$ (事实上, $|f('z^{(\mu)}, z_n)| \leqslant m$ 对任意 $z_n \in \overline{U}_n$ 成立, 由于 f 为 $'z$ 的连续函数. 故对任意 $z_n \in \overline{U}_n$ 有 $|f('z, z_n)| \leqslant m$, 即 $M('z) \leqslant m$). 显然, E_m 构成一个递增序列, 且任意点 $'z \in '\overline{U}$ 属于所有 E_m, 它由某个元开始.

存在一个包含了某个区域 $'G \subset 'U$ 的 E_M. 事实上, 如若不然, 所有 E_m 将无处稠密, 于是在 $'U$ 中存在一个球 $\overline{B}^1 \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 不包含 E_1 中的点, 在 B^1 中存在球 $\overline{B}^2$, 它不含 E_2 中的点, 等等. 于是我们构造了球的序列 $\overline{B}^k \subset \mathbb{C}^{n-1}$, 它们具有一个公共点 $'z^0 \in '\overline{U}$, 而它却属于某一个 E_m.

因此, 存在区域 $'G$, 在其中对任意的 $z_n \in U_n$ 有 $|f('z, z_n)| \leqslant M$. 继续在 $'G$ 中选取一个多圆盘 $'W = \{'z : \|'z - 'z^0\| < r\}$, 从而在 $W = 'W \times U_n$ 中有 $|f| \leqslant M$. □

为了证明在中心为 a 的多圆盘中函数 f 的有界性, 必须要利用对每个单独变量的全纯性. 于是我们需要哈托格斯引理, 它实质上基于函数的次调和性质. 为了对它进行阐述, 我们引进如下记号: $'V = U('a, R), 'W = U('a, r)$ (r 和 R 为 $r < R$ 的标量), $U_n = \{|z_n| < R\}, V = 'V \times U_n, W = 'W \times U_n$ (图 7).

引理 3. 如果函数 $f('z, z_n)$ 在任意 $z_n \in \overline{U}_n$ 时对 $'z \in '\overline{V}$ 全纯, 并对 $z \in \overline{W}$ 全纯, 则它在整个多圆盘 $\overline{V}$ 全纯.

证明. 不失一般性我们假定 $'a = '0$. 对任意固定的 $z_n \in U_n$ 和任意 $'z \in 'V$, 函数 f 可表示为 (由于对 $'z$ 的全纯性) 收敛的幂级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z_n)('z)^k, \tag{3}$$

其中 $k=(k_1,\cdots,k_{n-1})$. 这个级数的系数

$$c_k(z_n)=\frac{1}{k!}\frac{\partial^{|k|}f('0,z_n)}{(\partial' z)^k}$$

作为对 z_n 的全纯函数的导数 (在点 $('0,z_n)\in W$) 在圆盘 U_n 为全纯. 故而函数 $\frac{1}{|k|}\ln|c_k(z_n)|$ 在 U_n 中为次调和.

我们选取任意一个数 $\rho<R$; 因为当 $|k|\to\infty$ 时, 对任意 $z_n\in U_n$ 有

$$|c_k(z_n)|\rho^{|k|}\to 0,$$

于是对任意 $z_n\in U_n$ 可找到 $|k|$, 在其之后有 $\frac{1}{|k|}\ln|c_k(z_n)|+\ln\ \rho\leqslant 0$, 即

$$\varlimsup_{|k|\to\infty}\frac{1}{|k|}\ln|c_k(z_n)|\leqslant\ln\frac{1}{\rho}. \tag{4}$$

现在我们要利用 f 在 $\overline{W}$ 中的全纯性: f 有界于 $\overline{W}$ (设 $|f|\leqslant M$) 且对任意 $z_n\in U_n$ 柯西不等式 $|c_k(z_n)|r^{|k|}\leqslant M$ 成立. 故而对任意 $z_n\in U_n$ 及任意 $|k|$ 有

$$\frac{1}{|k|}\ln|c_k(z_n)|\leqslant\ln\frac{M^{\frac{1}{|k|}}}{r}\leqslant A. \tag{5}$$

于是, 所考虑的次调和函数满足关于上极限定理的条件 (参看卷 I 第 3 目的附录). 由此定理, 对任意 $\sigma<\rho$ 可以找到序号 k_0 使得对所有 $|k|>|k_0|$ 及所有 $z_n,|z_n|\leqslant\sigma$ 有 $\frac{1}{|k|}\ln|c_n(z_n)|\leqslant\ln\frac{1}{\sigma}$, 即

$$|c_k(z_n)|\sigma^{|k|}\leqslant 1.$$

由此得到, 级数 (3) 一致收敛于多圆盘 $\overline{U}(0,\sigma'),\sigma'<\sigma$, 然而此级数的项对 z 连续, 从而其和 f 也连续, 因此在 $U(0,\sigma')$ 中有界. 这个圆盘可假定能任意地接近 V, 于是因为 V 从一开始就可以增大一点点 [1], 从而 f 有界, 这表示由引理 1 和第 5 目的注解 (在定理 5 之后) 知道它在 $\overline{V}$ 中全纯. □

现在对基本定理的证明已做好全部的准备.

哈托格斯定理. 如果函数 f 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的任意点对变量中每个 z_ν 为全纯, 则其在 D 中全纯.

证明. 只需证明 f 在任意点 $z^0\in D$ 的全纯性, 同时不失一般性可设 $z^0=0$. 因此, 设 f 在多圆盘 $\overline{U(0,R)}$ 对每个单独的变量全纯; 需要证明它在以 0 为中心的某个多圆盘内全纯.

[1] 此引理的假设需要在闭圆盘中的全纯性.

这个论断可以对复变量的个数用归纳法证明. 在一个变量的情形这是平凡的; 我们假设它对 $(n-1)$ 个变量的情形论断为真, 并记 $'U = U\left('0, \dfrac{R}{3}\right)$. 由此假定得知函数 $f('z, z_n)$ 在 $'\overline{U}$ 中对 $'z$ 连续, 其中 $z_n \in \overline{U}_n = \{|z_n| \leqslant R\}$; 同时当 $'z \in {'\overline{U}}$ 为任意时, 它对在 $\overline{U}_n$ 中的 z_n 连续. 由奥斯古德引理知道 f 有界, 这表明在某个多圆盘 $\overline{W} = {'\overline{W}} \times \overline{U}_n$ 中 f 为全纯, 其中 $'\overline{W} = U('a, r) \subset {'U}$ (图 8).

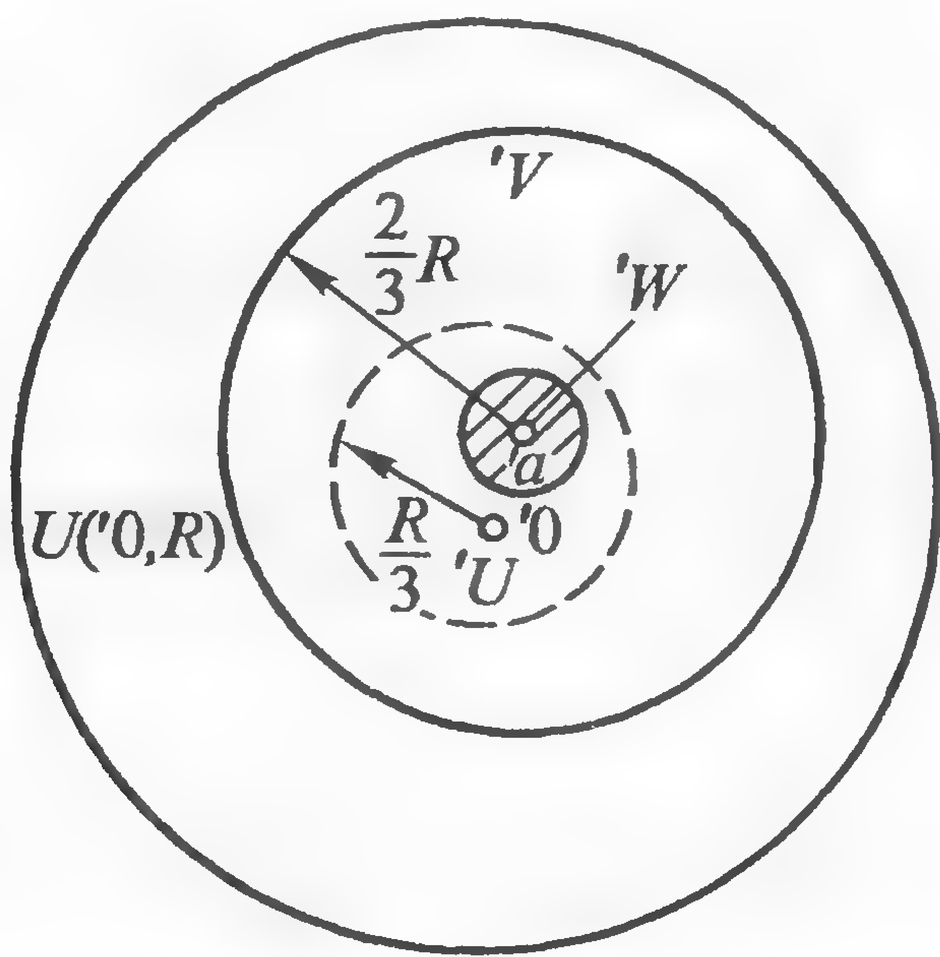


图 8

现在考虑多圆盘 $V = {'V} \times U_n$, 其中 $'V = U\left('a, \dfrac{2}{3}R\right)$. 显然, $\overline{V} \subset \overline{U(0, R)}$, 从而当 $z_n \in \overline{U}_n$ 为任意时, f 在 $'\overline{V}$ 中对 $'z$ 为全纯, 然而所证明的只是在 $\overline{W}$ 中对 z 的全纯性. 从哈托格斯引理则可得出它在包含了点 $z = 0$ 的多圆盘 V 上对 z 全纯. 那么对 n 个变量的这个论断便得到了证明. □

我们还要引进哈托格斯的另一种阐述.

我们说函数 f 在黎曼的意义下在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 为全纯是指, 如果

(R) 如果 f 在某个多圆盘 $U(a, r)$ 中对每个单独的变量 z_ν 为全纯.

我们说函数 f 在魏尔斯特拉斯意义下在此点为全纯是指, 如果

(W) f 在某个多圆盘 $U(a, r)$ 可展开为幂级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k.$$

蕴涵关系 (W)⇒(R) 是显见的, 而蕴涵 (R)⇒(W) 构成了哈托格斯基本定理的内容. 这个定理从而可阐述为:

黎曼意义下的全纯性与魏尔斯特拉斯意义下的全纯性等价.

§3. 展开为幂级数

在这里我们将考虑另一个基本问题, 即关于将全纯函数展开为幂级数.

7. 幂级数

在第 5 目中我们已证明, 在多圆盘 $U(a,r)$ 中全纯的任意函数可以在此区域中展开为中心在 a 的多重幂级数. 出现的问题是有关这种级数的收敛点的集合. 类比于单变量函数的情形人们期待这个集合会是补充边界上某种点集的多圆盘. 但是, 甚至简单的例子也表明事情完全并非如此.

例题.

(1) 幂级数

$$\frac{1}{1-z_1z_2}=\sum_{\mu=0}^{\infty}z_1^{\mu}z_2^{\mu} \tag{1}$$

(μ 为整数指标) 在 $\mathbb{C}^2$ 中的收敛集合为一个完全赖因哈特区域 $\{|z_1z_2|<1\}$.

(2) 使级数

$$\frac{z_1}{(1-z_1)(1-z_2)}=\sum_{|k|=0}^{\infty}z_1^{k_1+1}z_2^{k_2} \tag{2}$$

在 $\mathbb{C}^2$ 中的收敛集合为双圆盘 $\{|z_1|<1,|z_2|<1\}$ 及一条附加的复直线 $\{z_1=0\}$.

如果不去考虑收敛集合而考虑它的开核, 即此集合的内点集, 则问题得以简化.

定义. 幂级数

$$\sum_{|k|=0}^{\infty}c_k(z-a)^k \tag{3}$$

的项在某个排序下, 级数收敛点 $z\in\mathbb{C}^n$ 的集合 S 的开核 $\overset{\circ}{S}$, 称为该幂级数的收敛区域.

由阿贝尔引理 (第 5 目) 推导出

定理 1. 如果点 z^0 属于级数 (3) 的收敛区域 $\overset{\circ}{S}$, 则多圆盘 $\overline{U}=\{z\in\mathbb{C}^n: |z_\nu-a_\nu|\leqslant|z_\nu^0-a_\nu|\}$ 也属于 $\overset{\circ}{S}$, 并且级数 (3) 在 $\overline{U}$ 绝对和一致收敛.[1)]

证明. 因为 $z^0\in\overset{\circ}{S}$ 而 $\overset{\circ}{S}$ 为开集, 故存在 $\zeta\in\overset{\circ}{S}$ 使得 $|\zeta_\nu-a_\nu|>|z_\nu^0-a_\nu|,\nu=1,\cdots,n$, 而且级数 (3) 在此点收敛. 又因为 $U\Subset\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu-a_\nu|<|\zeta_\nu-a_\nu|\}$, 那么由阿贝尔引理, (3) 在 $\overline{U}$ 中绝对和一致收敛. □

定理 1 还可以这样阐述: 级数 (3) 的收敛区域 $\overset{\circ}{S}$ 是中心在 a 的完全赖因哈特区域. 因此, 完全赖因哈特区域在多复变函数的情形所起的作用与单复变函数时的圆盘一样. 这种相似性在下面的定理中得到了强调.

1) 由定理 1 可推导出集合 $\overset{\circ}{S}$ 为连通: 它的任意两个点 z' 和 z'' 都可以与中心以折线相连接 (意味着两点相互连接), 而这些折线属于 $\overset{\circ}{S}$. 因为 $\overset{\circ}{S}$ 还是个开集, 故它实际上是个区域.

定理 2. 在以 a 为中心的完全赖因哈特区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中全纯的任意函数 f 在此区域中有泰勒展开

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k. \tag{4}$$

证明. 设 z^0 为 D 中任意点, 以及多圆盘 $\overline{U} = \{|z_\nu - a_\nu| \leqslant |z_\nu^0 - a_\nu|\} \Subset D$, 并且由第 5 目定理 2, 函数 f 在 U 中可由中心在 a 的泰勒级数表示. 这个级数的系数可通过 f 在 a 的导数进行计算, 就是说等于 c_k, 即与 (4) 的展式相同. □

自然产生的问题是: 是否任意完全赖因哈特区域都是某个幂级数的收敛区域? 对此的回答是否定的, 因为就像我们就要证明的那样, 收敛区域还具有其他的额外性质.

定义. 以

$$z \mapsto \lambda(z) = (\ln|z_1|, \cdots, \ln|z_n|) \tag{5}$$

表示集合 $\{z \in \mathbb{C}^n : z_1 \cdots z_n \neq 0\}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 中的映射; 我们称集合 $M^* = \lambda(M_0)$ 为集合 $M \subset \mathbb{C}^n$ 的对数像, 其中的 $M_0 = \{z \in M : z_1 \cdots z_n \neq 0\}$. 称集合 M 为对数凸集是说其对数像为 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集.

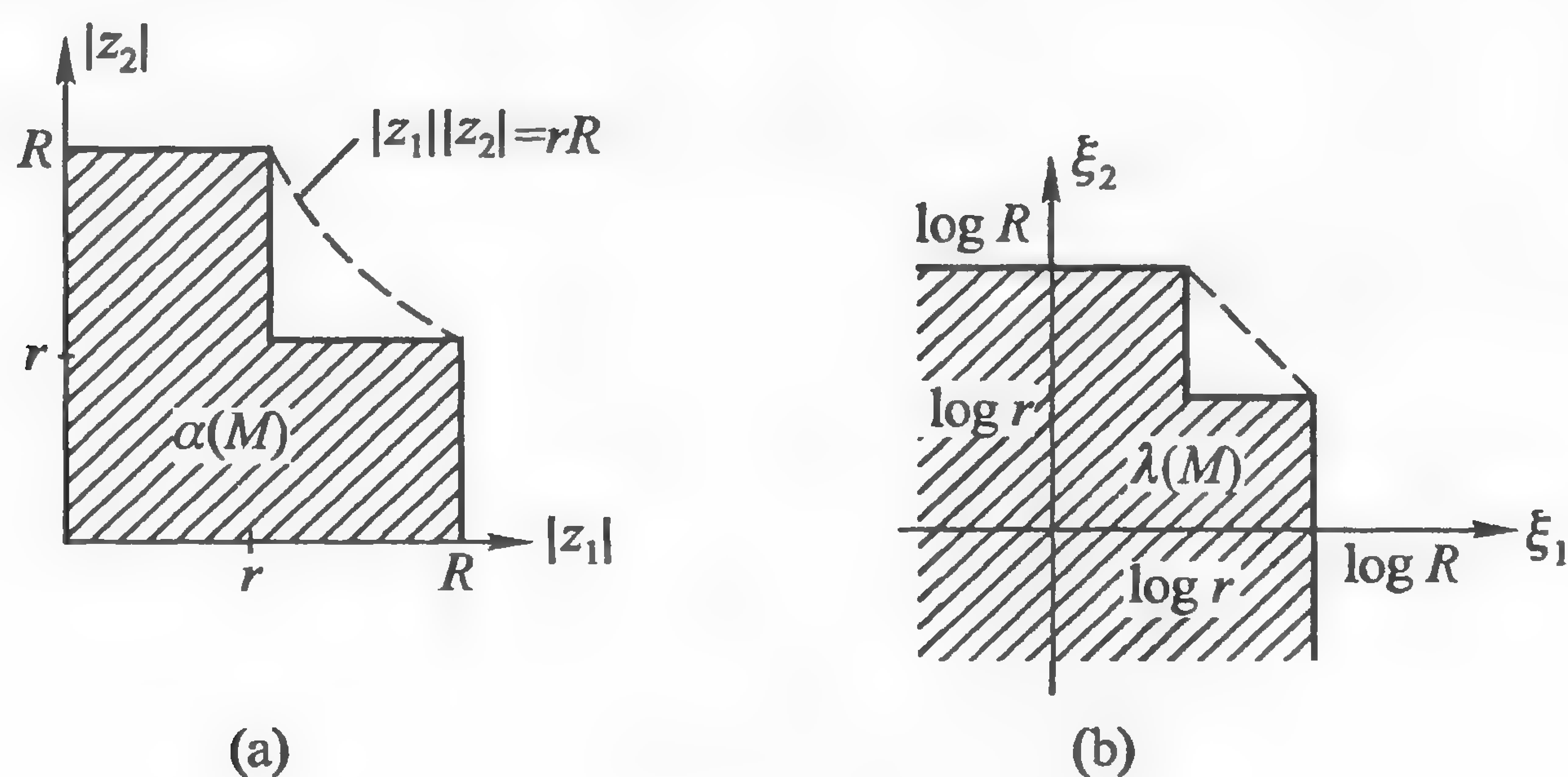


图 9

例题. 显示在图 9 (a) 中的赖因哈特图 $\alpha(M)$ 的集合 $M \subset \mathbb{C}^2$ 不是对数凸的; 它的对数像 $\lambda(M)$ [1] 被图 9(b) 表出. M 的对数凸包 (即所有包含 M 的对数凸集的交) 可以通过考虑集合 $\lambda(M)$ 的凸包的原像得到. 这个凸包 $\widehat{M}_L$ 的赖因哈特图与 $\alpha(M)$ 相差的是由双曲线的一段 $|z_1||z_2| = rR$ 所包围的一块 (图 9 上虚线表示了这条曲线段).

定理 3. 幂级数 (3) 的收敛区域 $\overset{\circ}{S}$ 为对数凸集.

[1] 为简单起见, 我们把 $\lambda(M_0)$ 写成 $\lambda(M)$.

证明. 不失一般性, 设 $a=0$. 我们需要证明 $S^*=\lambda(S^0)$ 为凸集. 设 $\ln|z'|, \ln|z''| \in S^*$, 而点 $z\in\mathbb{C}^n$ 使得 $\ln|z| = t\ln|z'|+(1-t)\ln|z''|, 0<t<1$, 即 $|z|=|z'|^t\cdot|z''|^{1-t}$. 因为 $z', z''\in \overset{\circ}{S}$, 故级数 (3) 在这两个点收敛从而它的项为有界: 设 $|c_k(z')^k|\leqslant M_1, |c_k(z'')^k|\leqslant M_2$. 然而 $|c_kz^k|=|c_k(z')^k|^t\cdot|c_k(z'')^k|^{1-t}\leqslant M_1^tM_2^{1-t}$, 即级数 (3) 的项在 z 也有界. 由于 $\overset{\circ}{S}$ 的开性, 对于靠近 z' 和 z'' 的点相同的论断也成立, 这表明级数 (3) 的项在所有靠近 z 的点有界. 由阿贝尔引理知 $z\in\overset{\circ}{S}$. □

以后我们将证明这个附加的性质甚至刻画出了收敛区域的特性: 任何对数凸的完全赖因哈特区域是某个幂级数的收敛区域 (参看第 40 目).

但现在我们来考察一个重要的情形. 考虑完全的然而并非对数凸的赖因哈特区域 (譬如, 上面所给出的例题). 由定理 2 知, 任意函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 可以用 D 中的幂级数表示. 然而根据定理 3, 这个级数的收敛区域为对数凸, 从而它至少在区域 D 的对数凸包 $\widehat{D}_L$ 中收敛. 因而这个级数的和实现了 f 从 D 到 $\widehat{D}_L$ 的一个解析延拓. 我们观察到主要区别于平面的空间情形的一个结果: 在 $\mathbb{C}^1$ 中任意区域是某个函数的全纯 (区) 域 (参看卷 I 第 46 目), 而在 $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中存在区域, 使区域中每个全纯函数一定能解析延拓到更大的区域. 我们将在第 Ⅲ 章中详细考虑这个必定会出现的解析延拓的现象.

我们现在来引进一个描述已知幂级数 (3) 的收敛区域 $\overline{S}$ 还要更具构造性的方法. 它使用了多圆盘去穷竭这个区域, 称其为收敛多圆盘. 例如, 对于级数 (1), 它的收敛区域为 $\overset{\circ}{S}=\{z\in\mathbb{C}^2:|z_1z_2|<1\}$, 而那样的多圆盘为 $\left\{|z_1|<r_1, |z_2|<\dfrac{1}{r_1}\right\}, 0<r_1<\infty$ (图 10). 引进确切的定义:

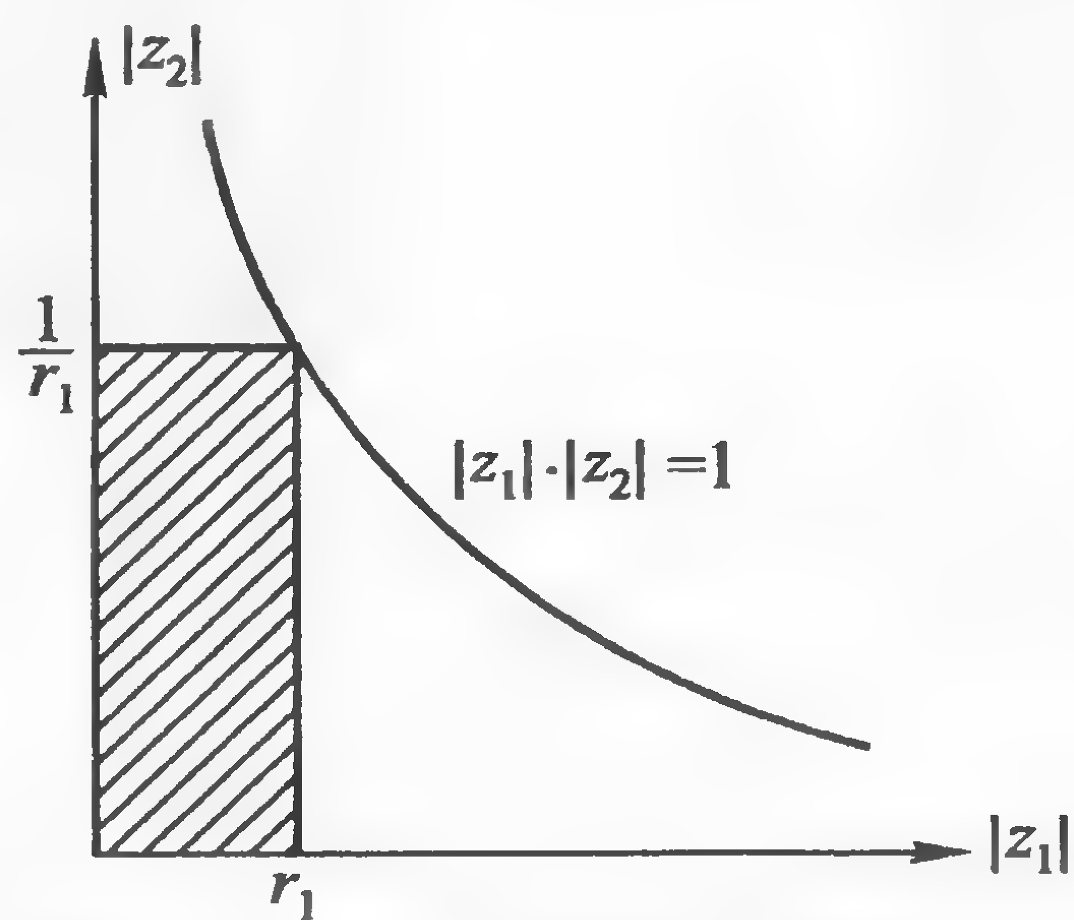


图 10

定义. 称多圆盘 $U(a,r)$ 为级数 (3) 的**收敛多圆盘**是说, 如果 $U\subset\overline{S}$, 但在任意多圆盘 $\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu-a_\nu|<r'_\nu\}, r'_\nu\geqslant r_\nu$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 中至少有一个为严格的不等式时, 则存在点, 使级数 (3) 在这些点发散. 称这个多圆盘的半径 r_ν 为**共轭收敛半径**.

定理 4. 级数 (3) 的共轭收敛半径满足关系式

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty}} \sqrt[|k|]{|c_k|r^k} = 1 \tag{6}$$

(柯西 – 阿达马 (Cauchg–Hadamard) 公式的空间类比).

证明. 令 $z = a + \zeta r, \zeta \in \mathbb{C}$ (即 $z_\nu = a_\nu + \zeta r_\nu$); 当 $|\zeta| < 1$ 时点 z 属于收敛多圆盘 U, 于是级数 (3) 在 U 中绝对收敛, 而且在对项的重组后有

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} |c_k|(z-a)^k = \sum_{|k|=0}^{\infty} |c_k|r^k \zeta^{|k|} = \sum_{\mu=0}^{\infty} \left(\sum_{|k|=\mu} |c_k|r^k \right) \zeta^\mu.$$

我们得到了一个按 ζ 的幂展开的级数, 它在 $|\zeta| < 1$ 时收敛. 当 $|\zeta| > 1$ 时此级数发散, 不然的话, 由第 5 目的阿贝尔引理, 该级数将会在包含 U 的某个多圆盘中收敛. 于是由对一个变量级数的柯西 – 阿达马公式得到

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{\sum_{|k|=\mu} |c_k|r^k} = 1. \tag{7}$$

在级数 (3) 中满足 $|k| = \mu$ 的这一组项中, 我们选取一个最大的项 $|c_m|r^m = \max\limits_{|k|=\mu} |c_k|r^k$. 利用一个显见的估值

$$|c_m|r^m \leqslant \sum_{|k|=\mu} |c_k|r^k \leqslant (\mu+1)^n |c_m|r^m$$

以及当 $\mu \to \infty$ 时 $(\mu+1)^{n/\mu} \to 1$, 我们可将 (7) 重记为下面的形式

$$\overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|c_m|r^m} = 1,$$

它等价于 (6). □

关系式 (6) 可以写为一个方程的形式:

$$\Phi(r_1, \cdots, r_n) = 0, \tag{8}$$

它是级数 (3) 的共轭收敛半径间的一个关联关系; 这个方程定义了区域 $\alpha(\overset{\circ}{S})$ 的边缘, 其中 $\alpha(\overset{\circ}{S})$ 是收敛区域 $\overset{\circ}{S}$ 映成的赖因哈特图.

在 (8) 中令 $r_\nu = e^{\xi_\nu}$, 我们得到方程

$$\Psi(\xi_1, \cdots, \xi_n) = 0, \tag{9}$$

它定义了 $\overset{\circ}{S}$ 的对数像 $\lambda(\overset{\circ}{S})$ 的边界, 其中 $\lambda(\overset{\circ}{S})$ 是空间 $\mathbb{R}^n$ 中的某个凸区域.

8. 其他的级数

除了幂级数外, 在多复变论中还考虑了其他类型的级数. 其中最重要的是称做哈托格斯级数的. 考虑幂级数

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z-a)^k \tag{1}$$

并且我们在其收敛区域 $\overset{\circ}{S}$ 中的任意点 z 上重组此级数的项, 按照差 $z_\nu - a_\nu$, 譬如第 n 个差的相同幂放在一起 (由绝对收敛性这是可行的). 我们有级数

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu('z)(z_n-a_n)^\mu, \tag{2}$$

其中 μ 为标量指标, 而它的系数 g_μ 在 $'\overset{\circ}{S}$ 中全纯, 这是区域 $\overset{\circ}{S}$ 在空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的投影.

我们留意到, 这种级数项的重组可能导致收敛区域的扩充. 例如, 幂级数

$$\frac{1}{(1-z_1)(1-z_2)} = \sum_{|k|=0}^{\infty} z_1^{k_1} z_2^{k_2}$$

收敛于双圆盘 $\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$. 在重组项后我们得到级数

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left(\sum_{k_1=0}^{\infty} z_1^{k_1}\right) z_2^\mu = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{z_2^\mu}{1-z_1},$$

它在区域 $\{z_1 \neq 1, |z_2|<1\}$ 收敛.

定义. 如果级数 (2) 的系数 g_μ 为 $'z=(z_1,\cdots,z_{n-1})$ 的全纯函数, 那么称级数 (2) 为以 $\{z_n=a_n\}$ 为中心平面的**哈托格斯级数**. 点 $('z,z_n)$ 的集合的开核 $\overset{\circ}{H}$ 被称做级数 (2) 的**收敛域**是说, 级数 (2) 的系数 $g_\mu('z)$ 在点 $'z$ 全纯而该级数在点 z_n 收敛.

因为与哈托格斯级数的收敛区域 $\overset{\circ}{H}$ 中的点 z^0 一起的还有属于它的所有点 $z=('z^0,z_n)$, 其中 $|z_n-a_n|\leqslant|z_n^0-a_n|$, 故 $\overset{\circ}{H}$ 总是以 $\{z_n=a_n\}$ 为对称平面的完全哈托格斯区域, 即形如 $\{('z,z_n):'z\in{}'D, |z_n-a_n|<R('z)\}$ 的区域; 称函数 $R('z)$ 为**哈托格斯半径**.[1)]

[1)]哈托格斯半径 $R('z)$ 不同于把级数 (2) 看做 z_n-a_n 的幂级数时的收敛半径 $r('z)$, 这是因为我们从收敛集合 H 要过渡到它的开核 $\overset{\circ}{H}$, 而函数 $r('z)$ 则由柯西 – 阿达马公式定义:

$$1/r('z) = \overline{\lim_{\mu\to\infty}} \sqrt[\mu]{|g_\mu('z)|},$$

它可能不是下半连续的, 从而集合 $\{'z\in{}'D:|z_n-a_n|<r('z)\}$ 可能不是开的. 不难看出, R 是 r 的下半连续的正则化:

$$R('z) = \underline{\lim_{'\zeta\to'z}} r('\zeta).$$

这个区域对哈托格斯级数所起的作用等同于赖因哈特区域对幂级数所起的作用. 特别地, 成立

定理 1. 在以 $\{z_n = a_n\}$ 为对称平面的完全哈托格斯区域 D 中全纯的任意函数 f 在 D 中可表示为

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} g_\mu('z)(z_n - a_n)^\mu, \tag{3}$$

其系数在此区域的投影 $'D \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 中全纯.

证明. 与区域 D 中每点 z^0 一起的还有多圆盘 $U = 'U \times U_n$ 也属于它, 其中 $'U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 为中心在点 z^0 的投影 $'z^0$ 的充分小的多圆盘, 而 $U_n \subset \mathbb{C}$ 为中心在 a_n 的包含点 z_n^0 的圆盘. 在 U 中函数 f 在任意 $'z \in 'U$ 下对 z_n 全纯, 从而展开为系数是

$$g_\mu('z) = \frac{1}{\mu!}\frac{\partial^\mu f('z, a_n)}{\partial z_n^\mu}$$

的级数 (3).

但是这些系数被定义和全纯于不仅在 $'U$ 中, 而是在区域 D 的整个投影 $'D$ 中, 所以展开式 (3) 在整个区域 D 中成立. □

另外, 不是每个完全哈托格斯区域都可证明是某个哈托格斯级数的收敛区域: 在第 40 目我们将证明, 收敛区域刻画出的半径 $R('z)$ 应该具有的附加性质.

我们现在来描述洛朗 (Laurent) 级数的简单的空间类比.

定理 2. 在圆环积 $\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n : r_\nu < |z_\nu - a_\nu| < R_\nu\}$ 中全纯的任意函数 f 可以表示为在 Π 中的多重洛朗级数

$$f(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k (z-a)^k, \tag{4}$$

其中的取和遍历所有整数向量 $k = (k_1, \cdots, k_n)$, 而系数

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - a)^{k+1}}, \tag{5}$$

而 Γ 为圆 $\gamma_\nu : \zeta_\nu = a_\nu + \rho_\nu e^{it}$ $(\nu = 1, \cdots, n; r_\nu < \rho_\nu < R_\nu; 0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ 的乘积.

证明. 展开式 (4) 由通常方式得到: 选取 $\rho_\nu^\pm$ 使得 $(\rho_\nu^-, \rho_\nu^+) \Subset (r_\nu, R_\nu)$, 而函数 f 在圆环 $\{\rho_\nu^- \leqslant |z_\nu - a_\nu| \leqslant \rho_\nu^+\}$ 的乘积中以柯西积分公式表示为

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_\varepsilon \int_{\Gamma^\varepsilon} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}. \tag{6}$$

这里的 ε 表示数组 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n)$, 由 $+$ 和 $-$ 组成, 而 $\Gamma^\varepsilon = \gamma_1^{\varepsilon_1} \times \cdots \times \gamma_n^{\varepsilon_n}$, 其中 $\gamma_\nu^{\varepsilon_\nu} = \{|\zeta_\nu - a_\nu| = \rho_\nu^{\varepsilon_\nu}\}$ 为圆, 如果 $\varepsilon_\nu = +$ 则为正定向, 如果 $\varepsilon_\nu = -$ 则为负定向; 取

和遍历由 n 个符号组成的所有数组. 另外我们展开 $\frac{1}{\zeta - z}$ 为相应的几何级数, 并逐项积分, 还将沿 $\gamma_\nu^{\varepsilon_\nu}$ 换作沿 γ_ν 的积分 (如果 $\varepsilon_\nu = -$, 则改变符号). □

洛朗级数 (4) 的收敛区域显然是个赖因哈特区域. 除此之外, 如果收敛区域包含了某个点 z^0, 其坐标 $z_\nu^0 = a_\nu$, 则在展式 (4) 中不可能有差 $z_\nu - a_\nu$ 的负幂项, 就是说, 相对于这个差, (4) 是个泰勒展开式. 所以, 洛朗级数的收敛区域是所谓的*相对完全的赖因哈特区域*. 称一个赖因哈特区域是相对完全的是说, 如果当 ν 固定时, 或者它不与平面 $\{z_\nu = a_\nu\}$ 相交, 或者与其每个点 z^0 一起还包含了所有满足 $|z_\nu - a_\nu| \leqslant |z_\nu^0 - a_\nu|$ 的点 z, 而其他的坐标与 z^0 的相同 (这个条件对所有 ν 均满足).

因此, 如果一个赖因哈特区域不交于某个平面 $\{z_\nu = a_\nu\}$, 则相对完全的条件对边界没有给出任何限制, 然而与每一个这样的平面都相交则表明要对其附加上其他条件.

正如在泰勒级数的情形那样, 人们证明了洛朗级数的收敛区域仍是对数凸的. 而在相对完全的赖因哈特区域 D 中全纯的任意函数 f 可以由区域 D 中的洛朗级数 (4) 表示 (如果 D 不是对数凸的, 则这种表示可以由 f 在 D 的对数凸包中实现.)

可以考虑其他的洛朗级数的类比, 确切地说, 在形如 $\{z \in \mathbb{C}^n : {}'z \in {}'D, r({}'z) < |z_n - a_n| < R({}'z)\}$ 的哈托格斯区域中任意全纯函数 f, 其中 ${}'D$ 为 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的区域, 可以在这个区域中以*哈托格斯 – 洛朗级数*表示:

$$f(z) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} g_\mu({}'z)(z_n - a_n)^\mu, \tag{7}$$

其中 $g_\mu \in \mathscr{O}({}'D)$. 这种类型级数的收敛区域由附加在 $r({}'z)$ 和 $R({}'z)$ 的性质所刻画, 我们将在第 40 目中证明.

最后我们转向*按齐次多项式展开的级数*. 称多项式 $p_\nu(z)$ 为 ν *次齐次的*是说, 如果 $p_\nu(\lambda z) = \lambda^\nu p_\nu(z)$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}^n$ 为任意. 由重组项的幂级数可得到按这种多项式展开的级数:

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\sum_{|k|=\nu} c_k z^k \right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(z) \tag{8}$$

(ν 为标量指标). 像在哈托格斯级数的情形那样, 这种重组可能会导致收敛区域的扩大: 我们现在就要看到, 按齐次多项式展开的级数的收敛区域类型要比幂级数的广泛得多:

定理 3. 在以 $z = 0$ 为中心的完全圆形区域 D 中全纯的任意函数 f 在这个区域中可展开成齐次多项式的级数

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(z), \tag{9}$$

其中 p_ν 由 f 在 0 的泰勒展式的项 $c_k z^k$ 构成, 而 $|k| = \nu$, 并且该级数在 D 的任意紧子集上一致收敛.

证明. 设 $z \in D\backslash\{0\}, \omega = z/|z|$. 通过点 z 的复直线 $\zeta = \lambda\omega, \lambda \in \mathbb{C}$ 与 D 交于圆盘 $\{\lambda : |\lambda| < R(\omega)\}$. 因为 $0 \in D$, 故级数

$$f(\zeta) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k \zeta^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\zeta)$$

在原点的某个邻域内收敛. 其在复直线 $\{\zeta = \lambda\omega\}$ 的限制给出了

$$\varphi(\lambda) = f(\lambda\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\lambda\omega) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(\omega)\lambda^\nu. \tag{10}$$

因为 $f \in \mathscr{O}(D)$, 故 φ 在圆盘 $\{|\lambda| < R(\omega)\}$ 中全纯, 而 (10) 是其泰勒展式; 它在此圆盘中收敛, 并且由于我们有 $|z| < R(\omega)$ 和 $z = |z|\omega$, 则 (9) 在点 z 收敛.

如果现有 $K \Subset D$, 则存在函数 $r(\omega), 0 < r(\omega) < R(\omega)$, 和数 $q, 0 < q < 1$, 使得对所有 $z \in K$ 有 $|z| \leqslant qr(\omega)$, 其中 $\omega = z/|z|$. 故而对所有 $z \in K$ 有

$$|p_\nu(z)| = |p_\nu(\omega)||z|^\nu \leqslant |p_\nu(\omega)|r^\nu(\omega)q^\nu. \tag{11}$$

但由泰勒展式系数的积分公式有

$$p_\nu(\omega) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=r(\omega)} \frac{f(\lambda\omega)}{\lambda^{\nu+1}}d\lambda,$$

由此, 并利用集合 $\{\lambda\omega : |\lambda| = r(\omega)\} \Subset D$, 从而在其上有 $|f(\lambda\omega)| \leqslant M$, 我们便得到了 $|p_\nu(\omega)| \leqslant M/r^\nu(\omega)$ (对泰勒级数的系数的柯西不等式). 将其代入 (11), 得出对所有的 $z \in K$ 有 $|p_\nu(z)| \leqslant Mq^\nu$. 因为 $0 < q < 1$, 于是便证明级数 (9) 在 K 上一致连续. □

我们发现, 并非所有完全圆形区域都是某个齐次多项式级数的收敛区域: 这种情形与在哈托格斯级数和区域的情形相同. 从后面可以看出这一点: 变换 $('z, z_n) \mapsto ('w, z_n)$, 其中 $w_\nu = z_\nu/z_n$ $(\nu = 1, \cdots, n-1)$, 将圆形区域变到哈托格斯区域, 而把展开式 (9) 变为

$$g('w, z_n) = f('wz_n, z_n) = \sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu('w, 1)z_n^\nu,$$

即对函数 f 的像的哈托格斯展开式.

在本节结尾我们给出所谓的哈托格斯基本定理的辐射式类比, 这是在最近, 即 1978 年, 由福雷里 (F. Forelli) 证明.

定理 4. 如果定义在单位球 $B \subset \mathbb{C}^n$ 中的函数 f, 在 B 与每条通过点 $z = 0$ 的复直线交集上全纯, 并且在此点的邻域中属于 C^∞ 类, 则它在 B 中为全纯.

证明. 设 $z \in B\backslash\{0\}$ 为任意点; 由 f 在通过点 $z=0$ 的复直线上和在此点的全纯性条件得到

$$f(\lambda z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z)\lambda^k, \tag{12}$$

并且此级数在闭圆盘 $\{|\lambda| \leqslant 1\}$ 中绝对和一致收敛. 因此由 $|F_k(z)|$ 构成的级数收敛, 这表明, 当 $|z| < 1$ 时定义了函数

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z).$$

又, 对属于单位圆盘 $U \subset \mathbb{C}$ 中任意两点 λ 和 μ, 由 (12) 得到两个展开式

$$f(\lambda\mu z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(\lambda z)\mu^k = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} F_k(z)\lambda^k\mu^k,$$

按幂级数展开的唯一性定理, 由上式得到恒等式

$$F_k(\lambda z) = \lambda^k F_k(z), \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{13}$$

从对级数 (12) 系数的柯西定理知

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\{|\lambda|=1\}} \frac{f(\lambda z)}{\lambda^{k+1}} d\lambda,$$

而因为由函数 f 在某个球 $B_r = \{|z| < r\}$ 中属于 C^∞ 类的条件, 则由此公式得出 $F_k \in C^\infty(B_r)$. 特别地, 它们在 B_r 中有界, 于是从 (13) 得到当 $z \to 0$ 时 $F_k(z) = O(|z|^k)$.

由对光滑函数的泰勒公式我们于是得出: 对 $z \in B_r$ 有

$$F_k(z) = \sum_{\mu+\nu=k} P_{\mu\nu}(z) + |z|^k\gamma(z), \tag{14}$$

其中 $P_{\mu\nu}$ 为 z 和 $\bar{z}$ 的多项式, 对 z 的总次数为 μ, 对 $\bar{z}$ 为 ν, 且当 $z \to 0$ 时 $\gamma(z) \to 0$ (公式中的低次项因 $F_k(z) = O(|z|^k)$ 而消失). 将其代入 (13), 我们便有恒等式

$$\begin{aligned}&\sum_{\mu+\nu=k} P_{\mu\nu}(z)\lambda^\mu\bar{\lambda}^\nu + |\lambda|^k|z|^k\gamma(\lambda z)\\ &= \sum_{\mu+\nu=k} P_{\mu\nu}(z)\lambda^k + \lambda^k|z|^k\gamma(z),\end{aligned} \tag{15}$$

它对所有 $z \in B_r$ 和 $|\lambda| \leqslant 1$ 成立. 特别, 对于正数 $\lambda < 1$, 由其推出 $\gamma(\lambda z) = \gamma(z)$, 从而当 $\lambda \to 0$ 时得到在 B_r 中 $\gamma(z) \equiv 0$. 但从 (15), 并再次应用幂级数展开的唯一性定理可清楚看出当 $\nu > 0$ 时 $P_{\mu\nu} \equiv 0$, 因而由 (14) 得知 $F_k(z) = P_{k0}(z)$ 为 z 的多项式, 即不仅是 B_r 中的全纯函数而且是整个 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数.

由定理 3, F_k 的级数在 B 的紧子集中一致收敛, 并由魏尔斯特拉斯定理我们得到的结论是 $F \in \mathscr{O}(B)$. 然而根据 (12), 当 $\lambda = 1$ 时有 $f(x) = f(0) + F(z)$, 从而 $f \in \mathscr{O}(B)$. □

我们注意到, 在这个定理中 f 在原点邻域的无限可微的条件是不可或缺的: $\mathbb{C}^2$ 中的函数 $z_1^{k+2}\bar{z}_2/|z|^2$ 属于 C^k 类并在每条经过原点的复直线上全纯, 但却在 $\mathbb{C}^2$ 上并不全纯.

* 如果除了函数 f 在原点邻域中的无限可微性之外, 仅要求 B 与某个顶点在原点的圆锥上的复直线的交集上全纯, 那么福雷里 (Forelli) 的定理有什么变化? 而只与有限条复直线 (通过原点的) 相交又会怎样呢? *

§4. 全纯映射

9. 全纯映射的性质

设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域, $f=(f_1,\cdots,f_m):D\to\mathbb{C}^m$; 如果这个映射的每个分量 f_μ $(\mu=1,\cdots,m)$ 在 D 中全纯, 则称此映射为*全纯的*. 特别, 如果 $D\subset\mathbb{C}$, 则称 f 为*全纯曲线*.

如果 U 为 $z\in\mathbb{C}^n$ 的一个邻域, $f:U\to\mathbb{C}^m$ 为全纯映射, 则对具任意充分小的 $|h|$ 的向量 $h\in\mathbb{C}^n$ 成立展开式

$$f(z+h)=f(z)+df(h)+o(h); \tag{1}$$

$\mathbb{C}$ – 线性映射

$$df(h)=f'(z)h \tag{2}$$

称为*映射 f 在点 z 的微分*, 其中 $f'(z)=\left(\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right)$ 为*雅可比矩阵*, 而 h 是列向量. 如果 $f'(z)$ 的秩极大, 即等于 $\min(m,n)$, 则称点 z 为*非异的*; 特别地, 当 $m=n$ 时可以考虑行列式

$$\det\, f'(z)=J_f(z), \tag{3}$$

称其为映射 f 在点 z 的*雅可比*; 仅当在 $z, J_f(z)\neq 0$ 时点 z 才为非异.

利用微分的外积 $dz_\mu\wedge dz_\nu$, 它具有反交换性质 ($dz_\nu\wedge dz_\mu=-dz_\mu\wedge dz_\nu$, 特别是, $dz_\nu\wedge dz_\nu=0$), 结合律和分配律, 也允许在乘积符号后面取出 (复) 乘积因子 [1]. 由这些性质得出, 对于全纯映射 $f:U\to\mathbb{C}^n$, 其中 $U\subset\mathbb{C}^n$,

$$\begin{aligned}&df_1\wedge\cdots\wedge df_n\\ &=\left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1}dz_1+\cdots+\frac{\partial f_1}{\partial z_n}dz_n\right)\wedge\cdots\wedge\left(\frac{\partial f_n}{\partial z_1}dz_1+\cdots+\frac{\partial f_n}{\partial z_n}dz_n\right)\\ &=J_f(z)dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n,\end{aligned} \tag{4}$$

[1] 我们假定读者熟悉外积概念: 例如参看鲁金 (W. Rudin) 的《数学分析基础》(有中译本) (M.: Mup, 1966, p.251), 也可参看后面的第 13 目.

并且类似地, 对于复共轭映射

$$d\overline{f}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{f}_n = \overline{J}_f(z) d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n. \tag{5}$$

进而由同样性质有

$$dz_\nu \wedge d\overline{z}_\nu = (dx_\nu + idy_\nu) \wedge (dx_\nu - idy_\nu) = -2idx_\nu \wedge dy_\nu$$

以及类似地 $df_\nu \wedge d\overline{f}_\nu = -2idu_\nu \wedge dv_\nu$, 其中 $f_\nu = u_\nu + iv_\nu$. 因此, 把 (4) 和 (5) 相乘展开并在右端和左端做相同的排列, 我们得到

$$\begin{aligned} &du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \wedge dv_1 \wedge \cdots \wedge dv_n \\ &= |J_f|^2 dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n. \end{aligned}$$

但是这全部 $2n$ 个实微分积 $du_1 \wedge \cdots \wedge dv_n$ 和 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$ 的商是像及原像的体积元之间的商, 等于将映射 f 看作是实的映射时的雅可比 J_f^r, 我们证明了

定理 1. 如果 $f: U \to \mathbb{C}^n$ 为点 $z \in \mathbb{C}^n$ 的邻域的全纯映射, 并将 f 看成由 $\mathbb{R}^{2n}$ 的邻域到 $\mathbb{R}^{2n}$ 的映射时, 则它的雅可比等于复雅可比模的平方:

$$J_f^r(z) = |J_f(z)|^2. \tag{6}$$

由此定理我们得到了逆映射和隐函数定理的复版本.

定理 2. 设 $U \subset \mathbb{C}^n$ 为点 z^0 的邻域, $f: U \to \mathbb{C}^n$ 为全纯映射. 如果雅可比 $J_f(z^0) \neq 0$, 则 f 在点 z^0 的邻域 $V \subset U$ 中相互一一, 并且逆映射 $g = f^{-1}$ 在点 $w^0 = f(z^0)$ 为全纯. 在这种情形下, $g'(w)$ 的矩阵在所有点 $z \in V$ 和 $w = f(z)$ 是 $f'(z)$ 的矩阵的逆.

证明. 因为由定理 1, 实雅可比行列式 $J_f^r(z^0) \neq 0$, 故 f 的局部相互一一和 $g = f^{-1}$ 在 w^0 属于 C^∞ 类的性质由实分析中反函数定理得出. 由成立于 V 的恒等式 $g \circ f(z) \equiv z$ 按复合函数的微分公式, 对 $j, k = 1, \cdots, n$, 我们得到

$$\frac{\partial z_j}{\partial \overline{z}_k} = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial w_\nu} \frac{\partial f_\nu}{\partial \overline{z}_k} + \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial g_j}{\partial \overline{w}_\nu} \overline{\frac{\partial f_\nu}{\partial z_k}} = 0.$$

但由 f 的全纯性有 $\dfrac{\partial f_\nu}{\partial \overline{z}_k} = 0$, 从而 $\det\left(\overline{\dfrac{\partial f_\nu}{\partial z_k}}\right) = \overline{J_f(z)} \neq 0$, 如果 V 充分小, 则对所有 $j, \nu = 1, \cdots, n$ 有 $\dfrac{\partial g_j}{\partial \overline{w}_\nu} = 0$. 类似地 (对 z_k 微分) 我们有 $g'(w) = (f'(z))^{-1}$. □

定理 3. 如果函数 $f_1, \cdots, f_k$ $(k < n)$ 在点 $z^0 \in \mathbb{C}^n$ 的一个邻域中全纯且在其中 $\det\left(\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right) \neq 0$ $(\mu, \nu = 1, \cdots, k)$, 则方程组 $f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0$ 对于 $z_1, \cdots, z_k$

局部可解, 其解 $z_\nu = g_\nu(z_{k+1},\cdots,z_n)$ $(\nu = 1,\cdots,k)$ 在点 $(z_{k+1}^0,\cdots,z_n^0)$ 的邻域中全纯.

证明. 就像前面那个定理那样, 方程组的可解性和解的光滑性由实分析得出. 故而在 $(z_{k+1}^0,\cdots,z_n^0)$ 的邻域中成立恒等式 $f_\mu(g_1,\cdots,g_k,z_{k+1},\cdots,z_n) = 0$ $(\nu = 1,\cdots,k)$ 并可以取它们对 $\overline{z}_j$ $(j = k+1,\cdots,n)$ 的微分:

$$\sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\frac{\partial g_\nu}{\partial \overline{z}_j} + \sum_{\nu=1}^{k}\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\frac{\partial \overline{g}_\nu}{\partial z_j} + \frac{\partial f_\mu}{\partial \overline{z}_j} = 0, \quad \mu = 1,\cdots,k.$$

但是 $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial \overline{z}_\nu} = \dfrac{\partial f_\mu}{\partial \overline{z}_j} = 0$, 这是由全纯性得到, 而又由条件知 $\det\left(\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right) \neq 0$, 从而 $\dfrac{\partial g_\nu}{\partial \overline{z}_j} = 0, \nu = 1,\cdots,k, j = k+1,\cdots,n.$ □

我们还发现局部同胚判别法在高维情形的推广: 与定理 2 一起成立的还有它的逆定理

定理 4. 设 $U \subset \mathbb{C}^n$ 为点 z^0 的一个邻域, $f : U \to \mathbb{C}^n$ 为全纯映射. 如果 f 在点 z^0 的邻域中相互一一, 则雅可比 $J_f(z^0) \neq 0$.

证明. 利用对 n 的归纳. 当 $n = 1$. 此定理已在卷 I 中证明 (参看第 35 目); 假设它对所有小于 n 的维数时成立. 我们假定 $J_f(z^0) = 0$, 并以 k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ 表示 $f'(z^0)$ 的矩阵的秩. 如果 $k > 0$, 则不失一般性可假设 $\det\left(\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right) \neq 0$ $(\mu,\nu = 1,\cdots,k)$. 于是由定理 3 知, 方程组 $f_1(z) = w_1,\cdots,f_k(z) = w_k$ 对于 $z_1,\cdots,z_k$ 局部可解为全纯函数, 从而在某个邻域 $V \subset U$ 中作为新的局部坐标可以取为 $z'_\nu = f_\nu(z)$, $\nu = 1,\cdots,k$ 和 $z'_\nu = z_\nu, \nu = k+1,\cdots,n$.

在新的坐标下 (我们重新以 z_ν 表示它们), 映射 f 具有形式 $w_\nu = z_\nu$ $(\nu = 1,\cdots,k), w_\nu = f_\nu(z)$ $(\nu = k+1,\cdots,n)$, 和雅可比

$$J_f(z) = \det\left(\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & & & \\ & \cdots\cdots\cdots & & & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & & & \\ \hdashline \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial z_1} & & \cdots & & \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial z_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial z_n} \\ & \cdots\cdots\cdots & & & & \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_1} & & \cdots & & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{array}\right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial z_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_{k+1}}{\partial z_n} \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial z_{k+1}} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial z_n} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

使得最后面的那个行列式在点 z^0 等于 0. 在映射 f 下, $n-k$ 维平面 $\Pi = \{z_1 = \cdots = z_k = 0\}$ 转化为平面 $\{w_1 = \cdots = w_k = 0\}$, 从而限制映射 $\widetilde{f} = (f_{k+1}, \cdots, f_n)|_\Pi$ 把 $(n-k)$ 维邻域 $\widetilde{V} = V \bigcap \Pi$ 映到 $\mathbb{C}^{n-k}$. 这个映射在点 $(z^0_{k+1}, \cdots, z^0_n)$ 的雅可比根据 (7) 等于 0, 并且根据归纳假定, $\widetilde{f}$ 在 $\widetilde{V}$ 中不是相互一一的. 于是 f 在 V 上便不是相互一一的.

还需考虑 $k=0$ 的情形. 此时在点 z^0 所有的 $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} = 0$. 我们将利用的性质是说, 多复变全纯函数不可能存在孤立零点: 对任何一个该函数在上为零的点, 存在一条光滑路径以此点为端点而该函数在此路径上为零 (参看下面的第 23 目). 因为 $J_f(z^0) = 0$, 则由此性质知, 存在以 z^0 为端点的路径 γ, 使在其上 $J_f(z) = 0$. 只有两种可能性: a) 在与 z^0 相连接的 γ 的一条曲线段上, 所有 $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} \equiv 0$, 以及 b) 存在在任意靠近 z^0 的 γ 上的点, 使得并非所有的 $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu} = 0$. 在情形 a) 中, 上面所提及那个 γ 的一段在 f 下的像映成一个点. 在情形 b) 中, 在邻近 z^0 存在点 z, 使 $J_f(z) = 0$ 而 rank $f'(z) = k > 0$. 在这两种情形下 f 在 z^0 的邻域中都不是相互一一的 (在情形 b), 由上面的证明得到). □

另外, 对于全纯映射还成立极大值原理. 为了得到它的充分一般形式, 我们将称映射 $\|\cdot\| : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}_+$ 为 $\mathbb{C}^n$ 上的 $\mathbb{C}$ – **齐性范数**, 如果它满足 1) $\|z+w\| \leqslant \|z\| + \|w\|$, 其中 $z, w \in \mathbb{C}^n$ 为任意点, 2) $\|\lambda z\| = |\lambda| \cdot \|z\|$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $z \in \mathbb{C}^n$ 为任意, 以及 3) $\|z\| = 0$ 当且仅当 $z = 0$. 欧几里得和多圆柱范数 (见第 1 目) 可作为 $\mathbb{C}$ – 齐次范数的基本示例.

定理 5 (极大值原理). 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域, $f : D \to \mathbb{C}^m$ 为全纯映射, 而 $\|\cdot\|$ 为 $\mathbb{C}^m$ 中的某个 $\mathbb{C}$ – 齐性范数. 如果 $\|f(z)\|$ 在点 $a \in D$ 达到其极大值, 则 1) 映射 f 的分量 f_μ 在 D 上线性相关且 2) 在 D 中 $\|f(z)\|$ 为常数.

证明. 设 $b = f(a)$, 以及 $B = \{w \in \mathbb{C}^m : \|w\| < \|b\|\}$ 为在所考虑的那个范数下的球; 由于该范数的性质, 它是一个开的凸集. 当 $\|b\| = 0$ 时, 命题是平凡的, 因此我们设 $\|b\| > 0$. 点 $b \in \partial B$; 由 B 的凸性知, 在其中存在一个支撑 B 的实超平面, 它可写为

$$\mathrm{Re}\, l(w) = \beta, \tag{8}$$

其中 $l(w) = \sum\limits_{\mu=1}^{m} a_\mu w_\mu$ 为复线性函数, 而 $\beta = \mathrm{Re}\, l(b)$. 我们选取函数 l 使得对所有

$w \in B$ 有 $\mathrm{Re}\, l(w) < \beta$.

现在考虑在 D 中全纯的函数 $e^{l \circ f}$; 在 D 中处处有 $|e^{l \circ f(z)}| = e^{\mathrm{Re}\, l \circ f(z)} \leqslant e^{\beta}$, 从而在点 a 它的模等于 e^{β}. 由极大模原理 (第 5 目定理 6), 在 D 中 $l \circ f(z) \equiv$ 常数. 由此得出的结论是映射 f 的分量 f_μ 线性相关 (它们满足条件 $\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu f_\mu(z) \equiv$ 常数) 并且对所有 $z \in D, f(z)$ 属于支撑超平面 (8) 与边界 ∂B 的交, 即 $\|f(z)\| = \|b\|$ 对所有 $z \in D$ 成立. □

注. 如果在所考虑范数下的球 B 是严格凸的集合, 则支撑超平面 (8) 与 ∂B 的交只是一个点, 于是在定理的条件下就会有 $f(z) \equiv$ 常数 (例如, 欧几里得范数下就会这样). 但在 $\mathbb{C}$ – 齐性范数的一般情形下不会发生这种情况 (例如对多圆盘范数).

由极大值原理可以得出施瓦茨 (Schwarz) 引理的一个可能的推广:

定理 6. 设 $B_1 \subset \mathbb{C}^n, B_2 \subset \mathbb{C}^m$ 分别为在 $\mathbb{C}$ – 齐性范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 下的单位球, $f: B_1 \to B_2$ 为满足 $f(0) = 0$ 的全纯映射. 于是对任意 $z \in B_1$ 有

$$\|f(z)\|_2 \leqslant \|z\|_1. \tag{9}$$

证明. 我们过点 $0 \in \mathbb{C}^n$ 作一复直线 $l: z = \zeta z^0$, 其中 $z^0 \in \partial B_1$ (即 $\|z^0\|_1 = 1$), 而 $\zeta \in \mathbb{C}$; 它与 B_1 的交在平面 ζ 中显然对应于圆盘 $U = \{|\zeta| < 1\}$. 考虑全纯曲线 $g(\zeta) = \dfrac{f(\zeta z^0)}{\zeta}: U \to \mathbb{C}^m$, 并固定任意一个 $r, 0 < r < 1$. 在圆盘 $\{|\zeta| < r\}$ 中, 由定理 2 得到 $\|g(\zeta)\|_2 \leqslant \dfrac{1}{r}$, 并在 $r \to 1$ 时取极限得到了 $\|g(\zeta)\|_2 \leqslant 1$, 即 $\|f(\zeta z^0)\|_2 \leqslant |\zeta|$, 其中 $\zeta \in U$ 为任意点.

现在设 $z \neq 0$ 为 B_1 中任意点, 于是 $z^0 = z/\|z\|_1 \in \partial B_1$, 并且在上面最后面的那个不等式中令 $\zeta = \|z\|_1$, 便得到了 (9). □

我们将在第 V 章考虑施瓦茨引理的其他推广.

* 证明, 如果对某个点 $z^0 \in B_1 \backslash \{0\}$ (9) 中等式成立, 则 $\|f(z)\|_2 = \|z\|_1$ 对通过 0 和 z^0 的复直线 l 上所有点都成立. *

10. 双全纯映射

定义. 称区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的映射为双全纯是说, 如果它在 D 中全纯并且有逆映射 $g = f^{-1}$, 它在 $G = f(D)$ 中全纯 (由拓扑的推断知道 f 保持了维数不变).

在前面一目中我们已经知道, 雅可比 $J_f(z) \neq 0$ 当且仅当 f 在点 z 为局部双全纯. 特别, 由此得到, 任意全纯的相互一一映射 $f: D \to f(D)$ 为双全纯 [1)]. 在 $n > 1$ 时双全纯性质与共形性质并不相同. 例如, 在 $\mathbb{C}^2$ 中映射 $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, 2z_2)$ 为双全纯, 然而并不是共形的, 而共形映射 $z \mapsto z/|z|^2$ 既不是全纯的也不是反全纯的.

1) 当 $J_f(z) \neq 0$ 时, f^{-1} 在点 $w = f(z)$ 的全纯性由反函数定理得到.

例题. 空间 $\mathbb{C}^{n^2}$ 中某些映射以 $n\times n$ 矩阵方便地给出. 例如, 考虑所谓的凯莱 (Cayley) 变换:

$$W=(Z+iE)^{-1}(Z-iE), \tag{1}$$

其中 Z 为任意的 $n\times n$ 矩阵, 而 E 为 n 阶单位矩阵. 我们将证明它双全纯地把广义上半平面 $H=\{Z\in\mathbb{C}^{n^2}:\operatorname{Im} Z>0\}$ (见第 2 目例 8) 映到区域

$$D=\{W\in\mathbb{C}^{n^2}:WW^*<E\}, \tag{2}$$

这个区域被称做广义单位圆盘[1)].

首先我们注意到, 对于 $Z\in H$, 矩阵 $Z+iE$ 非退化. 事实上, 如果 w 为列向量, 长为 n, 并且 $(Z+iE)w=0$, 则 $Zw=-iw$, 由此有 $w^*Z^*=iw^*$; 因此, $w^*Zw=-iw^*w, w^*Z^*w=iw^*w$ 和 $w^*\operatorname{Im} Zw=-w^*w$. 因为 $\operatorname{Im} Z>0$, 故这里的左端在 $w\neq 0$ 时正定 [2)], 而右端等于 $-|w|^2$, 为负, 从而 $w=0$. 这便证明了矩阵 $Z+iE$ 非退化, 即存在 $(Z+iE)^{-1}$, 并且在区域 H 中 (1) 为全纯映射.

另外, 由 (1) 得到关系式

$$\begin{aligned}E-WW^*&=E-(Z+iE)^{-1}(Z-iE)(Z^*+iE)(Z^*-iE)^{-1}\\&=(Z+iE)^{-1}\{(Z+iE)(Z^*-iE)-(Z-iE)(Z^*+iE)\}(Z^*-iE)^{-1}\\&=(Z+iE)^{-1}4\operatorname{Im} Z(Z^*-iE)^{-1},\end{aligned} \tag{3}$$

由此看出, 在 $Z+iE$ 非退化时, 埃尔米特矩阵 $E-WW^*$ 和 $\operatorname{Im} Z$ 同时都是正定的. 我们证明了 (1) 将 H 映到 D 中.

由 (1) 径直地得到逆映射

$$Z=i(E+W)(E-W)^{-1}, \tag{4}$$

它在 D 中全纯, 因为当 $W\in D$ 时矩阵 $E-W$ 非退化 (像上面那样地证明). 但是由 (3) 可看出, 当 $W\in D$ 时矩阵 $(Z+iE)^{-1}$ 非退化, 从而表明 $\operatorname{Im} Z>0$, 即 (4) 把 D 映到 H 中. 断言得证.

读者无疑已注意到在 (1) — (4) 和第 I 卷中把上半平面映到圆盘的分式线性映射公式之间的类比性. 我们还注意到, 映射 (1) 将广义上半平面的骨架 $\Gamma=\{\operatorname{Im} Z=0\}$ 映到集合 $\{WW^*=E\}$, 它由酉矩阵构成. 它也被称做广义单位圆盘的骨架, 是它的希洛夫边界.

最后, 我们发现广义单位圆盘是个有界区域. 事实上, 如果记 $w^j=(w_1^j,\cdots,w_n^j)$ 为矩阵 W 的列, 则 $E-WW^*$ 中主对角线上的元素为 $1-|w^j|^2$, 而由于这个矩阵为正定, 故它们全都为正数. 因此 $|W|^2=\sum|w^j|^2<n$, 并且 D 位于球 $\{|W|<\sqrt{n}\}$ 中.

[1)]在这里, 以 W^* 表示由 W 经共轭和转置得到的矩阵; 条件 $WW^*<E$ 表明埃尔米特矩阵 $E-WW^*$ 为正定. 另外, 再利用熟知的矩阵间关系 $(AB)^*=B^*A^*$ 及 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

[2)]在这里利用了众所周知的事实: 埃尔米特矩阵 A 和 BAB^* 当 B 非退化时, 它们同时都是正定的.

双全纯映射 $f: D \to G = f(D)$ 也称为(全纯) 同构, 而存在这种映射的区域 D 和 G 被称为双全纯等价. 区域 D 到自身的全纯同构被称做 (全纯) 自同构.

区域 D 的所有全纯自同构构成一个群, 其运算为复合, 以记号 Aut D 表示. 与在卷 I 第 38 目一样, 可以证明任意一个双全纯映射 $f: D \to G = f(D)$ 建立了群的同构 $f_*: \text{Aut } D \to \text{Aut } G$, 定义为

$$f_*: \varphi \mapsto f \circ \varphi \circ f^{-1}, \quad \varphi \in \text{Aut } D. \tag{5}$$

因此, 群 Aut D 和 Aut G 之间的同构是区域 D 和 G 之间双全纯等价的必要条件. 但是这个条件不是充分的, 就像由下面例题所表明: 不同的平面圆环 $D = \{1 < |z| < r_1\}, G = \{1 < |z| < r_2\}, r_1 \neq r_2$, 它们不是共形等价的, 但它们的自同构群却同构 (参看卷 I, 第 IV 章, 习题 15).

我们来计算几个区域的自同构群.

a) 球 $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ 的自同构. 首先构造一个把固定点 $a \in B^n \backslash \{0\}$ 映到其中心 $z = 0$ 的自同构. 为此我们以 $p_a(z) = \dfrac{(z,a)}{|a|^2} a$ 表示任意点 $z \in B^n$ 在通过 a 和 0 的复直线 l_a 上的投影, 并以 $q_a(z) = z - p_a(z)$ 表示这个点在 l_a 的正交补上的投影 (参看图 11 的图解). 我们将证所要求的自同构为

$$L_a: w = \frac{a - p_a(z) - \alpha q_a(z)}{1 - (z,a)}, \tag{6}$$

其中 $\alpha = \sqrt{1 - |a|^2}$.

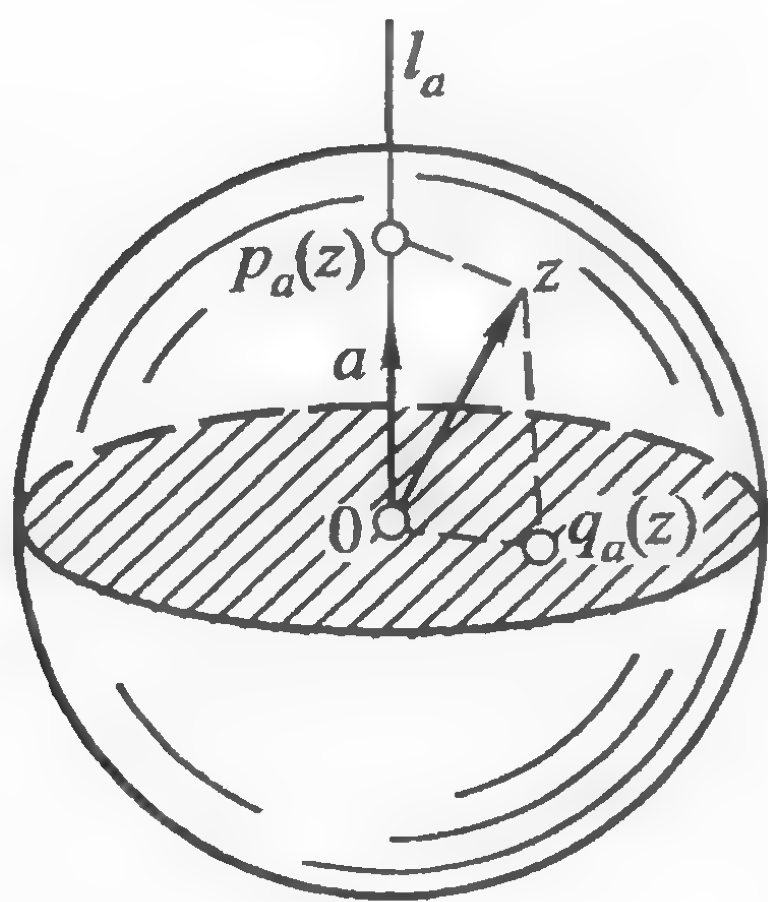


图 11

首先, 显见这个公式的分母不会在 B^n 中化为零, 这是因为由施瓦茨不等式 $|(z,a)| \leqslant |a||z| < 1$, 因此, L_a 在 B^n 中全纯. 由于 $p_a(a) = a, q_a(a) = 0$, 则 $L_a(a) = 0$. 为了进一步简化, 不失一般性地可假定, 轴 z_n 沿向量 a 定向, 即 $a = ('0, a_n)$. 于是 $p_a(z) = ('0, z_n), q_a(z) = ('z, 0)$, 而 (6) 则取形式

$$'w = -\alpha \frac{'z}{1 - \bar{a}_n z_n}, \quad w_n = \frac{a_n - z_n}{1 - \bar{a}_n z_n}. \tag{7}$$

简单的计算给出

$$|w|^2 = \frac{|z|^2 + |a_n|^2(1 - |'z|^2) - 2\mathrm{Re}(\overline{a}_n z_n)}{1 + |\overline{a}_n z_n|^2 - 2\mathrm{Re}(\overline{a}_n z_n)},$$

由此清楚看到, 当 $|z| < 1$ 时我们则有 $|w| < 1$, 而当 $|z| = 1$, 则 $|w| = 1$. 于是, L_a 把 B^n 映到了 B^n. 利用公式 (7) 做同样简单的计算表明, 两个映射 L_a 的复合是恒同映射: $L_a \circ L_a(z) \equiv z$. 由此知道, 等式 $L_a(z') = L_a(z'')$ 推出 $z' = z''$, 即映射 L_a 为双全纯; 由上面所证, 它是 B^n 的自同构.

可清楚看出, B^n 的把点 a 变到 0 的自同构是复合映射

$$G_a = U \circ L_a, \tag{8}$$

其中 U 为 $\mathbb{C}^n$ 的任意一个酉变换. 我们将证明, 这些就是全部的球的自同构.

定理 1. 任意一个球 B^n 的双全纯自同构都具有 (8) 的形式, 其中选取了适当的点 $a \in B^n$ 及酉变换 U.

证明. 设 $f : B^n \to B^n$ 为任意一个自同构, a 为 (唯一的) 被变到了 0 的那个点. 于是复合映射 $g = f \circ L_a^{-1}$ 及其逆 g^{-1} 为 B^n 到 B^n 的全纯映射, 它保持球的中心不变. 对它们中每个映射应用上一目的在欧几里得度量下的施瓦茨引理, 我们得到在 B^n 中处处成立 $|g(z)| \leqslant |z|$ 和 $|g^{-1}(w)| \leqslant |w|$. 在第二个不等式中令 $w = g(z)$, 我们得到了 $|z| \leqslant |g(z)|$, 与第一个不等式一起得出, 在 B^n 中处处有

$$|g(z)| \equiv |z|. \tag{9}$$

现在固定一点 $z^0 \in \partial B^n$, 并在圆盘 $\{|\zeta| < 1\} \subset \mathbb{C}$ 中考虑向量函数 $G(\zeta) = g(\zeta z^0)/\zeta$. 因为当 $|\zeta| < 1$ 时 $\zeta z^0 \in B^n$, 且 $g(0) = 0$, 故 G 在圆盘 $\{|\zeta| < 1\}$ 中全纯. 但是由 (9), 对所有 $\zeta, 0 < |\zeta| < 1$, 我们有 $|G(\zeta)| = |g(\zeta z^0)|/|\zeta| \equiv 1$, 于是按前面一目中的极大值原理并考虑到 $\mathbb{C}^n$ 中球的严格凸性, 我们的结论便是 $G(\zeta) = c(z^0)$, 一个仅仅与 z^0 相关的常数 (参看第 9 目定理 5 后面的注).

因此, $g(\zeta z^0) = c(z^0)\zeta$, 而由此得到的断言是, 函数 g 在 B^n 与每条通过 0 的复直线 $z = z^0\zeta$ 的交上为线性:

$$g(\lambda z) = \lambda g(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad |\lambda| < 1^{1)}. \tag{10}$$

另一方面, 在把 g 的坐标展开为齐次多项式的级数时, 我们得到了 g 按齐次多项式向量的展开式

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z).$$

1) 事实上, $g(\lambda z^0\zeta) = c(z^0)\lambda\zeta = \lambda g(\zeta z^0)$.

由此并考虑到 (10), 对于任意 $\lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| < 1$ 我们得到了

$$g(\lambda z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu P_\nu(z) = \lambda \sum_{\nu=0}^{\infty} P_\nu(z).$$

由按 λ 展成幂级数的唯一性, 我们的结论是: 除去 P_1, 所有其他的 P_ν 全都恒等于零. 因此, g 为线性的, 从而根据 (9) 为酉变换: $g = f \circ L_a^{-1} = U$. 故 $f = U \circ L_a$, 即具有形式 (8). □

现在容易算出群 Aut B^n 所依赖的那些参数的个数. 映射 L_a 由点 a 确定, 即依赖于 $2n$ 个实参数. 酉变换 U 具有形式 $w = Az$, 其中 A 为酉矩阵, 即 $AA^* = E$, 而这个条件给出了 n^2 个实的关系式. 事实上, 如果 $A = (a_{\mu\nu})$, 则酉性质的条件可用等式表达: $\sum_{j=1}^{n} a_{j\mu}\overline{a}_{j\nu} = \delta_{\mu\nu}$, 其中 $\delta_{\mu\nu}$ 为克罗内克符号; 这些 n^2 个等式中, 有 n 个是实的 (当 $\mu = \nu$), 剩下的两两相互复共轭 (在 μ 与 ν 交换时), 于是有 $(n^2 - n)/2$ 为复无关, 即 $n^2 - n$ 个实无关方程. 故而, 群 Aut B^n 依赖于 $n^2 + 2n$ 个实参数.

我们还发现, 群 Aut B^n 的作用是可迁的, 即存在一个自同构把球中任一点 a 换成它的任何一个点 b. 例如这个变换可以是 $L_b^{-1} \circ L_a$, 其中的 L_a 和 L_b 由公式 (6) 定义, 并由此得到将 a 变到了 b.

* 证明, $\mathbb{C}^2$ 中的酉变换可以写为形式

$$(z_1, z_2) \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 + |\lambda|^2}} \left(e^{i\theta_1}(z_1 + \lambda z_2), e^{i\theta_2}(\overline{\lambda} z_1 - z_2)\right),$$

其中 λ 为复数, 而 θ_1 和 θ_2 为实数. *

b) **多圆盘 $U^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ 的自同构**. 显然, 有线性分式自同构群

$$w_\nu = e^{i\theta_\nu} \frac{z_\nu - a_\nu}{1 - \overline{a}_\nu z_\nu}, \quad \nu = 1, \cdots, n, \tag{11}$$

作用在 U^n 中, 它们依赖于 $3n$ 个实参数 (θ_ν 为实的常数, a_ν 为复的常数). 当 $n > 1$ 时还可在其中加上置换变量的变换 $w_\nu \mapsto w_{\sigma(\nu)}$, 其中 σ 是集合 $\{1, \cdots, n\}$ 到自己的一个相互一一的变换. 因此我们找到了一个 U^n 的自同构群, 它被分层为 $n!$ 个集合, 而每个集合又依赖于 $3n$ 个实参数 [1]. 原来这就是整个 U^n 的自同构群:

定理 2. 群 Aut U^n 由形如

$$z_\nu \mapsto e^{i\theta_{\sigma(\nu)}} \frac{z_{\sigma(\nu)} - a_{\sigma(\nu)}}{1 - \overline{a_{\sigma(\nu)}} z_{\sigma(\nu)}} \quad (\nu = 1, \cdots, n) \tag{12}$$

的变换组成, 其中 σ 为集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的任意一个置换.

[1] 在群的这些集合中只有一个包含了恒同映射, 这就是变换 (11) 的集合.

证明. 设 $f \in \text{Aut}\, U^n, a = f(0)$; 取公式 (11) 的同构为 g, 我们有 $F = g \circ f$ 为 U^n 到自己的双全纯映射, 它满足 $F(0) = 0$. 对 F 和 F^{-1} 应用在多圆盘度量下的施瓦茨引理, 就像在上一个定理的证明那样, 我们得到了

$$\|F(z)\| = \|z\| \tag{13}$$

对所有 $z \in U^n$ 成立.

考虑映射 F 的任意坐标 F_ν: 因为 $\|F\| = \max|F_\mu|$ 以及 $F(U^n) = U^n$, 于是在 U^n 中存在一个邻域使在其中有 $\|F(z)\| = |F_\nu(z)|$. 设在映射 F 的原像的对应邻域中 $\|z\| = |z_\mu|$. 把 F_ν 看作为 z_μ 的函数而后对其应用单变量函数的施瓦茨引理, 由从 (13) 得到的等式 $|F_\nu(z)| = |z_\mu|$ 可知 $F_\nu(z) = e^{i\theta(z)} z_\mu$. 这里的 θ 可能依赖于 z_j $(j \neq \mu)$, 但是因为 $e^{i\theta(z)}$ 为具常数模的全纯函数, 故其为常数 (参看前面一目的定理 5 后的注), 事实上 $\theta(z) = \theta_\mu =$ 常数. 因此, $F_\nu(z) = e^{i\theta_\mu} z_\mu$ 在某个邻域中成立, 然而由唯一性定理, 它便在整个 U^n 中成立.

最后, 由 F 是同胚得到 $\mu = \mu(\nu)$, 即指标 $(1, \cdots, n)$ 的一个置换. 于是我们便证明了 $f = g^{-1} \circ F$ 是形如 (12) 的变换. □

当 $n = 1$ 时 $\text{Aut}\, B^n$ 与 $\text{Aut}\, U^n$ 相等, 而当 $n > 1$ 时它们显然并不同构. 由本节一开始所说知道, 当 $n > 1$ 时球 B^n 和多圆盘便不是双全纯等价的 [1]. 我们现在直接来给出这个命题的证明.

定理 3. 当 $n > 1$ 时不存在球 B^n 到多圆盘 U^n 的双全纯映射.

证明. 设若相反, 假定存在这样的映射 $f : B^n \to U^n$. 如有必要可经过 $\text{Aut}\, U^n$ 中的自同构, 使得 $f(0) = 0$. 将第 9 目施瓦茨引理用于 f 和 f^{-1}, 我们得到对所有 $z \in B^n$ 成立 $\|f(z)\| \equiv |z|$. 由此可知欧几里得球面 $\left\{|z| = \dfrac{1}{2}\right\}$ 在映射 f 下变到非光滑曲面 $\left\{\|z\| = \dfrac{1}{2}\right\}$, 这是不可能的, 因为 f 为微分同胚. □

我们还将看到关于平面单连通区域的黎曼定理不可能推广到空间区域. 这与在 $n > 1$ 时的*超定条件*有关: 对区域 $\mathbb{C}^n$ 的映射 $f = (f_1, \cdots, f_n)$, 柯西 – 黎曼条件 $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial \bar{z}_\nu} = 0$ 由关于 n 个未知复函数的 n^2 个复微分方程组成.

c) **广义上半平面** $H = \{Z \in \mathbb{C}^{n^2} : \text{Im}\, Z > 0\}$ **的自同构**. 我们先解释清楚矩阵线性分式函数

$$W = (AZ + B)(CZ + D)^{-1} \tag{14}$$

[1] 这个重要的事实由 A. 庞加莱 (1854 — 1912) 在 1907 年发现.

保持 Im Z 符号不变的条件是什么. 初等恒等式

$$\begin{aligned}\operatorname{Im} W &= \frac{1}{2i}[(AZ+B)(CZ+D)^{-1}-(Z^*C^*+D^*)^{-1}(Z^*A^*+B^*)]\\ &= \frac{1}{2i}(Z^*C^*+D^*)^{-1}[(Z^*C^*+D^*)(AZ+B)-\\ &\quad (Z^*A^*+B^*)(CZ+D)](CZ+D)^{-1}\\ &= \frac{1}{2i}(Z^*C^*+D^*)^{-1}[Z^*(C^*A-A^*C)Z+(D^*A-B^*C)Z+\\ &\quad Z^*(C^*B-A^*D)+D^*B-B^*D](CZ+D)^{-1}\end{aligned}$$

表明, 要做到这一点只要满足条件

$$C^*A=A^*C, \quad D^*B=B^*D, \quad D^*A-B^*C=E \tag{15}$$

和矩阵 $CZ+D$ 的非退化性就可以了. 事实上, 在这些条件下我们还有 $C^*B-A^*D=-E$, 从而前面的恒等式具有形式

$$\operatorname{Im} W=(Z^*C^*+D^*)^{-1}\operatorname{Im} Z(CZ+D)^{-1}, \tag{16}$$

由此显见, 埃尔米特矩阵 Im Z 和 Im W 同时正定或同时为零.

我们以 Γ 表示形如 (14) 而分量满足 (15) 条件的 H 的双全纯自同构集合. 初等计算表明, 在 Γ 中两个映射复合时, 满足 (14) 的矩阵系数相乘, 而复合后矩阵的系数仍然满足条件 (15). 故而 Γ 在复合下构成了群. 根据 (16) Γ 中的映射将埃尔米特矩阵 Z (其满足 Im $Z=0$) 转换为埃尔米特矩阵, 即保持区域 H 的骨架不变. 但是, 我们注意到该骨架不属于区域 H 而是属于它的边界, 因此 Γ 中某些映射可能在骨架上存在奇点.

我们挑出一个叫整映射组成的子群 $\Gamma_0\subset\Gamma$, 它们是 (14) 中系数 $C=0$ 的变换. 从 (15) 中后面的那个条件可得出, 当 A 和 D 非退化时有 $D^{-1}=A^*$. 因此 Γ_0 中的映射根据 (14) 具有形式

$$W=AZA^*+BA^*, \quad \det A\neq 0. \tag{17}$$

其中的 A 为任意的 (非退化) 矩阵, 而 BA^* 为任意埃尔米特矩阵 1), 因此群 Γ_0 依赖于 $2n^2+n^2=3n^2$ 个实参数.

* 证明

(1) 群 Γ_0 可迁地作用于 H.

(2) 区域 H 不包含退化矩阵. (提示: 如果 Z 退化, 则存在列向量 $a\neq 0$ 使得 $Za=0$; 从而 $a^*Z^*=0$, 这表明 $a^*\operatorname{Im} Za=0$.)

(3) 如果对 Γ 中的映射, 矩阵 C 非退化, 则 $C^{-1}D$ 为埃尔米特矩阵. (提示: 由 (15) 知 $C^{-1}D=D^*AC^{-1}D-B^*D$, 而 AC^{-1} 和 B^*D 为埃尔米特矩阵). *

1) 埃尔米特性质 $BA^*=BD^{-1}$ 由 (15) 的中间那个条件得到: $BD^{-1}=(D^{-1})^*B^*$.

我们还注意到另一个由 Γ 中映射构成的集合, 其中映射的矩阵 $C \neq 0$ 并非退化 (这个集合不形成群). 如果在 (14) 中矩阵 C 非退化, 则此公式可改写为形式 [1]

$$W = AC^{-1} + (B - AC^{-1}D)(CZ + D)^{-1},$$

而由条件 (15) 得到 $B - AC^{-1}D = -(C^{-1})^*$. 因此这个集合中的映射有形式

$$W = AC^{-1} - (C^{-1})^*(Z + C^{-1}D)^{-1}C^{-1}, \tag{18}$$

其中 AC^{-1} 和 $C^{-1}D$ 为埃尔米特矩阵. 反过来, 任意这种形式的矩阵都是 H 的自同构, 即属于我们的这个集合. 事实上, 因为 $C^{-1}D$ 为埃尔米特矩阵, 故 $\operatorname{Im}(Z + C^{-1}D) = \operatorname{Im} Z$, 从而对所有 $Z \in H$, 矩阵 $Z + C^{-1}D \in H$, 因而非退化 (参看习题). 于是映射 (18) 在 H 中全纯; 显然, 它把 H 映到 H, 而它的逆具有相同的形式, 但将 $C^{-1}D$ 换作 AC^{-1}. 如此一来, (18) 便双全纯地把 H 映到自己 [2].

* 1. 验证: 并非 Γ 中任意映射在其坐标表示中都是线性分式. (提示: 考虑逆形式的例子: $W = -Z^{-1}$, 这是一个形如 (18) 的映射, 其中 $C = E, A = D = 0$.)

2. 考虑映射 (14) 的例子, 其中矩阵 $A = D = E, B = 0, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 证明它属于 Γ 但不属于 Γ_0, 也不在形如 (18) 的映射集合中. *

现在来考虑点 $Z^0 = iE$ 的*迷向子群*, 即 Γ 中保持这个点不动的映射的集合. 根据 (17), 如果 $iE = iAA^* + BD^{-1}$, 则 Γ_0 中的映射属于这个子群; 在这里取埃尔米特共轭, 我们得到了 $-iE = -iAA^* + BD^{-1}$, 并再将此等式与前面那个结合在一起, 我们便有了 $BD^{-1} = 0$, $AA^* = E$. 故 Γ_0 中保持点 iE 不动的映射具有形式

$$W = AZA^*, \tag{19}$$

其中 A 为酉矩阵.

在 (18) 的集合中的映射为简便起见可重写为形式

$$W = B - C(Z + A)^{-1}C^*, \tag{20}$$

其中 A 和 B 为埃尔米特矩阵, 而 C 为非退化矩阵. 使点 iE 保持不动的条件为 $iE = B - C(A + iE)^{-1}C^*$; 由此和它的共轭埃尔米特矩阵得出

$$2B = C[(A + iE)^{-1} + (A - iE)^{-1}]C^*. \tag{21}$$

以 X 表示上面方括号内的表达式并乘以 $(A+iE)(A-iE) = (A-iE)(A+iE) = A^2 + E$, 我们得到 $X(A^2 + E) = 2A$, 于是 $X = 2A(A^2 + E)^{-1}$. 将其代入 (21), 我们

[1] 直接计算验证: 在右端右乘 $CZ + D$ 等于 $AC^{-1}(CZ + D) + B - C^{-1}D = AZ + B$.

[2] 我们注意到, 映射 (18) 在 H 的骨架中那些矩阵上退化, 它们与 $-C^{-1}D$ 相差一个退化的埃尔米特加项.

求出 $B = CA(A^2+E)^{-1}C^*$, 从而上面所写出的 iE 为不动点的条件有形式

$$iE = C[A(A^2+E)^{-1} - (A+iE)^{-1}]C^* = iC(A^2+E)^{-1}C^*.$$

由此得到 $B = CAC^{-1}$ 和 $C^*C = A^2+E$, 从而 (20) 可以重写为 $W = C[A-(Z+A)^{-1}(A^2+E)]C^{-1}$, 或最后写为

$$W = C(Z+A)^{-1}(ZA-E)C^{-1}. \tag{22}$$

由矩阵的微分规则得到

$$W'(iE) = C(A+iE)^{-1}(A-iE)C^{-1}, \tag{23}$$

其中矩阵 $(A+iE)^{-1}(A-iE) = U$ 为酉矩阵, 这不难验证, 即有 $UU^* = E$. 我们发现由此对所给定的矩阵 $U \neq E$,

$$A = i(E+U)(E-U)^{-1} \tag{24}$$

被唯一定义.

* 证明, 普通上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z > 0\}$ 的自同构群中使点 i 不动的迷向子群由自同构

$$w = \frac{az-1}{z+a}, \quad a > 0, \quad w'(i) = \frac{a-i}{a+i}$$

组成 (参照公式 (22) 和 (23)). *

最后我们证明, 群 Γ 穷竭了 H 的所有自同构. 为此还必须有另一个结果, 它也具有自身的重要性.

定理 4 (H. 嘉当 (Cartan)). 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为有界区域并包含了点 $z = 0$, $f : D \to D$ 为全纯映射, 满足 $f(0) = 0$. 于是, 如果还有 $f'(0) = E$, 则 f 为恒同映射[1).

证明. 设若情形不成立, 并展开 f 在点 $z = 0$ 的泰勒级数, 它具有形式 $f(z) = z + P(z) + o(|z|^\alpha)$, 其中 P 为不等于零的向量多项式, 阶 $\alpha \geqslant 2$. 于是映射 f 的迭代给出了 $f^{(2)}(z) = f \circ f(z) = z + P(z) + o(|z|^\alpha) + P(z + P(z) + o(|z|^\alpha)) = z + 2P(z) + o(|z|^\alpha)$, 一般地,

$$f^{(\nu)}(z) = f \circ f^{(\nu-1)}(z) = z + \nu P(z) + o(|z|^\alpha). \tag{25}$$

由假定条件, 存在 $k = (k_1, \cdots, k_n), |k| = \alpha$ 使得向量 $c = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^\alpha P}{dz^k} = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^\alpha f}{dz^k}(0) \neq 0$, 因此它的某个坐标 $c_j = \dfrac{1}{k!}\dfrac{d^\alpha f_j}{dz^k}(0) \neq 0$. 于是, 就像 (25) 中表明的, 对于 f 的第 ν 重迭代的泰勒系数为

$$c_j^{(\nu)} = \frac{1}{k!}\frac{d^\alpha f_j^{(\nu)}}{dz^k}(0) = \nu c_j.$$

1) 发表于 1932 年.

根据区域 D 的假设条件, 它包含了多圆盘 $\overline{U}_r = \{\|z\| \leqslant r\}$ 并包含在 $U_R = \{\|z\| < R\}$ 中. 因此对所有 $z \in U_r$, 所有的迭代 $|f_j^{(\nu)}(z)| < R$, 又由柯西不等式得

$$|c_j^{(\nu)}| = \nu |c_j| \leqslant R/r^\alpha.$$

因为 $e_j \neq 0$, 故对于充分大的 ν 我们引出了矛盾. □

定理 5. 广义上半平面的任何一个双全纯自同构都是一个线性分式矩阵函数, 即 $\mathrm{Aut}\ H = \Gamma$.

证明. 设 $f \in \mathrm{Aut}\ H$; 根据在公式 (17) 后面的习题知, 存在映射 $l_1 \in \Gamma_0$, 把 $f(iE)$ 变成 iE, 于是 $l_1 \circ f = f_1$ 保持 iE 不变. 由非退化矩阵的代数定理知道, $f_1'(iE)$ 可以表示为 BU 的形式, 其中 B 为正的埃尔米特矩阵, 而 U 为酉矩阵. 如果 $U \neq E$, 则我们按公式 (24) 选取 A, 并在公式 (22) 中令 $C = E$ 后按此公式构造映射 $l_2 \in \Gamma$. 根据公式 (23) 得到 $l_2'(iE) = U$, 从而复合映射 $f_2 = f_1 \circ l_2^{-1}$ 在点 iE 的导数等于 B; 在 $U = E$ 的情形则取 $l_2(Z) \equiv Z$, 从而 $f_2(iE) = iE, f_2'(iE) = B$.

现在设 $K: Z \to (Z + iE)^{-1}(Z - iE)$ 为凯莱变换. 它把 H 映到了广义单位圆盘 D (见本目开始时的例子). 我们有 $K(iE) = 0, K'(iE) = E$, 从而 $g = K \circ f_2 \circ K^{-1}$ 为 D 的自同构满足 $g(0) = 0$ 和 $g'(0) = B$. 由于矩阵 B 的正定性, 它的所有特征值 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 为正, 而对 n 重迭代 $g^{(\nu)} = g \circ g^{(\nu-1)}$, 其在点 0 导数矩阵的特征值为 $\lambda_1^\nu, \cdots, \lambda_n^\nu$.

但是, 因为 D 为有界区域, 故按蒙泰尔 (Montel) 定理, 迭代族 $g^{(\nu)}$ 为紧, 并由于正规化 $g^{(\nu)}(0) = 0$ 知, 这种迭代的任意子序列的极限是个双全纯映射 [1]. 因为当 $\lambda_j \neq 1$, 幂 λ_j^ν 或者趋向于 0、或趋向于 ∞, 这与极限映射的双全纯性相矛盾, 故而所有 $\lambda_j = 1$, 这表明矩阵 $B = g'(0) = E$. 由定理 4 有 $g(Z) = Z$, 从而 f_2 为恒同映射, 即 $f = l_1^{-1} \circ l_2 \in \Gamma$. □

注. 在附加假定条件: 自同构 $f \in \mathrm{Aut}\ H$ 可连续延拓到闭包 $\overline{H}$ 下, 定理 5 还可这样来证明: 用线性变换把 H 变到管状区域 $T = \mathbb{R}^n(x) + iC^+$, 其底为锥 $C^+ \subset \mathbb{R}^n(y)$ (参看第 2 目), 这时不失一般性, 可假设 C^+ 属于正象限 $\{y_1 > 0, \cdots, y_n > 0\}$.

设 $f = \{f_1, \cdots, f_n\}$; 我们固定一点 $x^0 + iy^0 \in T$, 并记 $g_k(\zeta) = f_k(x^0 + \zeta y^0)$, 其中 $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. 在任意 $\eta > 0$ 下, 点 $z = x^0 + \xi y^0 + i\eta y^0 \in T$, 且 $\mathrm{Im}\ g_k(\zeta) > 0$, 而由于 f 把区域 T 的骨架 (即 $\mathbb{R}^n(x)$) 变到自己, 故当 $\eta = 0$ 时 $\mathrm{Im}\ g_k(\zeta) = 0$. 因此, 对任意 $k = 1, \cdots, n$, 函数 $g_k(\zeta)$ 满足切博塔廖夫 (Chebotarëv) 引理 (参看卷 I, 第 Ⅳ 章习题 12) 的条件, 故为线性. 由此得到映射 f 的线性性.

[1] 这是胡尔维茨 (Hurwitz) 定理的高维类比 (卷 I, 第 39 目); 参看第 V 章习题 3.

11. 法图 (Fatou) 的例子

在卷 I 中曾证明复平面 $\mathbb{C}$ 的任意全纯自同构, 像对具任意半径的圆盘 $\{|z|<R\}$ 一样, 都是线性分式的 (更准确地说, 甚至是线性的). 由前面一目的结果立刻得到, 当 $n>1$ 时半径为任意 R 的球 $\{|z|<R\}$ 和多圆盘 $\{\|z\|<R\}$ 的自同构也是线性分式的.

但是对 $n>1$ 则有别于平面情形, 当 $R\to\infty$ 时取极限的过程却不可能发生: 容易看出当 $n>1$ 时, 在 $\mathbb{C}^n$ 中存在非线性的自同构. 例如, 任意映射

$$f:(z_1,z_2)\mapsto(z_1+\varphi(z_2),z_2), \tag{1}$$

其中 φ 为任意单变量整函数, 是全纯自同构. 事实上, 它全纯于 $\mathbb{C}^2$, 且其逆 $(w_1,w_2)\to(w_1-\varphi(w_2),w_2)$ 也全纯于 $\mathbb{C}^2$.

我们还注意, 对于紧化空间 $\overline{\mathbb{C}}^n$ 和 $\mathbb{P}^n$, 全纯自同构仍然是线性分式的.

另外, $\mathbb{C}$ 到自身的双全纯映射是满的, 即是到 $\mathbb{C}$ 上的映射 (从而是线性的). 当 $n>1$ 时这个论断也不再成立, 这可由 P. 法图在 1922 年构造的一个例子看出. 我们给出这个例子的一个经简化版本.

我们考虑 $\mathbb{C}^2$ 的两个自同构, 线性的是

$$A:(z_1,z_2)\mapsto(-az_1,az_2),\quad 0<a<1, \tag{2}$$

而非线性的是

$$\eta:(z_1,z_2)\mapsto(z_2,a^2z_1+(1-a^2)z_2^2). \tag{3}$$

自同构 η 有两个不动点 (0,0) 和 (1,1). 在它们中的第一个,

$$\eta'(0)=\begin{pmatrix}0&1\\a^2&0\end{pmatrix}$$

是具特征值 $\lambda=\pm a$ 的矩阵, 其模小于 1, 因而这个点是迭代族 $\eta^\nu=\eta\circ\eta^{\nu-1}(\eta^1=\eta;\nu=2,3,\cdots)$[1] 的吸收点.

再考虑函数方程

$$\eta\circ f=f\circ A, \tag{4}$$

如果令 $f=(f_1,f_2)$, 它则可重写为形式

$$f_2(z)=f_1(Az),\quad a^2f_1(z)+(1-a^2)f_2^2(z)=f_z(Az), \tag{5}$$

从而推导出关于函数 f_1 的一个方程:

$$a^2f_1(z)+(1-a^2)f_1^2(Az)=f_1(A_z^2) \tag{6}$$

[1] 在第二个不动点 (1,1), 特征值中的一个其模小于 1, 而另一个大于 1.

(在 (5) 的第二个方程中代入第一个方程中的 f_2 的表达式).

我们将证明, 方程 (6) 具有在原点的一个解, 其形式为

$$f_1(z) = z_1 + z_2 + \sum_{|k|\geqslant 2} b_k z^k = z_1 + z_2 + \varphi(z), \quad k = (k_1, k_2). \tag{7}$$

为此我们注意到, 函数 φ 方程

$$a^2\varphi(z) - \varphi(A^2 z) = (a^2 - 1)(a(z_2 - z_1) + \varphi(Az))^2, \tag{8}$$

而在研究这后面一个方程时我们将利用下面的方法. 如果对所有 k, $|a_k| \leqslant |b_k|$, 我们将其记为 $\sum a_k z^k \ll \sum b_k z^k$, 并记 $\|\sum a_k z^k\| = \sum |a_k| z^k$. 因为 $A^2 z = (a^2 z_1, a^2 z_2)$, 故 $a^2\varphi(z) - \varphi(A^2 z) = \sum\limits_{|k|\geqslant 2} b_k(a^2 - a^{2|k|})z^k$, 从而

$$\|a^2\varphi(z) - \varphi(A^2 z)\| \gg a^2(1 - a^2)\|\varphi(z)\|.$$

另一方面,

$$\|(a(z_2 - z_1) + \varphi(Az))^2\| \ll a^2(z_1 + z_2 + a\|\varphi(z)\|)^2,$$

故由 (8) 我们得到

$$\|\varphi(z)\| \ll (z_1 + z_2 + a\|\varphi(z)\|)^2. \tag{9}$$

现在代替 (9) 而去考虑方程

$$\Phi(t) = (t + a\Phi(t))^2;$$

此方程有解 $\Phi(t) = \dfrac{1}{2a^2}(1 - 2at - \sqrt{1 - 4at}) = \sum\limits_{\mu\geqslant 2} c_\mu t^\mu$, 其中 $c_\mu > 0$, 并且此级数在 $t = 0$ 的邻域中收敛. 不难看出, $\varphi(z) \ll \Phi(z_1 + z_2)$ [1], 故 φ 的级数从而 f 的级数在点 $z = 0$ 的邻域中收敛. 如此一来, 方程 (4) 便在原点有全纯解 f.

我们回到对这个例子的描述. 由方程 (4) 得到 $f = \eta^{-1} \circ f \circ A$, 由此经迭代我们得到 $f = \eta^{-1} \circ (\eta^{-1} \circ f \circ A) \circ A = \eta^{-2} \circ f \circ A^2$, 一般地, 有

$$f(z) = \eta^{-\nu} \circ f \circ A^\nu(z), \quad \nu = 1, 2, \cdots. \tag{10}$$

由于 A 的可收缩性, 从此关系式知道 f 被延拓为全纯映射 $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ (事实上, 对任意 $z \in \mathbb{C}^2$, 在 ν 充分大时点 $A^\nu(z)$ 落在了 f 有定义并全纯的 0 的邻域中, 从而使 (10) 的右端因而左端在整个 $\mathbb{C}^2$ 上有定义并全纯). 我们把如此延拓得到的映射仍旧记作 f.

---

[1] 要证明此论断可以利用对 $|k| = \mu$ 的归纳法; 我们应注意, (9) 通过小于 $|k|$ 的系数对展式 $\|\varphi(t)\| = \sum\limits_{|k|\geqslant 2} |b_k| z^k$ 的系数作出了估值.

进而, 因为我们有雅可比 $J_\eta(z)=J_A(z)=-a^2$, 并对 (4) 中的复合函数进行微分, 得到了 $J_\eta(f)\cdot J_f(z)=J_f(Az)\cdot J_A(z)$, 于是对所有 $z\in\mathbb{C}^2$ 我们有 $J_f(z)=J_f(Az)$. 由迭代得到了 $J_f(z)=J_f(A^\nu z),\nu=1,2,\cdots$, 又因为 $A^\nu z\to 0$, 那么从 J_f 的连续性有结论 $J_f(z)=J_f(0)$ 对所有 $z\in\mathbb{C}^2$ 成立. 因为在原点的邻域 $f_1(z)=z_1+z_2+\cdots, f_2(z)=f_1(Az)=-az_1+az_z+\cdots$, 故 $J_f(0)=2a\neq 0$, 从而映射 f 局部双全纯. 从关系式 (10) 得出结论: 它是整体双全纯的.

我们要证明, 在所构造的这个映射下 $\mathbb{C}^2$ 的像等于自同构 η 的不动点的收缩区域

$$G=f(\mathbb{C}^2)=\left\{z\in\mathbb{C}^2:\lim_{\nu\to\infty}\eta^\nu(z)=0\right\}. \tag{11}$$

事实上, 如果 $z\in G$, 则存在点 $z'\in\mathbb{C}^2$ 使得 $z=f(z')$, 于是由 (10) 我们有 $\eta^\nu(z)=\eta^\nu\circ f(z')=f(A^\nu z')\to f(0)=0$, 其中 $\nu\to\infty$. 反之, 如果 $\eta^2(z)\to 0$, 则由于 f 的值覆盖了原点的某个邻域, 故对充分大的 ν 存在点 $z'\in\mathbb{C}^2$ 使得 $\eta^\nu(z)=f(z')$, 从而由 (10) 知 $z=\eta^{-\nu}\circ f(z')=f(A^{-\nu}z')$, 即 $z\in G$.

为了更加详细地描述 [1] 区域 G, 记 $\varphi_0(z)=z_1,\varphi_1(z)=z_2$ 较为方便, 而后则按顺序地令

$$\varphi_{\nu+1}(z)=a^2\varphi_{\nu-1}(z)+(1-a^2)\varphi_\nu^2(z),\quad \nu=1,2,\cdots. \tag{12}$$

于是根据 (3) 我们得到了 $\eta^\nu(z)=(\varphi_\nu(z),\varphi_{\nu+1}(z))$, 从而像 $f(\mathbb{C}^2)$ 可写为集合

$$G=\left\{z\in\mathbb{C}^2:\lim_{\nu\to\infty}\varphi_\nu(z)=0\right\}. \tag{13}$$

我们发现, 如果对 $z\in\mathbb{C}^2$, 两个相邻的指标 $|\varphi_{\nu-1}(z)|\leqslant r, |\varphi_\nu(z)|\leqslant r, r<1$, 则由 (12) 知, 在此点有 $|\varphi_{\nu+1}(z)|\leqslant a^2r+(1-a^2)r=r$. 于是对所有后续的指标 μ, 在此点有 $|\varphi_\nu(z)|\leqslant r$, 从而 $\overline{\lim\limits_{\nu\to\infty}}|\varphi_\nu(z)|=l\leqslant r$. 选取指标的子序列使 $|\varphi_{\nu_j+1}(z)|\to l$, 我们从 (12) 得到 $l\leqslant l(a^2+(1-a^2)l)$. 如果 $l\neq 0$, 则由后面的这个不等式知 $a^2+(1-a^2)l\geqslant 1$, 从而 $l\geqslant 1$, 这与 $l\leqslant r$ 相矛盾, 因此 $l=0$, 这表明 $\lim\limits_{\nu\to\infty}\varphi_\nu(z)=0$, 即所考虑的这个点 $z\in G$.

由这个所发现的事实知, 集合 $D_1=\{|z_1|<1,|z_2|\leqslant 1\}\subset G$, 这是因为对任意点 $z\in D_1$, 我们有 $|\varphi_2(z)|<a^2+(1-a^2)=1$ 及类似地 $|\varphi_3(z)|<1$. 完全相同地, $D_2=\{a^2|z_1|+(1-a^2)|z_2|^2\leqslant 1,|z_2|<1\}\subset G$, 这是因为这个集合中的点有 $|\varphi_3(z)|<1$ 和 $|\varphi_4(z)|<1$. 点 $z=(1,1)$ 是对自同构 η 的不动点, 而由 (11) 可看出, 它不属于 G; 由前面所述知是 G 的边界点 [2].

这个所构造的例子的最令人感兴趣的特别之处是区域 G 远没有填满整个空间

---

[1] 该描述属于 E. Udovičić.

[2] 可以证明在环面 $T=\{|z_1|=1,|z_2|=1\}$ 上还有 G 的另外两个边界点 $(e^{2\pi i/3},e^{-2\pi i/3})$ 和 $(e^{-2\pi i/3},e^{2\pi i/3})$, 它们在自同构 η 下互换; T 的其他的点则属于 G.

$\mathbb{C}^2$. 为了确信这点, 记 $b_t = \dfrac{t+a^2}{t(1-a^2)}$, 并对 $0 < t \leqslant 1$ 考虑集合

$$E_t = \left\{ z \in \mathbb{C}^2 : \left|\frac{z_2}{z_1}\right| \geqslant t, |z_2| \geqslant b_t \right\}. \tag{14}$$

不难看出, 如果 $z \in E_t$, 则 $\eta(z) \in E_t$ (事实上, 根据 (3) 点 $\eta(z)$ 的坐标等于 $\eta_1(z) = z_2, \eta_2(z) = a^2 z_1 + (1-a^2)z_2^2$, 于是由 (14), 我们得到 $\left|\dfrac{\eta_2(z)}{\eta_1(z)}\right| \geqslant (1-a^2)|z_2| - a^2\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| \geqslant \dfrac{t+a^2}{t} - \dfrac{a^2}{t} = 1 \geqslant t$, 进而有 $|\eta_2(z)| \geqslant |\eta_1(z)| = |z_2| \geqslant b_k$). 由此得到对于点 $z \in E_t$, 数量 $\eta^\nu(z)$ 不可能在 $\nu \to \infty$ 时趋向于 0, 这意味着 $E_t \subset \mathbb{C}^2 \setminus G$, 其中 $t \in (0,1]$ 为任意. 但是这样一来, $\mathbb{C}^2 \setminus G$ 属于集合 $E = \bigcup\limits_{t\in(0,1]} E_t$, 而它在赖因哈特图上的像被线段 $\{0 < |z_1| \leqslant b, |z_2| = b\}$ 和抛物线的一段 $\{a^2|z_1| = (1-a^2)|z_2|^2 - |z_2|, |z_1| \geqslant b\}$ 所界定, 其中 $b = b_1 = \dfrac{1+a^2}{1-a^2} > 1$.

我们所研究的结果已展示在图 12 上, 其中的斜阴影线段部分确实是属于 G 的, 而垂直的阴影部分是真正不属于 G 的部分. 我们还注意到, 参数值 a 越小则我们的估值越精确 (当 $a \to 0$, 区域 $D_1 \bigcup D_2$ 趋向于半带状 $\{|z_1| \geqslant 0, |z_2| < 1\}$, 而 E 趋向它的补集).

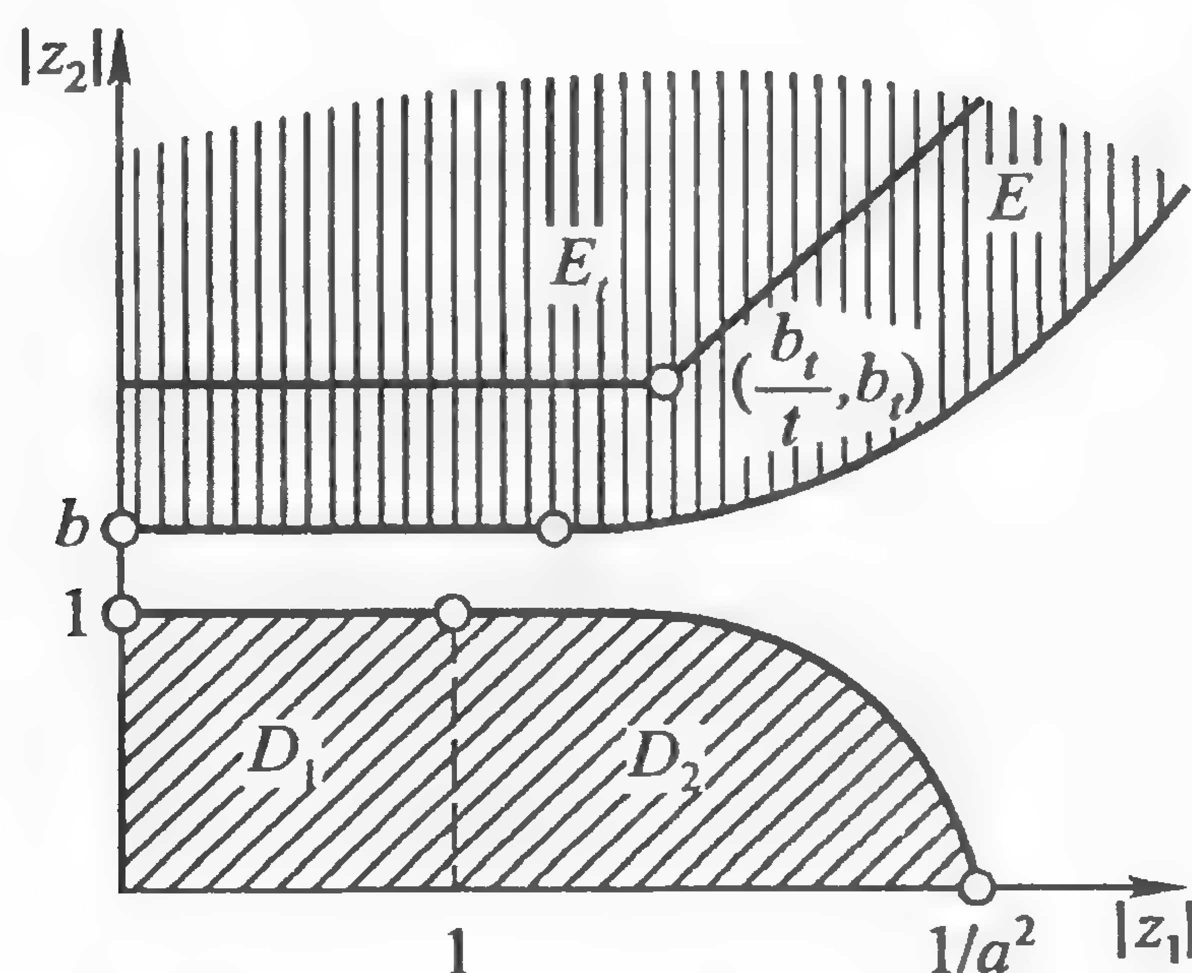


图 12

因此, 已构造出了一个非退化的、全纯的 (甚至是双全纯的) 映射 $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$, 使得 $\mathbb{C}^2 \setminus f(\mathbb{C}^2)$ 这个没有取到值的集合包含了一个非空开集.

这个例子表明不管是皮卡 (Picard) 定理还是索霍茨基 (Sokhotskiǐ) 定理都不能以直接的方式推广到 $n > 1$ 时的 $\mathbb{C}^n$ 的全纯映射上. 至于这些定理推广到高维的形式我们将在下一章加以阐述.

问题

1. (a) 设 l_1 和 l_2 为 $\mathbb{C}^2$ 中的两条复直线, 它们互不正交. 证明圆 $\gamma \subset l_1$ 在 l_2 的正交投影是 l_2 中的一个圆;

(b) 设 l_1 是 $\mathbb{C}^2$ 中一个实 2 维平面而 l_2 为复直线. 证明, 如果把任意圆 $\gamma \subset l_1$ 仍然投射为 l_2 上的圆. 则 l_1 或者是复的或者是反复结构的直线.

2. 证明 $\mathbb{C}^2$ 中两条不同的复直线不可能有多于一个的公共点.

3. 证明在 $\mathbb{P}^n$ 中两个任意的 (复) 超平面必相交.

4. 证明赖因哈特变换 $\alpha(z) = (|z_1|, \cdots, |z_n|)$ 将与集合 $\{z_1, \cdots, z_n = 0\}$ 不相交的任意区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 映成空间 $\mathbb{R}^n$ 中的区域.

5. 证明, 完全哈托格斯区域为凸当且仅当其在变换 $\beta(z) = ('z, |z_n|)$ 下是 $\mathbb{R}^{2n-1}$ 中的凸域.

6. (L. A. Aizenberg) 设对区域 D 有极小闭集 $B \subset \partial D$ 使得对所有 $\overline{D}$ 中全纯函数有 $\sup\limits_{z\in B}|f(z)| = \sup\limits_{z\in D} f(z)$, 则称 B 为区域 D 的伯格曼 (Bergman) 边界. 显然 B 包含在区域 D 的希洛夫边界 S 中. 证明对区域 $D = \{0 < |z_1| < 1, |z_2| < |z_1|^{-\ln|z_1|}\} \subset \mathbb{C}^2$, 这两个边界不相同: $S = \{|z_1| \leqslant 1, |z_2| = |z_1|^{-\ln|z_1|}\}$, 而 $B = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$.

7. 称集合 M 为类 $\mathscr{F}$ 中函数的唯一性集合是说, 如果对任意函数 $f \in \mathscr{F}$, 它在 M 上为零时必恒等于零. 证明, 下面的集合是对 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^2)$ 中函数的唯一性集合:

(a) $\mathbb{C}^2$ 中的实超平面;

(b) 实二维平面 $\{z_1 = \bar{z}_2\}$;

(c) 弧 $\{z_2 = \bar{z}_1, y_1 = x_1 \sin(1/x_1)\}$.

8. 给出一个点序列的例子, 它收敛于多圆盘 U^n 的中心并且是 $\mathscr{O}(U^n)$ 中函数的唯一性集合.

9. 证明, 多圆盘 U^n 的骨架的任意非空开子集为类 $\mathscr{O}(U^n)\bigcap C(\overline{U}^n)$ 中函数的唯一性集合.

10. 证明, 如果在每个固定的 $(z_1^0, \cdots, z_{\nu-1}^0, z_{\nu+1}^0, \cdots, z_\nu^0), \nu = 1, \cdots, n$ 时, 函数 $f(z_1, \cdots, z_n)$

(a) 是关于 z_ν 的多项式, 则它是个多项式;

(b) 是 z_ν 的有理函数, 则它是有理函数.

11. 举出函数 $f(z_1, z_2)$ 的例子, 它对 z_1 在 $\{|z_1| < 1\}$ 中全纯, 其中 $z_2, |z_2| < 1$ 为任意, 另外它对 z_2 在 $\{|z_2| < 1\}$ 中连续, 其中 $z_1, |z_1| < 1$ 为任意, 而它不是对 $z = (z_1, z_2)$ 在双圆盘 $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ 中的连续函数.

12. 设 U^n 为多圆盘, Γ 为其骨架; 证明, 如果对函数 $f \in \mathscr{O}(U^n)\bigcap C(\overline{U}^n)$, 在 Γ 上 $|f| =$ 常数, 则 f 是有理函数.

13. 构造幂级数, 使它的收敛区域是:

(a) 球 $\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$;

(b) 区域 $\{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1| + |z_2| < 1\}$.

14. 证明, 任何凸的赖因哈特区域是对数凸的.

15. 证明, 在施瓦茨引理条件 (第 9 目定理 6) 中不等式 (9) 可以用下述方式更加精细化: $\|f(z)\|_2 \leqslant \|z\|_1^m$, 其中 $m \geqslant 1$ 是将 f_ν 展成齐次多项式的级数时那些最低非零多项式的最小次数.

16. 设 f 为单位球 $B \subset \mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^n$ 内的全纯映射, 满足 $f(0) = 0$. 证明, 这时对任意数 $p \geqslant 1$ 成立下面对施瓦茨不等式的推广:

$$\sum_\nu |f_\nu(z)|^p \leqslant |z|^p \sup_B \sum_\nu |f_\nu|^p, \quad z \in B.$$

17. 给出出现在本书前一版中一个命题的反例, 这个命题是: 如果在施瓦茨引理中 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 为具严格凸球的范数, 则等式 $\|f(z)\|_2 = \|z\|_1$ 在复子空间 $L \subset B_1$ 成立.

18. 证明, 球 $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ 双全纯等价于区域 $D = \{y_n > |'z|^2\}$. (提示: 考虑映射 $'z \mapsto 'z/(1+z_n), z_n \mapsto i(1-z_n)/(1+z_n)$.) 我们发现庞加莱首先考虑了曲面 $\{z \in \mathbb{C}^2 : y_2 = |z_1|^2\}$.

19. (V. V. Rabotin) 我们以 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ 表示所有全纯映射 $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 的集合, 其拓扑为使它在紧集上具一致收敛性 (如果在任意 $K \Subset \mathbb{C}^n$ 上 $f^\mu \to f$ 是一致的, 则称点序列 $f^\mu \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ 收敛于 f). 设 Q 为拟满映射 $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ 的集合, 即那样的映射使 $f(\mathbb{C}^n)$ 稠于 $\mathbb{C}^n$, 而 F 为其补集 (特别, 法图型的映射, 即一个同胚使得 $f(\mathbb{C}^n)$ 不稠于 $\mathbb{C}^n$, 属于 F). 证明:

(a) 集合 F 稠于 $\mathscr{O}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$, 特别点 $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$ 的任意邻域中存在法图型的映射;

(b) F 和 Q 为道路连通.

20. 举出全纯曲线 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ 的例子, 使得它对所有可能的趋向无穷的序列 $\zeta^\mu \in \mathbb{C}$ 的极限值集合等于 $\mathbb{C}^n$. (提示: 利用卷 I 第 V 章的问题 9.)

21. 证明具有上面问题 20 性质的全纯映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^n$ 的集合在空间 $\mathscr{O}(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n)$ 中处处稠密.

第 II 章

基本的几何概念

本章将介绍高维复分析的一些基本几何对象. 其部分内容 (§7, 特别是 §9) 包含了从其他数学领域中引述的辅助素材, 它们对进一进构建理论是不可或缺的. 这种素材可以略去, 因为在以后的阅读中如果发现有必要则可重新回来.

§5. 流形和斯托克斯公式

12. 流形的概念

我们假定读者已熟悉这些概念 [1] 并且我们只局限于复习以及做一些复结构特征的描述.

设给出了连通的豪斯多夫空间 M, 其具有可数的开集基. 假定 M 具有覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ (A 为任意的指标集). 其中区域 $U_\alpha \subset M$ 同胚于空间 $\mathbb{R}^n$ 的欧几里得球 B_α. 偶对 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, 其中 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to B_\alpha$ 为同胚, 被称做一个分图表, 而称分图表的一个组 $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 为覆盖 $\mathscr{U}$ 的总图表. 称邻域 U_α 为坐标邻域, 而称向量变量 $x^\alpha = (x_1^\alpha, \cdots, x_n^\alpha) = \varphi_\alpha(p), p \in U_\alpha$ 为使用在 U_α 上的局部坐标.

如果 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta \neq \varnothing$, 则有同胚

$$\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \to B_\beta \tag{1}$$

---

[1] 例如, 参看 M. Spivak, *Calculus on manifolds A modern approach to classical theorems of advanced calculus*, Benjamin, New York and Amsterdam, 1965. 有中译本.

(见图 13); 称这样的同胚为总图表 $\mathscr{A}$ 的毗连关系. 因为相容关系是 $\mathbb{R}^n$ 中开集间的同胚, 故而可谈及其光滑性. 如果总图表 $\mathscr{A}$ 的所有毗连关系都是 C^k 类的映射, 则称 $\mathscr{A}$ 是个 k - 光滑总图表. 当 $k \geqslant 1$, 所有 $\varphi_{\alpha\beta}$ 为微分同胚, 故而 $\det \varphi_{\alpha\beta} \neq 0$[1].

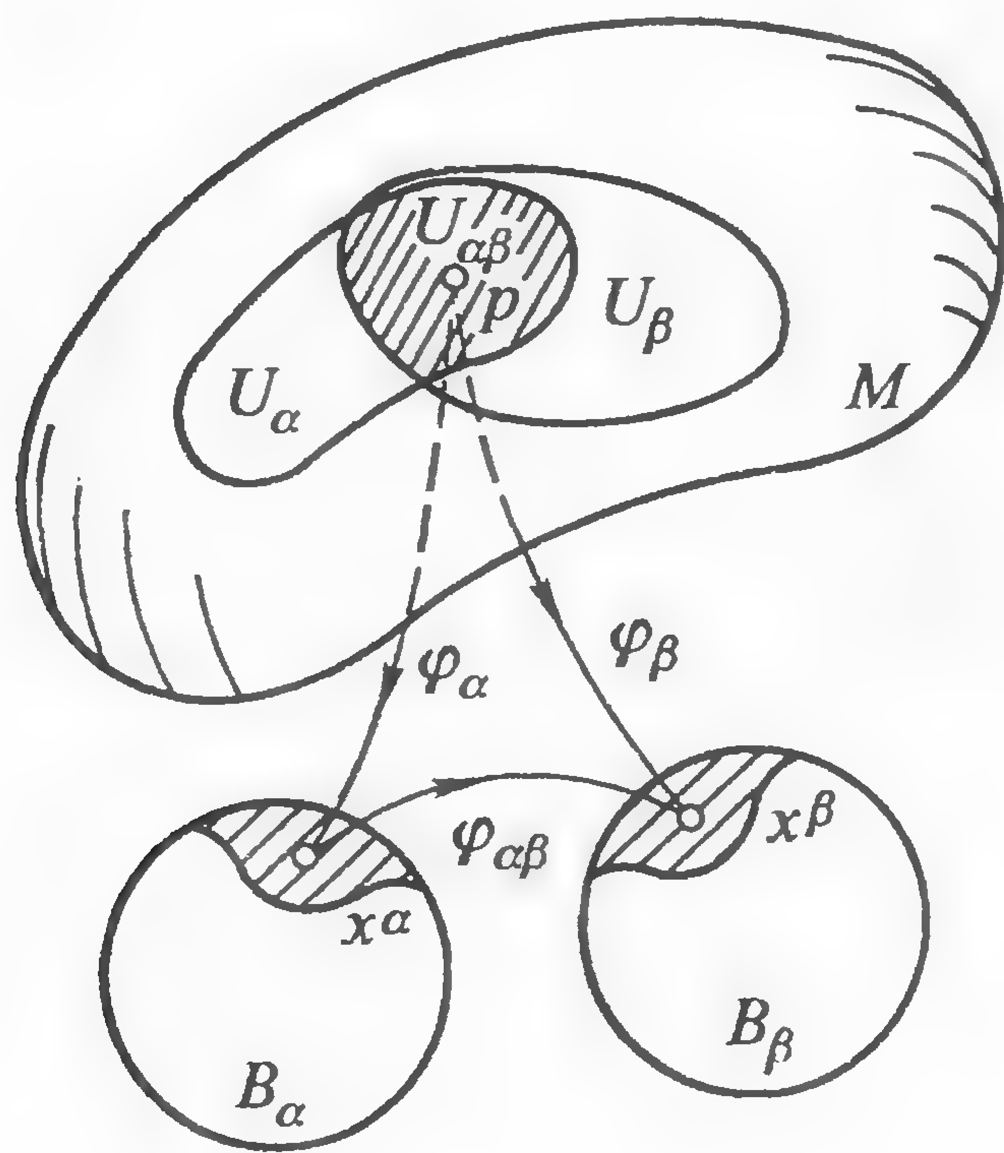


图 13

为了到达流形的概念, 还需要走出最后一步: 摆脱具体总图表的选取. 对于这个条件, 假设给出两个总图表 $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 和 $\mathscr{A}' = \{(U'_\beta, \varphi'_\beta)\}_{\beta\in B}$, 其为 k– 光滑, 且它们相应的空间 M 的覆盖为 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\{U'_\beta\}_{\beta\in B}$; 我们称这两个总图表是等价的是说, 如果它们的并 $\mathscr{A} \bigcup \mathscr{A}' = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U'_\beta, \varphi'_\beta)\}_{\alpha\in A, \beta\in B}$ 也是 k– 光滑总图表. 最后这个条件的意思表示在从一个总图表的分图表到另一个总图表的分图表之间的毗连关系具有与在每个分别总图表中的毗连关系具有相同的光滑性. 称空间 M 连同在其上定义的 k - 光滑总图表的等价类为 k - 光滑流形. 当 $k = 0$ 称该流形为拓扑流形. 覆盖 $\mathscr{U}$ 中区域所同胚的球的维数被称为流形的 (实) 维数 $(n = \dim_{\mathbb{R}} M)$.

在 k - 光滑流形 M 上可以论及 C^l 类函数, $l \leqslant k$, 这是这样的函数 $f: M \to \mathbb{R}$, 它在任意的局部坐标 $x^\alpha = \varphi_\alpha(p)$ 下, 复合 $f \circ \varphi_\alpha^{-1}$ 是在开集 $\varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$ 上的 C^l 类函数. 显然, 这个定义是合理的, 既不依赖于所考虑的等价类中总图表的选取, 也不依赖总图表中分图表的选取.

复流形的概念以同样的架构来定义. 设空间 M (具相同的假定) 被开集 U_α 所覆盖, 它们同胚于 $2n$ 维球, 而 $\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ 为这些同胚 ($z^\alpha = \varphi_\alpha(p)$ 被称为局部坐标). 称总图表 $\mathscr{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 为复的是说, 如果所有的毗连关系 $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ $(\alpha, \beta \in A)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中对应开集间的双全纯映射. 称两个这样的总图表为等价是说它们的并也是个复的总图表. 称空间 M 连同在这种关系下的等价类为复流形. 数 $n = \dim_{\mathbb{C}} M$ 为流形的 (复) 维数. 我们给出一些复流形的例子.

(1) 空间 $\mathbb{C}^n$ 和它中间的区域是 n 维复流形的平凡例子. 对 $\mathbb{C}^n$ 可取由一个分图表组成的总图表: $\mathbb{C}^n$ 本身及恒同映射 φ. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 可以用球族 $B_\alpha = \{|z - a| < \delta(a, \partial D)\}, a \in D$ 覆盖 (这里的 $\delta(a, \partial D)$ 为点 a 到 ∂D 的欧几里得距离); 所有映射

[1] 注意, $(\varphi_{\alpha\beta})^{-1} = \varphi_{\beta\alpha}$, 故对 C^k 类总图表, 与 $\varphi_{\alpha\beta}$ 一起 $(\varphi_{\alpha\beta})^{-1}$ 也属于这个类.

φ_α 和毗连关系都是恒同映射.

(2) *复射影空间* $\mathbb{P}^n$ 可以有一个有限的开覆盖 $U_j = \{[w_0, \cdots, w_n] \in \mathbb{P}^n : w_j \neq 0\}, j = 0, \cdots, n$ (显然, 条件 $w_j \neq 0$ 不依赖于类 $[w]$ 的代表元的选取). 作为 U_j 中的局部坐标, 我们选取

$$\varphi_j([w]) = \left(\frac{w_0}{w_j}, \cdots, \frac{w_{j-1}}{w_j}, \frac{w_{j+1}}{w_j}, \cdots, \frac{w_n}{w_j}\right) : U_j \to \mathbb{C}^n;$$

显然, $\varphi_j(U_j) = \mathbb{C}^n$. 不难相信, 总图表 $\{(U_j, \varphi_j)\}_{j=0}^n$ 是复的, 即它的所有毗连关系是双全纯的 1). 等价于此的总图表将 $\mathbb{P}^n$ 定义为一个 n 维复流形.

特别地, $\mathbb{P}^1 = \overline{\mathbb{C}}$ 被两个开集覆盖: $U_0 = \{[w_0, w_1] : w_0 \neq 0\}, U_1 = \{[w_0, w_1] : w_1 \neq 0\}$, 在第一个中有局部坐标 $z = w_1/w_0$, 而在第二个的坐标是 $w_0/w_1 = 1/z$,

(3) *空间* $\overline{\mathbb{C}}^n$ (见第 1 目) 也是个 n 维复流形. 为确认此论断, 就像前一个例子那样, 我们覆盖具变量 z_ν 的球面 $\overline{\mathbb{C}}$ 以两个邻域 $U_0^{(\nu)} = \mathbb{C}, U_1^{(\nu)} = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. 于是 $\overline{\mathbb{C}}^n$ 被 2^n 个邻域 $U_j = U_{j_1}^{(1)} \times \cdots \times U_{j_n}^{(n)}$ 覆盖, 其中 $j = (j_1, \cdots, j_n)$ 为由 0 和 1 组成的任意数组. 在每个 U_j 中使用的坐标是 $z^j = (z_1^{j_1}, \cdots, z_n^{j_n})$, 其中如果 $j_\nu = 0$, 则 $z_\nu^{j_\nu} = z_\nu$, 如果 $j_\nu = 1$ 则 $z_\nu^{j_\nu} = 1/z_\nu$. 总图表 $\{(U_j, z^j)\}_{j=1}^{2^n}$ 显然是复的.

(4) *格拉斯曼流形* $G(n, k), k < n$, 定义为 $\mathbb{P}^n$ 中 k 维射影子空间的集合, 或者等价地, $\mathbb{C}^{n+1}$ 中通过原点的 $(k+1)$ 维子空间的集合 2). 这是射影空间 $G(n, 0) = \mathbb{P}^n$ 的推广.

为了对 $G(n, k)$ 给出一个分析的描述, 我们固定它的一个点 Π, 即 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的一个 $(k+1)$ 维子空间, 并且在其上选取 $k+1$ 个线性无关的向量 $a^\mu = (a_0^\mu, \cdots, a_n^\mu), \mu = 0, \cdots, k$, 并用它们构造一个矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_0^k \\ & \cdots\cdots & \\ a_n^0 & \cdots & a_n^k \end{pmatrix}, \tag{2}$$

该矩阵的秩等于 $k+1$. 如果在 Π 中选取了另一组基 $\{b^\nu\}$, 则它可经 $\{a^\mu\}$ 以公式 $b^\nu = \sum\limits_{\mu=0}^{k} c_{\mu\nu} a^\nu$ $(\nu = 0, \cdots, k)$ 表出, 其中 $C = (c_{\mu\nu})$ 为非退化矩阵, 于是相应的矩阵有

$$B = \begin{pmatrix} b_0^0 & \cdots & b_0^n \\ & \cdots\cdots & \\ b_n^0 & \cdots & b_n^n \end{pmatrix} = AC. \tag{3}$$

---

1)我们来写出这个例子的关系式 φ_{01}. 有 $U_{01} = \{[w] : w_0, w_1 \neq 0\}, \varphi_0([w]) = (w_1/w_0, \cdots, w_n/w_0) = z, \varphi_0(U_{01}) = \mathbb{C}^n \setminus \{z_1 = 0\}$. 另外 $\varphi_0^{-1}(z) = [1, z], \varphi_1([1, z]) = (1/z_1, z_2/z_1, \cdots, z_n/z_1)$, 表明 $\varphi_{01} : (z_1, \cdots, z_n) \mapsto (1/z_1, z_2/z_1, \cdots, z_n/z_1)$.

2)这两个集合间的对应关系由映射 $\rho : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ 实现, 它的每一个点关联一条通过点 0 和这个点的一条复直线.

反之, 任意秩为 $k+1$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$ 的 $(k+1) \times (k+1)$ 矩阵 A 可以与一个通过原点的 $(k+1)$ 维平面 $\Pi \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 相关联, 即由这个矩阵的列向量张成的平面 (这些列向量线性无关). 这同一个平面 Π 也将对应于由 A 右乘非退化 $(k+1) \times (k+1)$ 矩阵 C 得到的矩阵 B. 因此, 格拉斯曼流形 $G(n,k)$ 可以解释为秩为 $k+1$ 的 $(n+1) \times (k+1)$ 矩阵类的集合, 其中的矩阵被下述等价关系所分类: $A \sim B$, 如存在一个非退化的 $(k+1) \times (k+1)$ 矩阵 C 使得 $B = AC$.

这个解释让我们在 $G(n,k)$ 中可以引进坐标. 对给定的点 $\Pi \in G(n,k)$, 我们选取它的代表矩阵 (2), 并且对任意数组 $\nu = (\nu_0, \cdots, \nu_k)$, $0 \leqslant \nu_0 < \nu_1 < \cdots < \nu_k \leqslant n$, 我们选取

$$p_\nu = \det \begin{pmatrix} a_{\nu_0}^0 & \cdots & a_{\nu_0}^k \\ & \cdots\cdots & \\ a_{\nu_k}^0 & \cdots & a_{\nu_k}^k \end{pmatrix}. \tag{4}$$

由前面所述可知, 并非所有的数 p_ν 都等于 0, 并且它们被准确确定到一个非零复数因子 (在 A 换作矩阵 $B = AC$ 时, 它们被乘以因子 $\det C$). 反之, 给出矩阵 A 的子式 p_ν 便决定了对应的平面 Π, 这是因为向量 z 与 $\{a^\mu\}$ 的线性相关条件是矩阵 $(a^0, \cdots, a^k, z)$ 的秩等于 $k+1$ 并可用这些子式表达. 同样清楚的是, 对所有子式乘以非零复数因子并不改变平面 Π.

因此, 数 (4) 是个推广了的齐次坐标, 它被称做流形 $G(n,k)$ 的普吕克 (Plücker) 坐标. 它们的个数等于从 $n+1$ 中取 $k+1$ 的组合数, 即

$$N = \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n+1)n \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ \cdots \ \cdot (k+1)}. \tag{5}$$

$G(n,k)$ 中复流形的结构也像在射影空间中那样引进. 以邻域 $U_\nu = \{\Pi \in G(n,k) : p_\nu(\Pi) \neq 0\}$ 覆盖该流形, 我们取其中一个作为例子来考虑, 譬如 $U_{0\cdots k}$. 这个邻域的点可用矩阵

$$\begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_0^k \\ & \cdots\cdots & \\ a_k^0 & \cdots & a_k^k \\ & \cdots\cdots & \\ & \cdots\cdots & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0^0 & \cdots & a_0^k \\ & \cdots\cdots & \\ a_k^0 & \cdots & a_k^k \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix},$$

其中 E 为 $(k+1) \times (k+1)$ 单位矩阵, 而 $Z = (Z_{\alpha\beta})$ 为任意的 $(n-k) \times (k+1)$ 矩阵. 这样的表示是唯一的, 并且数 $z_{\alpha\beta}$ 可看成是在邻域 $U_{0\cdots k}$ 中的局部坐标. 这些数是任意的, 从而 $U_{0\cdots k}$ 的复维数等于

$$m = (n-k)(k+1). \tag{6}$$

类似地在该覆盖的其他区域中引进局部坐标, 而毗连关系为双全纯, 因而 $\dim G(n,k) = m$.

点 $\Pi \in G(n,k)$ 确定其普吕克坐标到一个乘法因子, 而它们的个数等于 N. 如果把它们看作是射影空间 $\mathbb{P}^{N-1}$ 的齐次坐标, 则它们定义了嵌入 $p: G(n,k) \to \mathbb{P}^{N-1}$. 因为在一般情形有 $N-1 > m$[1], 故而不是所有的普吕克坐标都是独立的, 在它们之间存在有关系, 这些关系给出了在嵌入 p 下作为 $\mathbb{P}^{N-1}$ 中的复 m 维曲面的 $G(n,k)$ 的像.

例题. 格拉斯曼流形 $G(3,1)$ 可以解释为 $\mathbb{P}^3$ 中的复直线. 如果以其上的两个点给出一条直线, 这两点的齐次坐标分别为 $[z]$ 和 $[w]$, 则其普吕克坐标为

$$p_{\mu\nu} = z_\mu w_\nu - z_\nu w_\mu, \quad \mu < \nu, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \tag{7}$$

它们有六个, 故 $p: G(3,1) \to \mathbb{P}^5$, 但根据公式 (6), $\dim G(3,1) = 4$, 于是在 $p_{\mu\nu}$ 之间只有一个关系式. 立即可验证它是

$$p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0. \tag{8}$$

因此, $G(3,1)$ 可以表示为 $\mathbb{P}^5$ 中的二次曲面, 它由齐次方程 (8) 描述. 称此曲面为*克莱因 (Klein) 二次曲面*.

* 证明, 用具坐标 $(p_{01}, \cdots, p_{23})$ 的空间 $\mathbb{C}^6$ 中的酉变换可将克莱因二次曲面变到 $z_0^2 + \cdots + z_5^2 = 0$. *

设 M 和 N 为两个复流形; 称映射 $f: M \to N$ 为全纯是说, 对任意点 $p \in M$ 映射 $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ 为全纯, 其中 φ 和 ψ 为用于点 p 和 $q = f(p)$ 的邻域中坐标的局部同胚. 显然这是个正确的定义, 即它不依赖于局部坐标的选取. 以记号 $\mathscr{O}(M,N)$ 表示从复流形 M 到复流形 N 的所有全纯映射的集合, 而 $\mathscr{O}(M)$ 像以前那样是 M 上的全纯函数集.

特别地, 在流形 $\mathbb{P}^n$ 和 $\overline{\mathbb{C}}^n$ 上的全纯函数定义为全纯依赖于它们的开覆盖邻域中所使用的局部坐标的函数. 例如, 如果函数 $g(z_1, z_2) = f(z_1, 1/z_2)$ 在点 $(a_1, 0)$ 全纯, 则函数 f 在点 $(a_1, \infty) \in \overline{\mathbb{C}}^2, a_1 \neq 0$ 全纯. 因为 g 可用泰勒级数表示

$$g(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 = 0}^{\infty} c_{k_1 k_2} (z_1 - a_1)^{k_1} z_2^{k_2},$$

且此级数在某个双圆盘 $\{|z_1 - a_1| < r_1, |z_2| < r_2\}$ 中收敛, 则 f 可由洛朗级数

$$f(z_1, z_2) = \sum_{k_1, k_2 = 0}^{\infty} c_{k_1 k_2} \frac{(z_1 - a_1)^{k_1}}{z_2^{k_2}}$$

表示, 它在点 (a_1, ∞) 的邻域 $\{|z_1 - a_1| < r_1, |z_2| > 1/r_2\}$ 中收敛.

我们注意到全纯于复流形的函数所具有的两个简单性质.

---

[1] 当 $k = n-1$ 时我们有 $N - 1 = m$, 而在 k 固定时当 n 增大则数 N 比 m 增大得更快.

定理 1 (唯一性). 如果 M 为复流形, 函数 $f, g \in \mathscr{O}(M)$ 在 M 中的一个非空开子集 (在 M 的拓扑下) 重合, 则它们在 M 上处处重合.

证明. 以 E 表示使 $f(p) = g(p)$ 的点 $p \in M$ 的集合的开核; 按假定其非空. 我们将证明 E 是个闭集. 事实上, 设点 $p_0 \in M$ 是 E 的一个极限点. 在此点的邻域 $U \subset M$ 中使用了局部参数 $\zeta = \varphi(p)$, 而函数 $f \circ \varphi^{-1}, g \circ \varphi^{-1}$ 在球 $B \subset \mathbb{C}^n$ 的点 $\zeta^0 = \varphi(p_0)$ 为全纯. 在点 ζ^0 的任意邻域 $V \subset B$ 中存在点 ζ^1 使得 $p_1 = \varphi^{-1}(\zeta^1) \in E$, 又因为在 p_1 的某个邻域中 $f \equiv g$, 故在 ζ^1 的某个邻域中有 $f \circ \varphi^{-1} \equiv g \circ \varphi^{-1}$. 由第 5 目的唯一性, 最后面的这个恒等式在 V 中处处成立, 从而 $p_0 \in E$.

因此, E 非空且同时既开又闭. 由于 M 按定义为连通, 从而得到 $E \equiv M$, 即在 M 处处成立 $f \equiv g$. □

定理 2 (极大值原理). 如果函数 $f \in \mathscr{O}(M)$ 且 $|f|$ 在 M 的内点达到极大值, 则 f 在整个 M 上为常值.

证明. 设 $|f|$ 在点 $p_0 \in M$ 达到极大值; 我们考虑使用在该点邻域中的局部参数 $\zeta = \varphi(p)$. 在点 $\zeta^0 = \varphi(p_0)$ 全纯的函数 $f \circ \varphi^{-1}(\zeta)$ 的模在该点达到极大, 故根据第 5 目函数 $f \circ \varphi^{-1}$ 在 ζ^0 的某个邻域中为常值, 这表明 f 在点 p_0 的某邻域中为常值. 由前面的定理知 f 在整个 M 为常值. □

推论. 在紧复流形上所有全纯函数都是常数.

(称流形 M 为紧是说, 如果作为拓扑空间它是紧的, 在这样的流形上任意连续函数的模总在某个点上取得极大, 从而论断由定理 2 立即得到.)

13. 闵可夫斯基 (Minkowski) 空间的复化

在 1908 年德国数学家 H. 闵可夫斯基引进了时空空间的概念, 它是点 $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ 的四维实空间并在其上赋予了“双曲”度量

$$\|x\|^2 = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2; \tag{1}$$

x_0 代表时间, 而其余的坐标则是空间的. 这个空间在相对论中起着基本作用.

根据这个理论的基本假设, 信号的速度不可能超过光速 c; 我们把光速取为 1. 方程 $\|x\|^2 = 0$ 在空间 M 中定义了一个圆锥, 称其为顶点在 $x = 0$ 的*光锥*. 它的内部 $\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < x_0^2\}$ 被分为两部分, 各自对应于 $x_0 > 0$ 和 $x_0 < 0$, 分别称做*未来锥*和*过去锥*. 它们由所有那些点组成: 根据所采取的假设, 这些点可与点 $x = 0$ 在未来或过去相联络; 而与该锥外的点则不可能联络.

在现代数学物理中出现了对空间 M 进行*紧化*的要求, 即将其作为实子空间 $\mathbb{R}^4(x)$ 嵌入到 $\mathbb{C}^4$ 中, 并且以点 $z = x + iy$ 加以完备, 根据同样的假设, 要求它们满足

$y_1^2+y_2^2+y_3^2<y_0^2$. 如果我们考虑圆锥 $C_\pm=\{y\in\mathbb{R}^4: y_0^2-y_1^2-y_2^2-y_3^2>0, y_0\gtrless 0\}$, 和在它们上面的管状区域

$$M_\pm^c=\{z=x+iy: x\in\mathbb{R}^4, y\in C_\pm\}=\mathbb{R}^4(x)+iC_\pm, \tag{2}$$

则导致了闵可夫斯基空间的复化

$$M^c=M_+^c\bigcup M\bigcup M_-^c. \tag{3}$$

实闵可夫斯基空间 M 构成了区域 $M_\pm^c$ 的公共边缘, 而且是它们的希洛夫边界 (参看第 5 目).

瑞士物理学家泡利 (W. Pauli) 提出以埃尔米特矩阵

$$X=\begin{pmatrix} x_0+x_1 & x_2+ix_3\\ x_2-ix_3 & x_0-x_1\end{pmatrix} \tag{4}$$

表示点 $x\in M$; 这个表示的好处是有 $\det X=\|x\|^2$. 延拓到 $\mathbb{C}^4$ 上的泡利变换

$$L:(z_0,z_1,z_2,z_3)\mapsto\begin{pmatrix} z_0+z_1 & z_2+iz_3\\ z_2-iz_3 & z_0-z_1\end{pmatrix}$$

是非退化的线性变换, 是第 2 目中 (10) 中所见变换的逆. 它把管状区域 $M_\pm^c$ 分别变到广义上半平面和下半平面 $H_\pm=\{\operatorname{Im} Z\gtrless 0\}$, 其中的

$$Z=\begin{pmatrix} z_{00} & z_{01}\\ z_{10} & z_{11}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

这是 $\mathbb{C}^4$ 中点的矩阵表示,

$$\operatorname{Im} Z=\frac{1}{2i}(Z-Z^*)=\begin{pmatrix} y_{00} & \dfrac{z_{01}-\bar z_{10}}{2i}\\ \dfrac{z_{10}-\bar z_{01}}{2i} & y_{11}\end{pmatrix},\quad y_{j_k}=\operatorname{Im} z_{j_k}, \tag{6}$$

这是个埃尔米特矩阵, 而符号 $>$ 和 $<$ 表示它们为正定或负定. 在这个变换下空间 M 自身变到埃尔米特矩阵 Z 的集合, 其中 Z 满足 $\operatorname{Im} Z=0$, 即一个实的四维平面 $\{y_{00}=y_{11}=0, z_{01}=\bar z_{10}\}\subset\mathbb{C}^4$. 在本目后面我们将利用矩阵表示 $\mathbb{C}^4$ 的点, 但常常不区分所论及对象和它们在泡利变换下的像, 把 M^c 和 $L(M^c)$ 考虑为两个等价的复闵可夫斯基空间的模型. 特别, 我们保留 $M_\pm^c$ 和 M 为它们在映射 L 下像的记号.

我们所描述的这个复化在英国数学和物理学家彭罗斯 (R. Penrose) 近年来所进行的一系列研究中得到了重要的应用 [1].

在物理中, 在无穷远处的条件起了很大的作用, 而为了研究它还需要对空间 M^c 进行紧化. 彭罗斯建议为此将 M^c 嵌入到格拉斯曼流形 $G(3,1)$ 中, 这时由前一目的

[1] 例如, 参看文集《扭转子与规范场 (Twistors and gaugefields)》(M.: Mup, 1983)

公式 (6) 知它的复维数正好为 4. 对应于刚在前面说过的, 我们把点 $Z \in \mathbb{C}^4$ 以下面矩阵表示

$$\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ z_{00} & z_{01} \\ z_{10} & z_{11} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

而它们的集合就是被看作 $G(3,1)$ 的标准覆盖的区域中的一个, 即这个流形的*仿射部分*.

$G(3,1)$ 的一般点由 4×2 矩阵 [1]

$$\widetilde{Z} = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{pmatrix} \tag{8}$$

的等价类表示, 其等价关系 $\widetilde{Z} \sim \widetilde{Z}'$ 是存在非退化 2×2 矩阵 C 使得 $\widetilde{Z}' = \widetilde{Z}C$. $G(3,1)$ 的仿射部分的点为形如 (8) 的矩阵所代表, 在其中 $\det Z_1 \neq 0$, 这是因为对它们而言, $\widetilde{Z}Z_1^{-1} \sim \widetilde{Z}$ 有 (7) 的形式, 而其中 $Z = Z_2 Z_1^{-1}$. 于是, 在所描述的这个紧化下, $\mathbb{C}^4$ 的无穷远处被粘上了满足 $\det Z_1 = 0$ 的形如 (8) 所代表的点集. 特别地, 在实空间 M 上加上了矩阵 (4) 的集合, 其中有 $\det X = x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$, 即在无穷远处粘上了 $\mathbb{R}^4$ 中的圆锥.

但是, 我们感兴趣的不是整个 $\mathbb{C}^4$, 而仅仅是上面所定义的它的 M^c 部分. 为了把它区分出来我们引进 4×4 矩阵

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

这是一个分块矩阵 (这里的 E 为单位矩阵, 0 为 2×2 零矩阵), 我们再考虑形如

$$\Phi(\widetilde{Z}) = \widetilde{Z}^* \Phi \widetilde{Z}$$

的矩阵, 其中 $\widetilde{Z}$ 为形如 (8) 的矩阵, 而 $\widetilde{Z}^*$ 为其共轭转置矩阵. 我们注意到, 在 $G(3,1)$ 的仿射部分 $\widetilde{Z}$ 具有形式 (7), 这个形式为

$$\Phi(\widetilde{Z}) = (E, Z^*) \begin{pmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix} = -i(Z - Z^*) = 2\mathrm{Im}\, Z.$$

对形如 (8) 的任意矩阵 $\widetilde{Z}$, 矩阵 $\Phi(\widetilde{Z})$ 显然是埃尔米特的, 而它的符号在对 $\widetilde{Z}$ 乘以非退化的 2×2 矩阵 C 没有变化[2]. 故而在格拉斯曼流形上我们可区分出区域

$$\widetilde{M^c_\pm} = \{\widetilde{Z} \in G(3,1) : \Phi(\widetilde{Z}) \gtrless 0\}$$

---

[1] 矩阵 $\widetilde{Z}$ 被写为分块形式; 其中 Z_1 和 Z_2 表示 2×2 矩阵.

[2] 显然, $\Phi(\widetilde{Z}C) = C^*\Phi(Z)C$.

和集合

$$\widetilde{M}=\{\widetilde{Z}\in G(3,1):\Phi(\widetilde{Z})=0\};$$

就像由上面进行的从 $G(3,1)$ 的仿射部分计算 $\widetilde{Z}$ 看出, 它们分别是 $M_{\pm}^{c}$ 和 M 的紧化. 称并集

$$\widetilde{M}^{c}=\widetilde{M}_{+}^{c}\bigcup\widetilde{M}\bigcup\widetilde{M}_{-}^{c} \tag{10}$$

为复射影闵可夫斯基空间.

在前一目已证明, 点 $\widetilde{Z}\in G(3,1)$ 可几何地解释为 $\mathbb{P}^3$ 中的直线或者 $\mathbb{C}^4$ 中由矩阵 $\widetilde{Z}$ 中列向量张成的平面. 特别地, 当对此格拉斯曼流形的仿射部分的点以形如 (7) 的矩阵 $\widetilde{Z}$ 表示时, 这些平面具有形式

$$w=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\z_{00}\\z_{10}\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\z_{01}\\z_{11}\end{pmatrix},$$

其中 w 为具坐标 (w_0,w_1,w_2,w_3) 的列向量, 而 λ 和 μ 为复参数. 把这个等式用坐标重写, 我们发现 $\lambda=w_0,\mu=w_1$, 从而这个平面方程有形式

$$\begin{aligned}w_2&=z_{00}w_0+z_{01}w_1\\w_3&=z_{10}w_0+z_{11}w_1\end{aligned},\quad\text{或者}\quad\begin{pmatrix}w_2\\w_3\end{pmatrix}=Z\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}. \tag{11}$$

如果假定 w_j 为 $\mathbb{P}^3$ 的齐次坐标, 则方程 (11) 为形如 (7) 的点 $\widetilde{Z}$ 所对应的射影直线的方程.

由此经典解释出发, 彭罗斯提出从闵可夫斯基空间 $\widetilde{M}^c$ 过渡到复射影空间 $\mathbb{P}^3$ 中去, 他称它们的点为**扭转子** (twistor). 仍旧是这个源于格拉斯曼流形的变换, 它把每个点 $\widetilde{Z}\in\widetilde{M}^c$ 联系到对应的射影直线 $l\subset\mathbb{P}^3$, 现在则被称做**彭罗斯变换**. 就如我们刚才所认识到的, 在仿射部分 $M^c\subset\widetilde{M}^c$, 其中的点以形如 (5) 的矩阵 Z 表示时, 彭罗斯变换的形式为

$$p:Z\mapsto l=\left\{w\in\mathbb{P}^3:\begin{pmatrix}w_2\\w_3\end{pmatrix}=Z\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}\right\}. \tag{12}$$

* 证明在 $G(3,1)$ 的一个分图表使 $\widetilde{Z}=\begin{pmatrix}Z\\E\end{pmatrix}$ 中, 彭罗斯变换有形式

$$p:Z\mapsto\left\{\begin{pmatrix}w_0\\w_1\end{pmatrix}=Z\begin{pmatrix}w_2\\w_3\end{pmatrix}\right\}.*$$

为更详细地描述彭罗斯变换, 我们注意到借助于矩阵 (9) 可以在 $\mathbb{P}^3$ 的扭转子空间中引进埃尔米特形式:

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= w^*\Phi w = i(w_0\overline{w}_2 + w_1\overline{w}_3 - \overline{w}_0 w_2 - \overline{w}_1 w_3)\\ &= -2\mathrm{Im}\,(w_0\overline{w}_2 + w_1\overline{w}_3)\end{aligned}$$

(这里的 w 为齐次坐标构成的列向量). 这个形式在 $\mathbb{P}^3$ 中定义了一个实超曲面

$$N = \{w \in \mathbb{P}^3 : \mathrm{Im}(w_0\overline{w}_2 + w_1\overline{w}_3) = 0\}, \tag{13}$$

它将 $\mathbb{P}^3$ 分成两个区域:

$$D_\pm = \{w \in \mathbb{P}^3 : \Phi(w) \gtrless 0\}. \tag{14}$$

* 证明非退化线性变换能把 N 变到超平面

$$N' = \{w \in \mathbb{P}^3 : |w_0|^2 + |w_1|^2 - |w_2|^2 - |w_3|^2 = 0\}. \quad *$$

彭罗斯称点 $w \in D_\pm$ 分别为*正*和*负扭转子*, 而点 $w \in N$ 为*零扭转子*.

定理 1. 彭罗斯变换 p 将 $\widetilde{M}^c_\pm$ 中的点分别变到整个位于正和负扭转子的区域 $D_\pm$ 中的直线, 而 M 中点则变到零扭转子超曲面 N 上的直线.

证明. 我们将对 $\widetilde{M}^c$ 的仿射部分的点证明该定理. 此时彭罗斯变换具有 (12) 的形式, 因而对在直线 $l = p(Z)$ 上的点 w 有

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \left(\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^*, \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^* Z^*\right) \begin{pmatrix} 0 & -iE \\ iE & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \\ Z\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}\\ &= -i\begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}^* (Z - Z^*) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由此看出当 $-i(Z - Z^*) = 2\mathrm{Im}\, Z \gtreqless 0$ 时, 则 $\Phi(w) \gtreqless 0$. □

于是, 区域 $D_\pm \subset \mathbb{P}^3$ 中的每一个包含了依赖于四个复参数 (矩阵 Z 的分量) 的射影直线族, 而超曲面 N 是依赖于四个实参数 (埃尔米特矩阵 Z 的分量, $\mathrm{Im}\, Z = 0$) 的直线族.

定理 1 解释了示意图 14; 在其上空间 M 显示为直线, 而超曲面 N 为双曲线 (见定理 1 上面的习题). 我们注意, 彭罗斯变换不仅在 $\widetilde{M}^c$ 上有定义, 而且在整个 $G(3,1)$ 也有定义, 但是 $G(3,1) \setminus \widetilde{M}^c$ 中的点变到的射影直线与 N 相交且部分地位于 D_+, 而部分地位于 D_-.

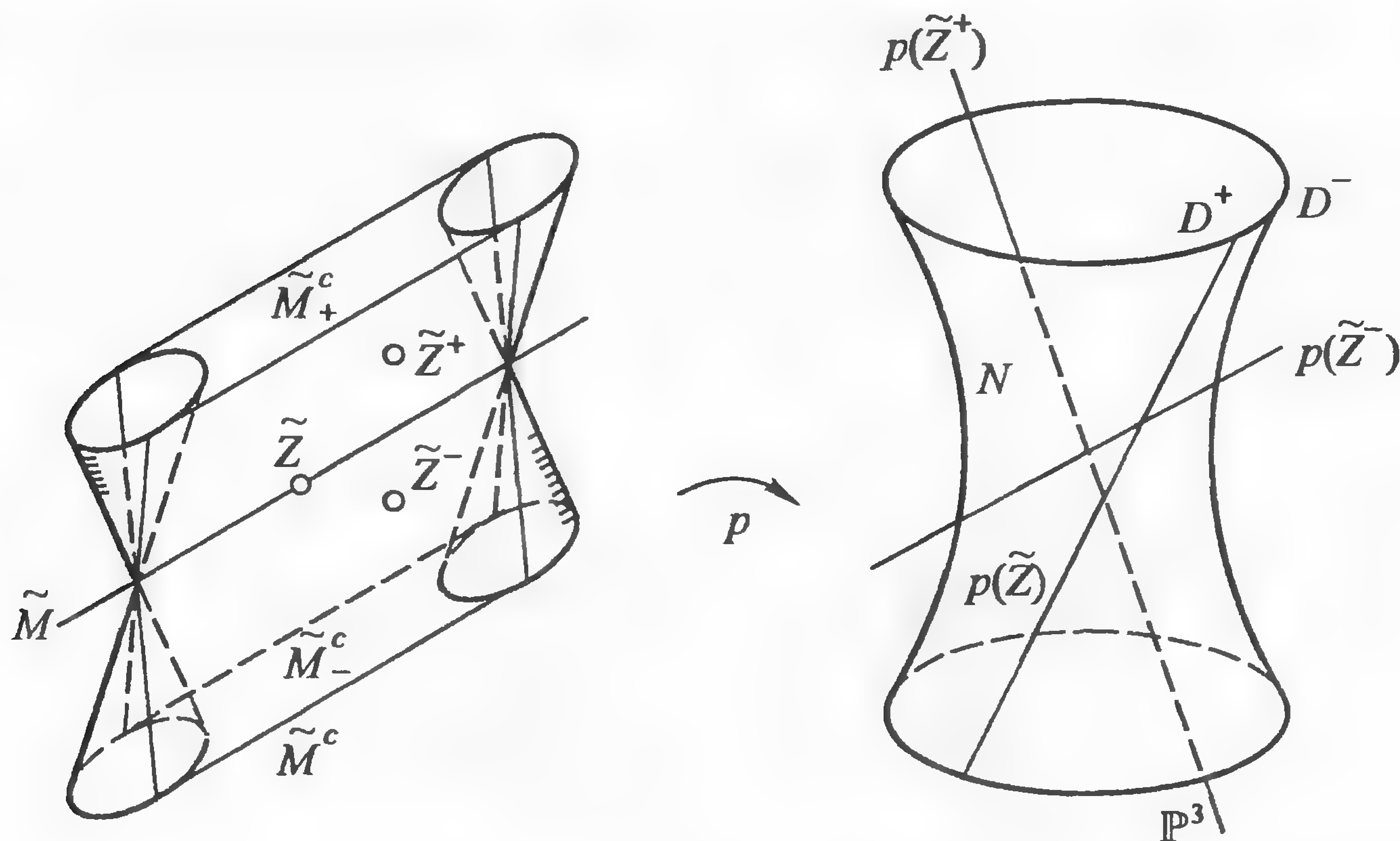


图 14

为了今后应用, 我们需要两条对应于 $G(3,1)$ 中某个分图表中点的相交条件, 譬如说其仿射部分, 在此处这些点由形如 (5) 的矩阵 Z 和 Z'. 相交条件在于由 (11) 中的方程和类似地对 Z' 的方程构成的方程组有非零解 (交点的齐次坐标不全为 0):

$$\det\begin{pmatrix} Z & -E \\ Z' & -E \end{pmatrix} = \det(Z'-Z) = 0. \tag{15}$$

我们看出, 如果 $Z' \neq Z$, 则在条件 (15) 下这个方程组的秩等于 3, 即其解 (w_0, w_1, w_2, w_3) 确定到差一个因子, 故直线 $p(Z)$ 和 $p(Z')$ 的交点唯一.

因此, 如果 $p(Z^0) = l_0$, 则点 $Z = Z^0 + V$ 对应的那些直线与 l_0 相交当且仅当 $\det V = 0$. 称在空间 $\mathbb{C}^4$ 中的复超曲面

$$C_{Z_0} = \{Z = Z^0 + V : \det V = 0\}$$

为以 Z^0 为顶点的复光锥.

容易看出, 对那些 $\det V = 0$ 的 2×2 矩阵 V 由能表示为形如

$$V = \begin{pmatrix} \alpha_0\beta_0 & \alpha_0\beta_1 \\ \alpha_1\beta_0 & \alpha_1\beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} (\beta_0, \beta_1)$$

的矩阵所刻画, 其中 $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{C}$[1]. 故圆锥 C_{Z^0} 的点可由

$$\begin{aligned} z_{00} &= z^0_{00} + \alpha_0\beta_0, \quad z_{01} = z^0_{01} + \alpha_0\beta_1, \\ z_{10} &= z^0_{10} + \alpha_1\beta_0, \quad z_{11} = z^0_{11} + \alpha_1\beta_1; \end{aligned} \tag{16}$$

由此看出在这个圆锥上存在两个复二维平面族: $\alpha-$ 平面族 $\{\Pi_\beta\}$, 其中固定了值 $\beta = (\beta_0, \beta_1)$, 而参数是变量 $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1) \in \mathbb{C}^2$, 以及另一个$\beta-$ 平面族 $\{\Pi_\alpha\}$, 其 α 固定, β 变化 (其实际上为平面, 可由它对参数的相关性看出).

---

[1] 事实上, 由此表示立即得到 $\det V = 0$; 反之, 如果 $\det(a_{jk}) = 0$, 则由方程组 $\alpha_0\beta_0 = a_{00}, \cdots, \alpha_1\beta_1 = a_{11}$ 可求出 $\alpha_0, \cdots, \beta_1$ 中一个量对另外量的比.

* 证明, 每个 $\alpha-$ 平面与每个 $\beta-$ 平面 (当 Z^0 固定) 相交于复直线即复的光线. *

定理 2. 当顶点 Z^0 固定时, 彭罗斯变换 p 使每个 $\alpha-$ 平面 $\Pi_\beta \subset C_{Z^0}$ 相伴 $\mathbb{P}^3$ 中某个点 (扭转子), 而每个 $\beta-$ 平面则相伴 $\mathbb{P}^3$ 中的某个平面, 即对偶空间 [1] $(\mathbb{P}^3)^*$ 中的点 (图 15).

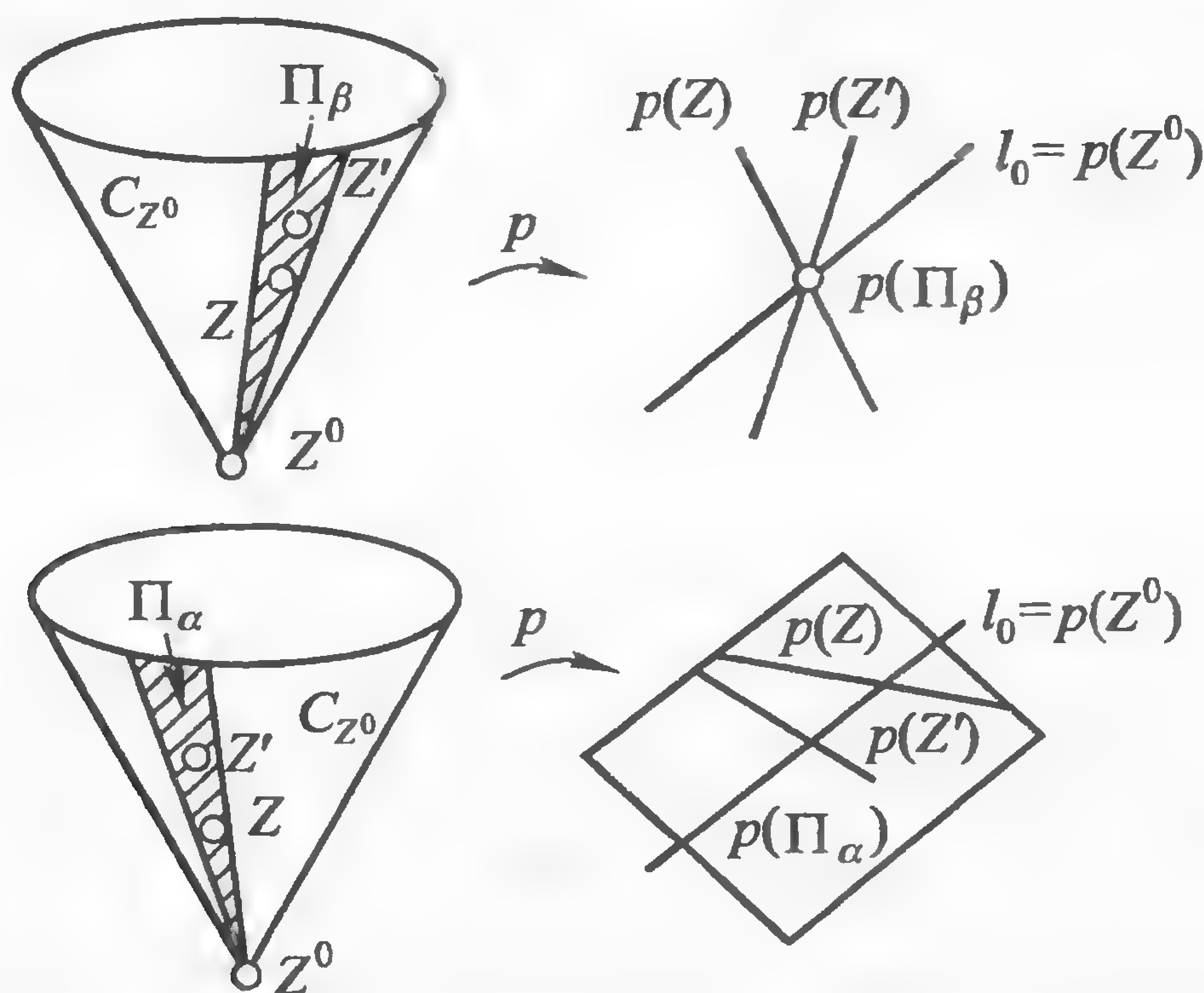


图 15

证明. 直线 $l_0 = p(Z^0)$ 与 $l = p(Z^0 + V)$ 的交集由方程组

$$\begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = Z^0 \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = Z^0 \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} (\beta_0, \beta_1) \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

定义. 为了得到平面 Π_β 中点的像需要从方程组中消去 α. 考虑到第一个方程, 第二个方程被重写为

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} (\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1) = 0,$$

而因为当 $Z \neq Z^0$ 时, α_0 和 α_1 不同时为零, 故 $\beta_0 w_0 + \beta_1 w_1 = 0$, 并且在 β 固定时从而得到唯一确定的比值 w_1/w_0; 然后从第一个方程求出 w_2/w_0 和 w_3/w_0. 于是对所有点 $Z \in \Pi_\beta, l = p(Z)$ 与直线 $l_0 = p(Z^0)$ 的交点为同一个. 可以认为在彭罗斯变换下这个点对应于 Π_β.

为了找出 $\beta-$ 平面 Π_α 的像, 需要在 α 固定时从 (17) 的第二个方程中消去参数 β_0 和 β_1. 这可由对其第一列乘以 α_1, 第二列乘以 $-\alpha_0$, 然后相加, 从而得到

$$\alpha_1 w_2 - \alpha_0 w_3 = (z^0_{00}\alpha_1 - z^0_{10}\alpha_0)w_0 + (z^0_{01}\alpha_1 - z^0_{11}\alpha_0)w_1.$$

这是个通过直线 $l_0 = p(Z^0)$ 的 $\mathbb{P}^3$ 中平面, 它包含了所有当 α 固定时对应于点 $Z \in \Pi_\alpha$ 的直线. 所以可以认为 p 将平面 Π_α 相伴于这个点. □

[1] 称做射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的对偶空间的 $(\mathbb{P}^n)^*$ 是所有复超平面 $\{a_0 w_0 + \cdots + a_n w_n = 0\} \subset \mathbb{P}^n$ 的集合, 每个这种超平面相伴于 $(\mathbb{P}^n)^*$ 中具齐次坐标 $(a_0, \cdots, a_n)$ 的点.

我们来仔细描述彭罗斯变换在实闵可夫斯基空间上的限制, $p:\widetilde{M}\to N$. 像在 (13) 中看到的, 在 N 上有复直线 $l_\infty=\{w_0=w_1=0\}$, 它对应于点 $\begin{pmatrix}0\\E\end{pmatrix}$: 参看本小目 (12) 后面的习题. N 上与它相交的直线对应了点 $\begin{pmatrix}X\\E\end{pmatrix}$, 其中 X 为满足 $\det X=0$ 的埃尔米特矩阵, 这是些在对 M 紧化时附加到空间 M 上的同一个元素. 其他对应于 $N\setminus l_\infty$ 中直线的点构成了仿射部分 $M\subset\widetilde{M}$. 像前面那样, 它们由埃尔米特矩阵

$$X=\begin{pmatrix}u & \zeta\\ \overline{\zeta} & v\end{pmatrix}$$

所代表, 其中 $u=x_0+x_1, v=x_0-x_1$ 为实数, 而 $\zeta=x_2+ix_3$ 为复数.

点 $X',X''\in M$ 之间闵可夫斯基距离的平方 $\|X'-X''\|^2=\det(X'-X'')$ 刻画了在 $\mathbb{P}^3$ 中两条直线 $l'=p(X')$ 和 $l''=p(X'')$ 之间的距离: 对埃尔米特矩阵, 这是个实数. 顶点为 $X^0\in M$ 的复光锥在 M 上的限制, 即那个被称做光锥的 $K_{X^0}=C_{X_0}\bigcap M$, 由那些形如 X^0+Y 的点组成, 其中的 Y 是行列式为零的埃尔米特矩阵. 这些点与 X^0 相距为零, 因此也称 K_{X^0} 为迷向锥. 具有零行列式的埃尔米特矩阵具有形式

$$Y=\begin{pmatrix}u & \zeta\\ \overline{\zeta} & |\zeta|^2/u\end{pmatrix},$$

并且依赖于三个实参数, 故圆锥 K_{X^0} 为实三维, 它由实直线 $\{X=X^0+tY:t\in\mathbb{R}\}$ 组成, 称其为光线; 彭罗斯变换把这条光线上的点变为 N 上与 $l_0=p(X^0)$ 交于同一个点的直线. 在这种意义下可以说成, 在 M 上的彭罗斯映射把光线变成零扭转子, 即 N 中的零 (即光线"坍塌").

最后, 我们来描述闵可夫斯基空间 $\widetilde{M}^c$ 的双全纯自同构. 先考虑 $G(3,1)$ 的保持形式 Φ 不变的线性变换群, 从而保持流形 $\widetilde{M}^c_+,\widetilde{M}$ 和 $\widetilde{M}^c_-$ 不变. 我们将以形式

$$\widetilde{Z}\mapsto g\widetilde{Z} \tag{18}$$

给出这种自同构, 其中 $g=\begin{pmatrix}D & C\\ B & A\end{pmatrix}$ 为非退化 4×4 矩阵. 而块形子式 $D,\cdots,A$ 为 2×2 矩阵. 在 $G(3,1)$ 的仿射部分这些自同构可重写为形式

$$\begin{pmatrix}E\\Z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}D+CZ\\B+AZ\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}E\\W\end{pmatrix},\quad W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \tag{19}$$

即用一个线性分式矩阵函数给出.

保持形式 $\Phi(\widetilde{Z})=\widetilde{Z}^*\Phi\widetilde{Z}$ 不变的条件在变换 (18) 下为 $\widetilde{Z}^*g^*\Phi gZ=\widetilde{Z}^*\Phi\widetilde{Z}$, 它导出矩阵恒等式 $g^*\Phi g=\Phi$, 或者考虑到公式 (9) 和 (18), 有

$$\begin{pmatrix}D^* & B^*\\ C^* & A^*\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -iE\\ iE & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & C\\ B & A\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -iE\\ iE & 0\end{pmatrix}.$$

它等价于条件

$$D^*B = B^*D, \quad C^*A = A^*C, \quad A^*D - C^*B = E \tag{20}$$

(第四个等式 $D^*A - B^*C = E$ 自动满足: 可由第三个推出). 这些等式与第 10 目的 (15) 相同, 从而在 $G(3,1)$ 仿射部分的群 Γ 与在那里所考虑的群 Γ 相同.

特别, 在那里曾分出一个整线性变换子群 Γ_0 :

$$Z \mapsto AZA^* + B, \tag{21}$$

其中 A 为任意的非退化矩阵, 而 B 是个埃尔米特矩阵 [1], 但是还有一系列的具有非退化矩阵 C 的变换, 它们根据第 10 目 (18) 可写为

$$Z \mapsto B - C(Z - D)^{-1}C^*, \tag{22}$$

其中 B 和 D 为埃尔米特矩阵. Γ 的其余部分也由一系列变换组成, 但它们的矩阵 C 退化而不为零.

* 证明变换

$$W = \frac{1}{z_{00}} \begin{pmatrix} 1 & z_{01} \\ z_{10} & \det Z \end{pmatrix}$$

属于这个系列, 对其而言, (20) 中的矩阵

$$A = D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = -B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

退化 (但 (18) 中的矩阵 g 非退化). *

定理 3. Γ 中的映射在区域 $M^c_\pm$ 中双全纯.

证明. Γ_0 中的映射在整个 $\mathbb{C}^4$ 为双全纯. 系列映射 (20) 在圆锥 $\det(Z - D) = 0$ 上有奇点, 但因为 D 为埃尔米特矩阵, 故 $\operatorname{Im}(Z - D) = \operatorname{Im} Z$ 从而 $Z - D$ 连同 Z 均属于 $M^c_\pm$, 但是这些区域不包含退化矩阵 (参看第 10 目 (17) 下面的习题). 故圆锥 $\det(Z - D) = 0$ 属于 $M^c_\pm$ 的边界.

具有退化矩阵 $C \neq 0$ 的 Γ 中的映射被 Γ_0 中的变换变成的形式中矩阵 C 为对角形, 这就像在前面习题所给出的那样. 于是利用条件 (20) 可以证明该映射的奇点与平面 $z_{00} + d_{00} = 0$ 相同, 其中 d_{00} 为实数, 而此平面又不可能属于区域 $M^c_\pm$, 这是因为在该平面上 $y_{00} = 0$. □

定理 4. Γ 中的映射把顶点为 $Z^0 \in M^c_\pm$ 的光锥变到顶点是对应点 W^0 的光锥.

---

[1] 在公式 (21) 和 (22) 中记号有了变化: 矩阵 B 和 D 在它们那里不同于在 (20) 中的.

证明. 设 $W=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}, W^0=(AZ^0+B)(CZ^0+D)^{-1}$; 因为 $M_{\pm}^c$ 不包含退化矩阵, 而且 Γ 中的映射在这些区域中全纯, 于是矩阵 AZ^0+B 和 CZ^0+D 非退化. 所以成立等式

$$\begin{aligned}&(AZ^0+B)^{-1}(W-W^0)(CZ^0+D)\\=&(AZ^0+B)^{-1}(AZ+B)(CZ+D)^{-1}(CZ^0+D)-E.\end{aligned}$$

在其中令 $Z-Z^0=\Delta$, 并经简单的变换后, 右端的所有项都包含了一个右乘因子 Δ. 故在 $\det\Delta=0$ 时必定有 $\det(W-W^0)=0$. □

最后我们看到在实闵可夫斯基空间 M 中可引进所谓的*洛伦兹* (Lorentz) *度量*, 它的二次形式为

$$ds^2=\det(dX). \tag{23}$$

定理 5. Γ 中映射在 M 上的限制在洛伦兹度量下在其非退化点处处为共形.

证明. 由对 (19) 中矩阵函数的微分定律有

$$\begin{aligned}dW&=AdZ(CZ+D)^{-1}-(AZ+B)(CZ+D)^{-1}CdZ(CZ+D)^{-1}\\&=[A-(AZ+B)(CZ+D)^{-1}C]dZ(CZ+D)^{-1},\end{aligned}$$

它在 M 上的限制为

$$\det(dY)=\det\left[A-(AX+B)(CX+D)^{-1}C\right]\det(CX+D)^{-1}\det(dX).$$

因此, 在 Γ 中的映射在 $\det(CX+D)\neq 0$ 处, 形式 ds^2 被乘上了只依赖于 X 的因子, 而这表明该映射是共形的. □

我们特别挑出一个映射的子群 $\Pi\subset\Gamma_0$, 它满足 $\det A=1$. 在空间 M 上它们化为等距映射, 即在此空间中的运动, 并且它们的集合构成了所谓的*庞加莱群*. 群 Π 因而由它们在复区域的延拓组成. 当 $B=0$ 时我们特别地得到了子群 $\Pi_0\subset\Pi$, 它由*洛伦兹群*中的变换在复区域中的延拓组成.

例题. 具有矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}e^{i\alpha/2}&0\\0&e^{-i\alpha/2}\end{pmatrix},\quad A_2=\begin{pmatrix}e^{\alpha/2}&0\\0&e^{-\alpha/2}\end{pmatrix}$$

的映射属于群 Π_0, 它们在 M^c 上有形式

$$Z\mapsto\begin{pmatrix}z_{00}&e^{i\alpha}z_{01}\\e^{-i\alpha}z_{10}&z_{11}\end{pmatrix},\quad Z\mapsto\begin{pmatrix}e^{\alpha}z_{00}&z_{01}\\z_{10}&e^{-\alpha}z_{11}\end{pmatrix},$$

而它们在 M 上的限制分别化为在平面 $\zeta = x_2 + ix_3$ 上的旋转

$$\zeta \mapsto e^{i\alpha}\zeta$$

和在平面 (x_0, x_1) 中的“双曲线旋转”:

$$x_0 \mapsto x_0 \mathrm{ch}\,\alpha + x_1 \mathrm{sh}\,\alpha, \quad x_1 \mapsto x_0 \mathrm{sh}\,\alpha + x_1 \mathrm{ch}\,\alpha.$$

* 证明群 Γ 依赖于 16 个实参数, Γ_0 依赖于 12 个, Π 为 10 个而 Π_0 为 6 个. *

14. 斯托克斯 (Stokes) 公式

先考虑实 n 维流形 M; 像在这里所考虑的其他对象一样, 假设它是光滑的. 我们称满足下述条件的表达式为 M 上次数为 $r \leqslant n$ 的*微分形式*:

1) 在邻域 $U \subset M$ 所采取的局部坐标 $x = (x_1, \cdots, x_n)$ 下它可表示为形式

$$\omega = {\sum_I}' f_I dx_I, \tag{1}$$

其中 $I = (i_1, \cdots, i_r)$ 为多重指标, 和号上的一撇代表有序取和 (即对所有 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$ 的指数 I), 而 f_I 为定义在 U 中的函数, 又 $dx_I = dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_r}$.

2) 在坐标变换 $x \to y$ 下有形式

$$\omega = {\sum_J}' g_J dy_J, \quad \text{其中} \quad g_J = {\sum_I}' f_I \frac{\partial x_I}{\partial y_J}, \tag{2}$$

其中 $\dfrac{\partial x_I}{\partial y_J} = \dfrac{\partial(x_1, \cdots, x_{i_r})}{\partial(y_{j_1}, \cdots, y_{j_r})}$ 为函数行列式 [1]. 在流形 M 上 r 次形式的集合以 $\mathscr{F}^r(M)$ 表示.

在复流形上次的概念可以精确一些. 在这里形式可局部地表示为

$$\omega = {\sum_{I,J}}' f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \tag{3}$$

其中 $I = (i_1, \cdots, i_r), J = (j_1, \cdots, j_s)$ 为有序多重指标, $dz_I = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{i_r}, d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_s}, f_{I,J}$ 为局部给出的光滑复函数. 因为局部坐标变换 $z \to w$ 在复流形上是个全纯映射, 故在这样的变换下有 $dz_I = {\sum_K}' \dfrac{\partial z_I}{\partial w_K} dw_K, d\bar{z}_J = {\sum_L}' \dfrac{\partial \bar{z}_J}{\partial \overline{w}_L} d\overline{w}_L$, 从而在新坐标下有

$$\omega = {\sum_{K,L}}' g_{K,L} dw_K \wedge d\overline{w}_L, \quad \text{其中} \quad g_{K,L} = {\sum_{I,J}}' f_{I,J} \frac{\partial z_J}{\partial w_K} \frac{\partial \bar{z}_J}{\partial \overline{w}_L}. \tag{4}$$

---

[1] 微分形式的变化规则 (2) 是自然的, 因为由复合函数微分法则和外积规则 $dx_I = {\sum_J}' \dfrac{\partial x_I}{\partial y_J} dy_J$, 代入到 (1) 中并改变和号中的次序便得到 (2).

我们看到在表达式 (3) 中微分 dz_j 和 $d\bar{z}_k$ 的个数不依赖于局部坐标的选取. 我们将可谈及 ω 是双阶 r,s 的形式或者简短地说, (r,s) – 形式, 这就是说, 如果在它的局部表达式中有 r 个微分 dz_j 和 s 个微分 $d\bar{z}_k$. 在复流形 M 上的所有具光滑系数的 (r,s)– 形式的集合记作 $\mathscr{F}^{r,s}(M)$; 也可以用 $\mathscr{F}^{r+s}(M)$ 表示同一集合. 称具全纯系数 f_I 的双阶 $(r,0)$ 的形式 $\sum' f_I dz_I$ 为全纯形式.

在光滑[1] 流形上的微分形式算子是指局部定义的变换 $d:\mathscr{F}^r\to\mathscr{F}^{r+1}$, 把形式 $\omega=\sum' f_I dx_I$ 相伴以

$$d\omega=\sum_I df_I\wedge dx_I,\quad \text{其中}\quad df_I=\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial f_I}{\partial x_\nu}dx_\nu. \tag{5}$$

它具有下列性质:

a) $d(\omega_1+\omega_2)=d\omega_1+d\omega_2$ (线性性);

b) $d(\omega_1\wedge\omega_2)=d\omega_1\wedge\omega_2+(-1)^{\deg\omega}\,\omega_1\wedge d\omega_2$ (莱布尼茨公式);

c) $d^2\omega=d(d\omega)=0$ (幂等性).

($\deg\omega$ 表示形式 ω 的次数). 微分算子的定义是合理的, 即不依赖于局部坐标的选取 (微分的不变性).

在复流形上微分形式算子 $d:\mathscr{F}^{r+s}\longrightarrow\mathscr{F}^{r+s+1}$ 可分裂为两个算子的和 $d=\partial+\overline{\partial}$, 使得 $\partial:\mathscr{F}^{(r,s)}\to\mathscr{F}^{(r+1,s)}$ 和 $\overline{\partial}:\mathscr{F}^{(r,s)}\longrightarrow\mathscr{F}^{(r,s+1)}$ (参看前面第 3 目). 由算子 d 的幂等性, 我们有

$$0=d^2\omega=(\partial+\overline{\partial})(\partial\omega+\overline{\partial}\omega)=\partial^2\omega+(\overline{\partial}\partial+\partial\overline{\partial})\omega+\overline{\partial}^2\omega;$$

因为右端三项中的每一项由不同的双阶形式构成, 故它们的和要等于零只有它们中每一项都等于零. 故

$$\partial^2=\overline{\partial}\partial+\partial\overline{\partial}=\overline{\partial}^2=0 \tag{6}$$

在光滑流形 M 上 r 次形式的集合 $\mathscr{F}^r$ 可看作是一个阿贝尔群, 其运算是按形式的系数相加. 其中有由闭形式 ω 构成的子群 (即对其有 $d\omega=0$)Z^r. 由算子 d 的幂等性, r 次恰当形式 (即它是 $\mathscr{F}^{r-1}$ 中形式的微分) 的集合 B^r 是 Z^r 的子群. 闭形式群相对于恰当群的商群

$$H^r(M)=Z^r/B^r \tag{7}$$

被称做流形 M 关于算子 d 的第 r 个上同调群. 这个群也可记为 $H^r(M,\mathbb{R})$, 并称做流形 M 的德拉姆 (de Rham) 群 (具实系数的); 如果形式中允许有复系数, 则记号可采用 $H^r(M,\mathbb{C})$. 在复流形上也可对算子 ∂ 和 $\overline{\partial}$ 构造类似的群.

在光滑流形 M 上的形式 ω 的积分可定义在k– 维胞腔 γ 上, 即 k– 维立方体 $Q^k=I\times\cdots\times I\subset\mathbb{R}^k$ 到 M 的光滑映射 (这是路径的高维类比; 在这里的 $I=[0,1]$

---

[1] 自此之后光滑这个词被理解为是有关实流形的.

为单位线段). 如果像 $\gamma(Q^k)$ 落在一个坐标邻域中, 其中形式 $\omega = \sum' f_J dx_J (dx_J = dx_{j_1} \wedge \cdots \wedge dx_{j_k})$, 则 ω 沿胞腔 γ 的积分由公式

$$\int_\gamma \omega = \int_{Q^k} \sum_J{}' f_J \circ \gamma \frac{\partial(x_{j_1}, \cdots, x_{j_k})}{\partial(t_1, \cdots, t_k)} dt_1 \cdots dt_k \tag{8}$$

定义.

在 $\gamma : Q^k \to M$ 一般情形, 需要利用对应于 M 的总图表覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的单位分解, 即一个光滑函数族 $e_\alpha : M \to [0,1]$ 使得每个 e_α 的支集 (满足 $e_\alpha(p) \neq 0$ 的点 p 集合的闭包) 在 U_α 中为紧, 且 $\sum\limits_{\alpha \in A} e_\alpha(p) \equiv 1$ 对所有 $p \in M$ 成立 [1].

利用单位分解, 我们定义

$$\int_\gamma \omega = \sum_{\alpha \in A} \int_\gamma \omega e_\alpha, \tag{9}$$

因为形式 ωe_α 只在一个坐标邻域中不为零, 故它的积分由公式 (8) 定义. 由积分和微分形式的定义, 我们的这个定义是合理的, 即不依赖于总图表和单位分解的选取.

自然, 积分的概念可推广到 $k-$ 维链上, 即 $k-$ 维胞腔 $\gamma_\nu : Q^k \to M$ 的整系数 n_ν 的形式线性组合. 就是说, k 次形式 ω 沿 $k-$ 维链 $\sigma = \sum\limits_{\nu=1}^{N} n_\nu \gamma_\nu$ 的积分被定义为

$$\int_\sigma \omega = \sum_{\nu=1}^{N} n_\nu \int_{\gamma_\nu} \omega. \tag{10}$$

最后我们定义边缘算子 ∂, 它把每个 $k-$ 维胞腔 $\gamma : Q^k \to M$ 相伴一个 $(k-1)-$ 维链 $\partial\gamma$, 其规则是: 记 $t = (t_1, \cdots, t_k)$; 对每个 $j = 1, \cdots, k$ 考虑立方体的两个 $(k-1)-$ 维边缘 $Q_{j,0}^{k-1} = \{t \in Q^k : t_j = 0\}$ 和 $Q_{j,1}^{k-1} = \{t \in Q^k : t_j = 1\}$, 并令

$$\partial\gamma = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \{\gamma|_{Q_{j,1}^{k-1}} - \gamma|_{Q_{j,0}^{k-1}}\}, \tag{11}$$

其中以 $\gamma|_{Q_{j,\alpha}^{k-1}}$ 表示映射 γ 在边缘 $Q_{j,\alpha}^{k-1}$ 的限制 (参看图 16, 其上所显示的符号是附在二维立方体的边界上的). 链 $\sigma = \sum\limits_{\nu=1}^{N} n_\nu \gamma_\nu$ 的边缘由线性性, 以 $\partial\sigma = \sum\limits_{\nu=1}^{N} n_\nu \partial\gamma_\nu$ 定义. 边缘算子 ∂ 像微分算子 d 那样是幂等的, 其平方 $\partial^2 = \partial \circ \partial = 0$.[2]

在光滑流形 M 上的 $k-$ 维链的集合可以看作一个阿贝尔群 $\mathscr{F}_k$, 其运算为按链的系数的加法. 其中有由闭链组成的子群 Z_k, 即其边缘为零的链: $\partial\sigma = 0$. 记为 B_k

[1] 在光滑流形 M 上, 对每个局部有限的覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 存在单位分解, 即在每点 $p \in M$ 存在邻域使其被有限个 U_α 覆盖. 局部有限性的要求并不影响一般性, 因为在我们所考虑的流形上任意覆盖可以加细到局部有限. 我们注意到, 对于局部有限的覆盖, 在 (9) 右端的非零项为有限个.

[2] 边缘算子以微分算子的同一个符号所表示, 但这不会引起混乱, 因为它们容易从意义上加以区别.

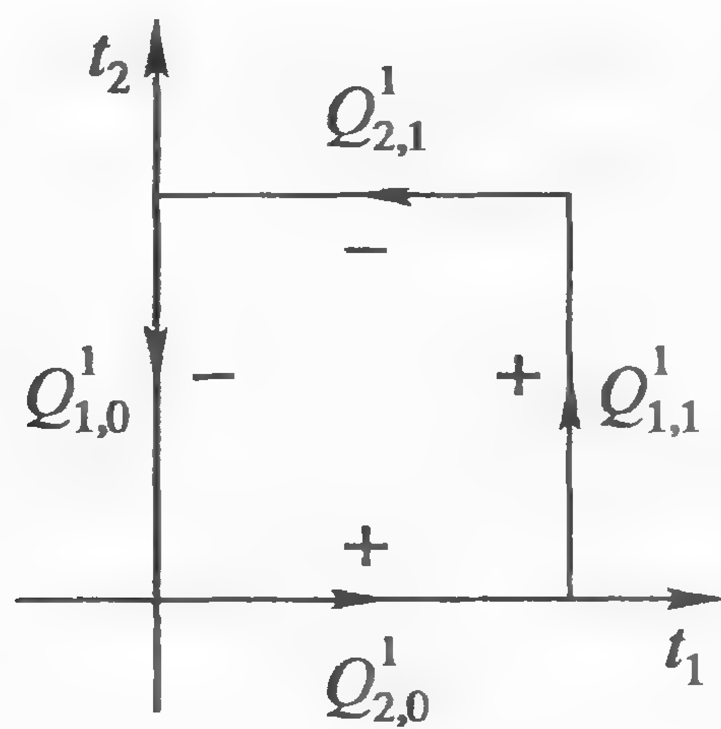


图 16

的 Z_k 的子群, 它由边缘组成, 即为某个 $(k+1)-$ 维链边缘的 $k-$ 维链. 称两个闭链 $\sigma', \sigma'' \in Z_k$ 为同调是说它们的差 $\sigma' - \sigma'' \in B_k$, 即为边缘.

闭链群对于边缘群的商群

$$H_k(M, \mathbb{Z}) = Z_k/B_k \tag{12}$$

被称做流形 M 的第 k 个同调群 (记号 $\mathbb{Z}$ 其表达的意义是考虑整系数的链). 这个群的元素被当作是同调类, 即相互同调的闭链集合.

斯托克斯公式把微分形式的分析运算与取链的边缘的几何运算联系起来: 对在 n 维流形 M 上的任意 $k-1$ 次 $(k \leqslant n)$ 形式 ω, 沿 $k-$ 维链 $\sigma: Q^k \to M$ 对 $d\omega$ 的积分等于 ω 沿边缘 $\partial\sigma$ 的积分:

$$\int_\sigma d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega. \tag{13}$$

我们发现由斯托克斯公式得到的两个重要推论.

1) 闭形式 ω $(d\omega = 0)$ 沿边缘 $\sigma = \partial\sigma'$ 的积分等于零:

$$\int_\sigma \omega = \int_{\partial\sigma'} \omega = \int_{\sigma'} d\omega = 0. \tag{14}$$

2) 恰当形式 $\omega = d\omega'$ 沿闭链 σ $(\partial\sigma = 0)$ 等于零:

$$\int_\sigma \omega = \int_\sigma d\omega' = \int_{\partial\sigma} \omega' = 0. \tag{15}$$

这些推论表明, 闭形式 ω 沿闭链 σ 的积分实际上只依赖于形式的上同调类与闭链的同调类:

$$\int_{\sigma+\partial\sigma'} (\omega + d\omega') = \int_\sigma \omega. \tag{16}$$

我们还将指出斯托克斯公式的另一个形式, 它与定向概念有关. 在 n 维光滑流形上 n 次形式局部地具有形式 $\omega = f dx$, 其中 $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, 说这样的形式不为零的意思是如果其系数 f 不变为 0 (因为坐标变换使 f 乘以变换的雅可比, 而由光滑流形的定义, 这样的雅可比不化为零, 故它不依赖于局部坐标的选取). 称流形 M 为定向的是说, 如果在其上存在 $n = \dim M$ 次的不取零的形式; 等价定义是:

在 M 上存在一个总图表, 其所有的毗连关系具正的雅可比. 我们发现任意复流形都是定向的, 这是因为它的毗连关系的实雅可比为正 (参看第 9 目的定理 1).

在 n 维流形 M 上任意两个 n 次形式 ω_1 和 ω_2 成比例, 即存在连续函数 $\lambda: M \to \mathbb{R}$ 使得 $\omega_1 = \lambda\omega_2$ (自此我们将考虑具实系数的形式). 如果这两个形式都不化为零, 那么 $\lambda \neq 0$, 这表明 λ 在 M 上具有确定的符号. 故而在定向 n 维流形上所有不化为零的 n 次形式被分为两类, 使得其中任一类内的形式之间差一个正因子, 而与另一类的形式差一个负因子. 相应于它们, 在定向流形上可以引进两个*定向*: 在一个定向下, 一个类的形式被认为是正的, 而第二个类的形式为负的. 在另一个定向下则相反.

设 M 为一个定向流形, 称区域 $D \subset M$ 为*具定向边界的区域*是说, 如果对任意点 $p_0 \in \overline{D}$ 或者 a) 存在邻域 $U \subset D$ (此时称 $p_0 \in D$ 为 D 的内点) 或者 b) 在 M 的总图表中存在分图表 (U, x), 使 $\overline{D} \bigcap U = \{p \in U : x_n(p) \leqslant 0\}$ (此时称 p_0 为 D 的一个边界点, 其中的 x_n 为 x 的最后一个坐标). 称 D 的边界点的集合为该区域的*边界*, 记为 ∂D. 边界 ∂D 是一个 $(n-1)$ 维的定向流形. 设 (U, x) 为 M 的总图表中的一个分图表, 使得 $U \bigcap \partial D \neq \varnothing$, 并且 M 被如此定向使得形式 $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n > 0$. 如果 D 局部地被描述为集合 $\{p \in U : x_n(p) < 0\}$, 则 ∂D 的*诱导定向*这样决定: 对在 $\partial D \bigcap U$ 上的形式 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{n-1}$ 取符号 $(-1)^{n-1}$ (参看图 17, 其中当 $n = 2$ 时, 在 ∂D 上形式 $dx_1 < 0$, 而当 $n = 3$ 时, 形式 $dx_1 \wedge dx_2 > 0$).

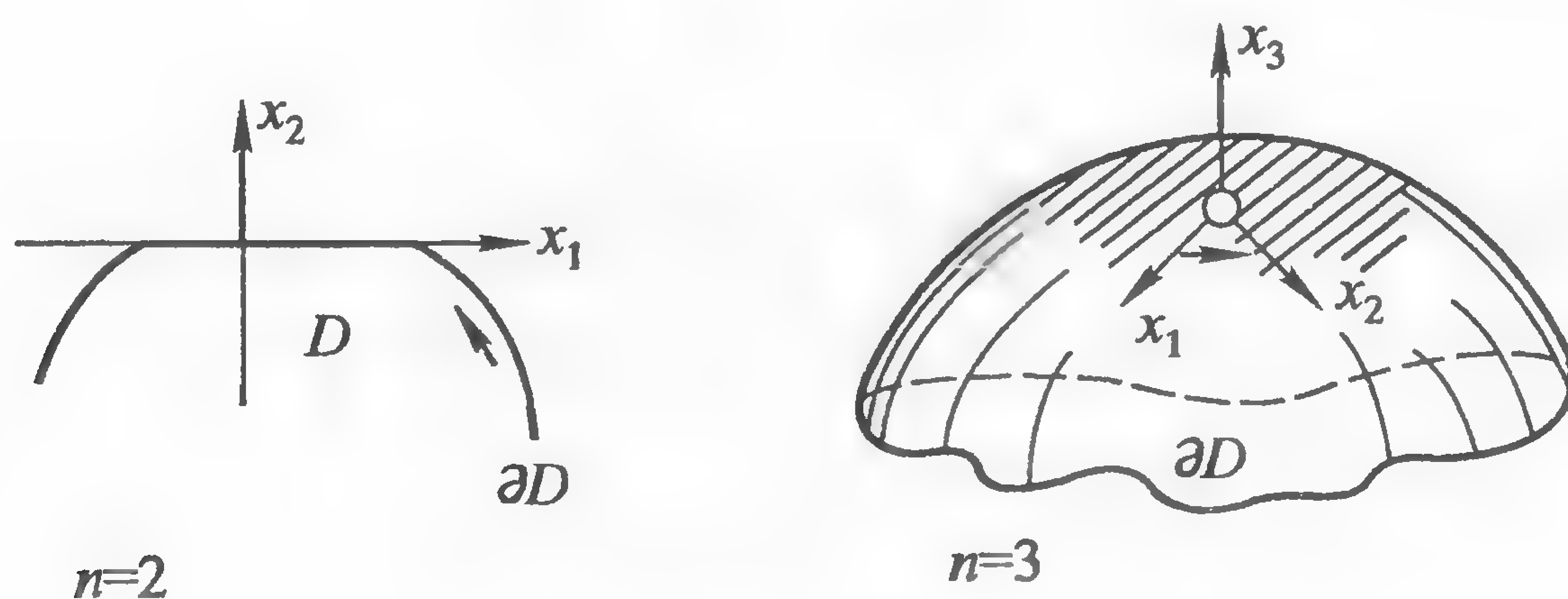


图 17

利用局部坐标和单位分解引入在具定向边界的区域上的积分概念, 于是斯托克斯公式有了如下形式: *对在 n 维流形上的任意 $n-1$ 次形式 ω 和具定向边界 ∂D 的区域 D 成立*

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega, \tag{17}$$

其中 ∂D 的定向是诱导定向.

最后我们注意, 在对斯托克斯定理的第二种解释中可以把它写成对较低次形式的公式. 为此我们回想, 称集合 $N \subset M$ 为 M 的 *k 维子流形*是说, 如果在 M 上存在总图表使任意满足 $U \bigcap N \neq \varnothing$ 的分图表 (U, x) 有交集

$$U \bigcap N = \{p \in U : x_{k+1}(p) = \cdots = x_n(p) = 0\},$$

其中 $k < n = \dim M, x = (x_1, \cdots, x_n)$. 如果流形 M 定向, 则在流形 N 上局部地诱导出定向: 如果 M 的定向表现为 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n > 0$, 则 N 的诱导定向则被设定为 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k > 0$. 对 n 维 $(n > k)$ 定向流形 M 上的 $(k-1)$ 次形式 ω, 形如 (17) 的斯托克斯公式可以写成是对 M 的 k 维子流形上的具定向边界的区域的形式.

在复流形上的斯托克斯公式我们将在下一目讨论.

15. 柯西 – 庞加莱定理

任意 n 维复流形 M 可以看成是 $2n$ 维实流形. 作为复局部坐标的分图表 (U, z), 于是自然地被看作是由 $2n$ 个实函数 $x_\nu = \operatorname{Re} z_\nu(p), y_\nu = \operatorname{Im} z_\nu(p)$ 构成的函数组. 但是我们也可以替代它去考虑由 $2n$ 个复函数 $z_\nu(p), \overline{z}_\nu(p)$ 所构成的组, 它与第一组以非退化线性关系 $z_\nu = x_\nu + iy_\nu, \overline{z}_\nu = x_\nu - iy_\nu$ 相联系 [1].

当然, 如果微分算子 d 以局部坐标 z 和 $\overline{z}$ 表示, 斯托克斯公式在复流形上依然有效. (实) $k-$ 维链的概念可一成不变地转移到复流形上. 沿这样的链可以对总次数为 $r + s = k$ 的具复系数的 $(r, s)-$ 形式进行积分, 从而形如 (13) 的斯托克斯公式保持不变. 对于复流形的子流形 (不必是复的) 形如 (17) 的斯托克斯公式也仍不变, 这时形式的总次数比子流形的实维数少 1, 而边界的诱导定向按实结构确定.

在做了这些解释之后便容易证明一个定理, 它把柯西的基本定理推广到高维情形.

定理 1 (柯西 – 庞加莱). 设 M 是 (复) 维数为 n 的复流形, ω 为此流形上的 n 次全纯形式. 于是 ω 沿任意 $(n+1)$ – 维链 σ 的边缘的积分等于零:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = 0. \tag{1}$$

证明. 在邻域 $U \subset M$ 中采取的局部坐标 $(z, \overline{z})$ 下, 全纯形式具形式 $\omega = f(z) dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$, 其中 f 为在 U 中的全纯函数. 由全纯性 $\overline{\partial} f = 0$, 其表明 $df = \partial f = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu$; 从而由外积的性质得到 $d\omega = df \wedge dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n = 0$, 即该形式为闭. 由上一目中斯托克斯公式的推论 1 我们得出积分 (1) 等于零的结论. □.

注. 如果利用上一目中形如 (17) 的斯托克斯公式, 则在柯西 – 庞加莱定理中的链 σ 可以换成 M 的一个实 $(n+1)$ 维子流形的定向边界. 特别地, 如果 M 属于 $\mathbb{C}^n$, 则这个定理看起来应该是这样的:

对任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 和在实 $(n+1)$ 维子流形 $M \subset D$ 中任意具定向边界的区

---
[1] 于是, 在这些关系式中的系数为复的并不意味着什么, 因为在 M 上自然地考虑复函数和具复系数的形式.

域 G, 有

$$\int_{\partial G} f dz = 0, \quad dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \tag{2}$$

(这里是在整个区域 D 中采用的坐标, 而形式 ω 的形式为 fdz).

我们注意到在涉及这个定理的方面, 平面情形和空间情形的主要差别在于当 $n = 1$ 时区域 D 和 G 有相同的维数, 而当 $n > 1$ 时 G 的维数小于 D 的维数, 这是因为 $n + 1 < 2n$.

我们还要指出该定理的更为特殊的情形. 设 $f \in \mathscr{O}(D)$ 和 $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ 为多圆形区域 (G_ν 为平面的单连通区域, 其边界 ∂G_ν 光滑), 且其闭包紧于 D. 这个区域的骨架 $\Gamma = \partial G_1 \times \cdots \times \partial G_n$ 是 $(n+1)$ 维闭区域 $S_\nu = \partial G_1 \times \cdots \times \overline{G}_\nu \times \cdots \times \partial G_n \Subset D$ 的边界. 因此对于任意这样的区域 G, 沿其骨架的积分

$$\int_{\Gamma} f dz = 0 \tag{3}$$

(参照对于多圆形区域的柯西积分公式).

现在我们来引进柯西定理的逆, 即莫雷拉 (Morera) 定理的空间类比. 在平面情形对于函数 f 的全纯性断言只需要求它沿一些特别形状 (三角形 $\Delta \Subset D$) 区域的边缘的积分为零即可, 然而对函数则需加上连续性这个附加条件 (参看卷 I, 第 21 目). 在空间情形情况是类似的. 在这里三角形的角色由 $(n+1)$ 维的"棱柱" T_ν 所替代, 这是个位于 $\mathbb{C}^1(z_\nu)$ 中的三角形 Δ_ν 和任意直线段 $[a_\mu, z_\mu]$ 的乘积 Λ_ν 的乘积, 其中线段 $[a_\mu, z_\mu]$ 位于其余的 $n-1$ 个平面 $\mathbb{C}^1(z_\mu), \mu \neq \nu$ 中:

$$T_\nu = \Delta_\nu \times \Lambda_\nu \quad \left(\Lambda_\nu = \prod_{\mu \neq \nu} [a_\mu, z_\mu]\right) \tag{4}$$

(参看图 18, 其中标出了平面 z_ν, 而其余的变量 z_μ 以略图表示).

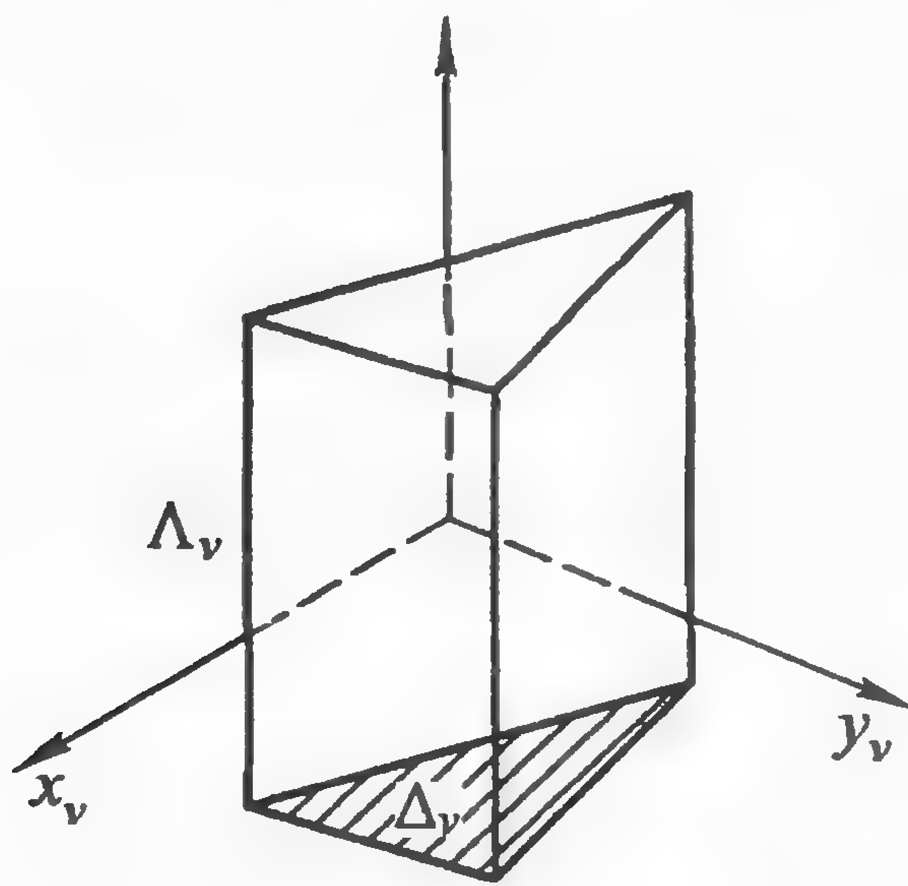


图 18

定理 2. 如果函数 f 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中连续, 并且对形如 (4) 的任意棱柱 T_ν, 且其闭包紧于 D, 而且

$$\int_{\partial T_\nu} f dz = 0, \tag{5}$$

则 $f \in \mathscr{O}(D)$.

证明. 只需证 f 在任意点 $a \in D$ 的邻域中的全纯性即可. 固定 a 并考虑函数

$$F(z)=\int_{[a_1,z_1]} d\zeta_1 \cdots \int_{[a_n,z_n]} f(\zeta)d\zeta_n; \tag{6}$$

在点 a 的某个邻域中它有定义且连续. 对任意 ν $(\nu=1,\cdots,n)$ 它可表为形式

$$F(z)=\int_{[a_\nu,z_\nu]} F_\nu d\zeta_\nu,$$

其中 F_ν 为 f 在 Λ_ν 上的积分 (任意线段 $[a_\mu, z_\mu], \mu \neq \nu$). 显然, 函数 F_ν 在点 a_ν 的邻域 U_ν 中对 ζ_ν 为连续, 并由条件 (5), 对任意三角形 $\Delta_\nu \Subset U_\nu$,

$$\int_{\partial\Delta_\nu} F_\nu d\zeta_\nu = 0. \tag{7}$$

事实上, 这个积分可能只与积分

$$\int_{\partial\Delta_\nu\times\Lambda_\nu} f d\zeta = \int_{\partial T_\nu} f d\zeta$$

相差一个符号, 其中 $T_\nu=\Delta_\nu\times\Lambda_\nu, d\zeta=d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n$ (我们利用的是, 在 ∂T_ν 的除去 $\partial\Delta_\nu\times\Lambda_\nu$ 的其他部分, 即在棱柱 T_ν "底"的集合 $\Delta_\nu\times\partial\Lambda_\nu$ 这部分上, 参看图 18, 它是坐标 $\zeta_\nu=$ 常数的部分, 从而, $d\zeta_\nu=0$, 于是 $fd\zeta$ 沿此区域边缘的积分为零).

由对单变量函数的莫雷拉定理得出 F 对变量 z_ν 全纯. 因为此讨论可应用于任意 z_ν, 故 F 在点 a 的某个邻域 U 中对每个变量都是全纯的. 根据哈托格斯定理, F 在此邻域中全纯, 就是说, 函数

$$f(z)=\frac{\partial^n F}{\partial z_1\cdots\partial z_n}$$

在这里全纯. □

16. 麦克斯韦 (Maxwell) 方程

我们考虑应用前面所发展出的工具以得到著名的麦克斯韦方程 [1] 解的积分表示, 这些方程是电磁理论的基础之一, 特别是射电技术和光学. 这些方程具有形式

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} H=0, \quad \operatorname{rot} E+\frac{\partial H}{\partial x_0}=0,\\ &\operatorname{div} E=\rho, \quad \operatorname{rot} H-\frac{\partial E}{\partial x_0}=J, \end{aligned} \tag{1}$$

[1] 著名的美国物理学家 R. 费因曼 (Feynman) 关于此方程写下了这样的话: "在人类历史上 (譬如, 如果在一万年之后再来看它) 19 世纪的最重大的事件无疑是麦克斯韦所发现的电磁学定律. 这个最重要的科学发现的背景中还有在同一个十年期间的美国内战, 相比之下, 这似乎只是小小的省地级的事件罢了" (《费因曼的物理讲义》, Addison-Wesley, Reading, MA, 1970).

其中 $E=(E_1,E_2,E_3)$ 和 $H=(H_1,H_2,H_3)$ 为电场和磁场的强度向量, ρ 为密度, 而 $J=(J_1,J_2,J_3)$ 为电流向量; 变量 x_0 表示时间, 而散量和旋量是对于空间坐标 x_1,x_2,x_3 取的.

用微分形式能方便地描述这些方程. 事实上, 引进形式

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k=1}^{3} E_k dx_k \wedge dx_0 + \sum_{k=1}^{3} H_k dx_{[k]}, \\ *F &= -\sum_{k=1}^{3} H_k dx_k \wedge dx_0 + \sum_{k=1}^{3} E_k dx_{[k]}, \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $dx_{[1]}=dx_2\wedge dx_3, dx_{[2]}=dx_3\wedge dx_1, dx_{[3]}=dx_1\wedge dx_2$. 简单的计算表明, 齐次麦克斯韦方程 (其中 $\rho=J=0$) 以这些形式的闭性条件表达:

$$\begin{aligned} &dF=0: \quad \text{第一对方程}, \\ &d*F=0 \quad \text{第二对方程}.^{1)} \end{aligned} \tag{3}$$

我们再引进这些方程的另一个形式. 算子 $*:(E,H)\to(-H,E)$ 在值 (E,H) 的空间 $\mathbb{R}^6$ 中为线性算子, 或者完全等价地, 是在四维流形上的 2– 形式空间中的算子, 而其平方算子等于带负号的恒同变换. 因此, 这个算子 $*$ 具有两个特征值 $\pm i$ 并且对应于它们, M 上任意 2– 形式 ω 被分裂为两个形式之和:

$$\omega^+ = \frac{1}{2}(\omega - i*\omega), \quad \omega^- = \frac{1}{2}(\omega + i*\omega),$$

对其分别有 $*\omega^+=i\omega^+$ 和 $*\omega^-=-i\omega^-$; 称它们各为 ω 的自对偶和反自对偶的部分.

特别地, 对于麦克斯韦形式 (2) 自对偶和反自对偶部分具有形式

$$\begin{aligned} F^+ &= \sum_{k=1}^{3} \frac{E_k+iH_k}{2} dx_k\wedge dx_0 + \sum_{k=1}^{3} \frac{H_k-iE_k}{2} dx_{[k]}, \\ F^- &= \sum_{k=1}^{3} \frac{E_k-iH_k}{2} dx_k\wedge dx_0 + \sum_{k=1}^{3} \frac{H_k+iE_k}{2} dx_{[k]}, \end{aligned}$$

或者

$$\begin{aligned} F^+ &= \sum_{k=1}^{3} F_k(dx_k\wedge dx_0 - i dx_{[k]}), \\ F^- &= \sum_{k=1}^{3} \overline{F}_k(dx_k\wedge dx_0 + i dx_{[k]}), \end{aligned} \tag{4}$$

其中

$$F_k = \frac{1}{2}(E_k + iH_k), \quad k=1,2,3. \tag{5}$$

---

1) 第二对麦克斯韦方程在非齐次情形具有形式 $d*F = -\sum_{k=1}^{3} J_k dx_{[k]}\wedge dx_0 + \rho dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$.

定义于实闵可夫斯基空间 M 的形 (4) 可以延拓到它的复化区域 $M_{\pm}^{c}$ 中 (参看第 13 目). 为此令

$$x_0 = \frac{1}{2}(z_{00} + z_{11}), \quad x_1 = \frac{1}{2}(z_{00} - z_{11}),$$
$$x_2 = \frac{1}{2}(z_{01} + z_{10}), \quad x_3 = \frac{1}{2i}(z_{01} - z_{10})$$

从而我们转向泡利坐标 z_{jk} (参照第 13 目 (3)). 于是

$$dx_1 \wedge dx_0 - idx_2 \wedge dx_3 = \frac{1}{2}(dz_{00} \wedge dz_{11} + dz_{01} \wedge dz_{10}),$$
$$dx_2 \wedge dx_0 - idx_3 \wedge dx_1 = \frac{1}{2}(dz_{01} \wedge dz_{11} - dz_{00} \wedge dz_{10}),$$
$$dx_3 \wedge dx_0 - idx_1 \wedge dx_2 = \frac{1}{2i}(dz_{00} \wedge dz_{10} + dz_{01} \wedge dz_{11}),$$

并且自对偶麦克斯韦形式为

$$F^{+} = f_1 dz_{00} \wedge dz_{10} + f_2(dz_{00} \wedge dz_{11} + dz_{01} \wedge dz_{10}) + f_3 dz_{01} \wedge dz_{11}, \tag{6}$$

其中 $f_1 = -(F_2 + iF_3)/2, f_2 = F_1/2, f_3 = (F_2 - iF_3)/2$. 类似地, 反自对偶的麦克斯韦形式

$$F^{-} = f_1^{-} dz_{00} \wedge dz_{01} + f_2^{-}(dz_{00} \wedge dz_{11} - dz_{01} \wedge dz_{10}) + f_3^{-} dz_{10} \wedge dz_{11}, \tag{7}$$

其中 $f_k^{-} = \overline{f}_k$ $(k = 1, 2, 3)$.

在这种形式中, 如果系数 f_k 延拓到区域 $M_{\pm}^{c} \subset \mathbb{C}^4$, 则 $F^{\pm}$ 被延拓为在其中的双阶 $(2,0)$ 形式. 麦克斯韦方程到区域 $M_{\pm}^{c}$ 的延拓可表达为这些形式对变量 $z_{00}, \cdots, z_{11}$ 的闭条件: 自对偶的是

$$\frac{\partial f_1}{\partial z_{01}} = \frac{\partial f_2}{\partial z_{00}}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z_{11}} = \frac{\partial f_2}{\partial z_{10}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_{01}} = \frac{\partial f_3}{\partial z_{00}}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial z_{11}} = \frac{\partial f_3}{\partial z_{10}}, \tag{8}$$

而反自对偶是

$$\frac{\partial f_1^{-}}{\partial z_{10}} = \frac{\partial f_2^{-}}{\partial z_{00}}, \quad \frac{\partial f_1^{-}}{\partial z_{11}} = \frac{\partial f_2^{-}}{\partial z_{01}}, \quad \frac{\partial f_2^{-}}{\partial z_{10}} = \frac{\partial f_3^{-}}{\partial z_{00}}, \quad \frac{\partial f_2^{-}}{\partial z_{01}} = \frac{\partial f_3^{-}}{\partial z_{11}}. \tag{9}$$

因此为了满足这些方程, 系数 $f_k^{\pm}$ 应可延拓使得在形式 $dF^{\pm}$ 中不出现对变量 $\bar{z}_{jk}$ 的导数, 即这些系数对于变量 z_{jk} 被全纯地延拓.

在延拓到复区域时麦克斯韦方程的解分裂为自对偶和反自对偶部分, 这自然地给出了以扭转子的几何语言的解释: *自对偶形式 (6) 刻画了它们在 $\beta-$ 平面上化为 0 的特性, 而反自对偶 (7) 则在 $\alpha-$ 平面上化 0.*

事实上, 在 α 固定时的 $\beta-$ 平面 Π_α 上, 由关系式 (15) (第 13 目) 参数为 β, 我们发现有

$$dz_{00} = \alpha_0 d\beta_0, \; dz_{01} = \alpha_0 d\beta_1, \; dz_{10} = \alpha_1 d\beta_0, \; dz_{11} = \alpha_1 d\beta_1,$$

由此得到 $dz_{00} \wedge dz_{10} = dz_{00} \wedge dz_{11} + dz_{01} \wedge dz_{10} = dz_{01} \wedge dz_{11} = 0$, 因此 $F^+|_{\Pi_\alpha} = 0$. 对 $\alpha-$ 平面成立类似的结果.

为了得到麦克斯韦解的积分表示, 我们利用彭罗斯所发展的方法. 以第 13 目相应的思路, 我们用变换 p 从闵可夫斯基空间的区域 $M_\pm^c$ 进入到扭转子空间 $\mathbb{P}^3$ 的区域 $D_\pm$ 上. 根据第 13 目的 (11), 变换 p 把点 Z 对应于复射影直线

$$l = p(z) : \begin{aligned} w_2 &= z_{00}w_0 + z_{01}w_1, \\ w_1 &= z_{10}w_0 + z_{11}w_1, \end{aligned} \tag{10}$$

从而如果 $Z \in M_\pm^c$ 则 $l \subset D_\pm$.

因为直线对应于点 Z, 故自然地要找一个沿此直线的积分形式的解. 如果 ζ 为 l 的复参数, 则其上的被积元具有形式 $d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$, 故在此积分中形式的阶降低了 $(1,1)$. 想要得到 $(2,0)$ 形式, 我们因而应该对双阶 $(3,1)$ 的形式沿 l 积分.

按照根迪金 (S. G. Gindikin) 和辛钦 (G. M. Khenkin) 建议的方法 [1], 我们将取乘积形式 $\Omega = \omega \wedge \Omega_0$, 其中

$$\begin{aligned} \Omega_0 = {} & w_0 dw_1 \wedge dw_2 \wedge dw_3 - w_1 dw_0 \wedge dw_2 \wedge dw_3 + \\ & w_2 dw_0 \wedge dw_1 \wedge dw_3 - w_3 dw_0 \wedge dw_1 \wedge dw_2 \end{aligned} \tag{11}$$

是标准的 (3,0) 形式, 而

$$\omega = a_0 d\overline{w}_0 + a_1 d\overline{w}_1 + a_2 d\overline{w}_2 + a_3 d\overline{w}_3$$

为 $D_\pm$ 上的系数为任意的 (0,1) 形式, 这时形式 ω 和 Ω 应该被合理定义, 即可通过在 $\mathbb{P}^3$ 中的分图表的局部坐标表示, 例如, 在仿射部分通过坐标 $\zeta_k = w_k/w_0, k = 1,2,3$ 表达.

因为 $\omega = (a_0\overline{w}_0 + \cdots + a_3\overline{w}_3)d\overline{w}_0 + \overline{w}_0(a_1 d\bar{\zeta}_1 + \cdots + a_3 d\bar{\zeta}_3)$, 故如果 $a_0\overline{w}_0 + \cdots + a_3\overline{w}_3 = 0$ 且 $\overline{w}_0 a_j$ 依赖于比例式 $\zeta_k = \dfrac{w_k}{w_0}$ 即如果 a_j 对变量 $\overline{w}_k$ 是 -1 次齐次的, 那么这个形式便被正确地定义了. 另外, $\Omega_0 = w_0^4 d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\zeta_3$ 和对形式 Ω 定义的合理性要求化成了使 $\overline{w}_0 a_j w_0^4$ 只依赖于 ζ_k 的条件, 即形式 ω 的系数 a_j 具有对变量 w_k 的 -4 齐次.

根据 (10), 直线 $l = p(Z)$ 在仿射坐标下由方程

$$\zeta_2 = z_{00} + z_{01}\zeta_1, \quad \zeta_3 = z_{10} + z_{11}\zeta_1 \tag{12}$$

描述, 并在其上可取 $\zeta = \zeta_1$ 为参数. 在计算形式 Ω_0 在 l 上的限制时应该考虑的不仅是 ζ_2 和 ζ_3 对 ζ 的依赖性, 而且还有对 z_{jk} 的依赖性, 故而在 l 上有

$$\begin{aligned} d\zeta_1 \wedge d\zeta_2 \wedge d\zeta_3 &= (dz_{00} + \zeta dz_{01} + z_{01}d\zeta) \wedge (dz_{10} + \zeta dz_{11} + z_{11}d\zeta) \wedge d\zeta \\ &= [dz_{00} \wedge dz_{10} + \zeta(dz_{00} \wedge dz_{11} + dz_{01} \wedge dz_{10}) + \zeta^2 dz_{01} \wedge dz_{11}] \wedge d\zeta. \end{aligned}$$

[1] 参看他们的文章“彭罗斯变换和复积分几何”,《数学的现代问题》, 卷 17 (M.: ВИНИТИ, 1981, 57 — 111).

在这里出现的我们所需要的形式就是那个对自对偶麦克斯韦形式的表达式 (6) 所涉及的一样. 为简便起见我们记

$$\Phi_{\mathrm{I}} = dz_{00} \wedge dz_{10}, \quad \Phi_{\mathrm{II}} = dz_{00} \wedge dz_{11} + dz_{01} \wedge dz_{10},$$
$$\Phi_{\mathrm{III}} = dz_{01} \wedge dz_{11}.$$

类似地,

$$\omega|_l = \overline{w}_0[(a_1 + \bar{z}_{01}a_2 + \bar{z}_{11}a_3)d\bar{\zeta} + a_2(d\bar{z}_{00} + \bar{\zeta}d\bar{z}_{01}) + a_3(d\bar{z}_{10} + \bar{\zeta}d\bar{z}_{11})], \tag{13}$$

而因为在沿 l 积分时只需要从 Ω 中分离出对 ζ 的 $(1,1)$ 双阶项, 故

$$\begin{aligned}\int_{l=p(Z)} \omega \wedge \Omega_0 &= \int_{\mathbb{C}} \overline{w}_0(a_1 + \bar{z}_{01}a_2 + \bar{z}_{11}a_3)d\bar{\zeta} \wedge w_0^4(\Phi_{\mathrm{I}} + \zeta\Phi_{\mathrm{II}} + \zeta^2\Phi_{\mathrm{III}}) \wedge d\zeta \\ &= \int_{\mathbb{C}} w_0^4\omega|_l \wedge (\Phi_{\mathrm{I}} + \zeta\Phi_{\mathrm{II}} + \zeta^2\Phi_{\mathrm{III}}) \wedge d\zeta.\end{aligned} \tag{14}$$

于是, 每个在区域 $D_\pm$ 中的对变量 w_j[1] 具 -4 次齐次的系数的双阶 (0.1) 的每个形式 ω 对应于形式

$$\widehat{\omega} = \int_{p(Z)} \omega \wedge \Omega_0 = f_1\Phi_{\mathrm{I}} + f_2\Phi_{\mathrm{II}} + f_3\Phi_{\mathrm{III}} \tag{15}$$

它对变量 z_{jk} 为双阶 (2,0), 并具系数

$$f_k(Z) = \int_{\mathbb{C}} \zeta^{k-1}w_0^4\omega|_l \wedge d\zeta, \quad k = 1, 2, 3, \tag{16}$$

其定义在闵可夫斯基复空间 $M_\pm^{\mathbb{C}}$ 中 (回忆一下, 如果 $Z \in M_\pm^{\mathbb{C}}$, 则 $l = p(Z) \subset D_\pm$). 变换

$$\mathscr{P} : \omega \mapsto \widehat{\omega} = \int_{p(Z)} \omega \wedge \Omega_0.$$

也被叫做**彭罗斯变换**. 现在我们来证明这个变换把 $\bar{\partial}-$ 闭形式 ω 变到麦克斯韦方程的解.

定理 1. 对任何一个在 $D_\pm$ 上 $\bar{\partial}-$ 闭的, 具 C^1 类的对变量 w_j 为 -4 次齐次系数的形式 ω, 形式 $\widehat{\omega} = \mathscr{P}(\omega)$ 是麦克斯韦方程在区域 $M_\pm^{\mathbb{C}}$ 中的解.

证明. 需要证明在定理中条件下形式 $\widehat{\omega}$ 的系数 f_k 全纯地依赖于 Z, 并且此形式为闭. 在局部坐标 ζ, ζ_2, ζ_3 下, 形式 $\omega = \overline{w}_0(a_1d\bar{\zeta} + a_2d\bar{\zeta}_2 + a_3d\bar{\zeta}_3)$ 的 $\bar{\partial}-$ 闭的条件为具有形式

$$\frac{\partial a_1}{\partial\bar{\zeta}_2} = \frac{\partial a_2}{\partial\bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial a_1}{\partial\bar{\zeta}_3} = \frac{\partial a_1}{\partial\bar{\zeta}}, \quad \frac{\partial a_2}{\partial\bar{\zeta}_3} = \frac{\partial a_3}{\partial\bar{\zeta}_2},$$

---

[1] 如果 ω 被正确定义, 则对 $\overline{w}_j$ 为 -1 次齐次的条件自动满足.

而在 (16) 的积分号中的函数为

$$g_k = \zeta^{k-1}\overline{w}_0 w_0^4(a_1 + \bar{z}_{01}a_2 + \bar{z}_{11}a_3) = \zeta^{k-1}\overline{w}_0 w_0^4 g, \quad k = 1,2,3. \tag{17}$$

考虑到 (12) 并利用复合函数的微分法则以及 ω 的闭性条件, 我们得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_k}{\partial \bar{z}_{00}} &= \zeta^{k-1}\overline{w}_0 w_0^4\left(\frac{\partial a_1}{\partial \bar{\zeta}_2} + \bar{z}_{01}\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\zeta}_2} + \bar{z}_{11}\frac{\partial a_3}{\partial \bar{\zeta}_2}\right)\\ &= \zeta^{k-1}\overline{w}_0 w_0^4\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} + \bar{z}_{01}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} + \bar{z}_{11}\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_3}\right)a_2.\end{aligned}$$

然而 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} + \bar{z}_{01}\dfrac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_2} + \bar{z}_{11}\dfrac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_3} = \dfrac{d}{d\bar{\zeta}}$ 是对 $\bar{\zeta}$ 沿直线 l 的全微分算子, 这是因为根据 (12), 它的方向向量为 $(1, z_{01}, z_{11})$. 因此对 (16) 积分号下的微分得到

$$\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_{00}} = \int_{\mathbb{C}} \zeta^{k-1} w_0^4 \overline{w}_0 \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_{00}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \int_{\mathbb{C}} d(\zeta^{k-1} w_0^4 \overline{w}_0 a_2 d\zeta),$$

但是由于该积分实际上是沿着射影直线 l 取的, 而此直线的边缘为空集, 故由斯托克斯定理此积分等于 0. 类似地,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_{10}} = \frac{\partial a_1}{\partial \bar{\zeta}_3} + \bar{z}_{01}\frac{\partial a_2}{\partial \bar{\zeta}_3} + \bar{z}_{11}\frac{\partial a_3}{\partial \bar{\zeta}_3} = \frac{da_3}{d\bar{\zeta}},\\ &\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_{01}} = \bar{\zeta}\frac{da_2}{d\bar{\zeta}} + a_2 = \frac{d}{d\bar{\zeta}}(\bar{\zeta}a_2), \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_{11}} = \frac{d}{d\bar{\zeta}}(\bar{\zeta}a_3).\end{aligned}$$

由此完全一样地得到了 f_k 对其他变量的全纯性.

考虑到系数 f_k 的全纯性, 形式 $\hat{\omega}$ 的闭性条件具有形式 (8). 然而由 (17) 和 (12) 有

$$\frac{\partial g}{\partial z_{01}} = \left(\frac{\partial a_1}{\partial \zeta_2} + \bar{z}_{01}\frac{\partial a_2}{\partial \zeta_2} + \bar{z}_{11}\frac{\partial a_3}{\partial \zeta_2}\right)\zeta = \frac{\partial g}{\partial z_{00}}\zeta,$$

但因为 $g_1\zeta = g_2$, 故微分 (16) 的积分得到 $\dfrac{\partial f_1}{\partial z_{01}} = \dfrac{\partial f_2}{\partial z_{00}}$. 类似地可验证 (8) 的其他条件. □

注.

(1) 如果 ω 不仅是 $\overline{\partial}-$ 闭的, 而且是在 $D_\pm$ 中对 w_j 为 -4 次齐次的系数的 $\overline{\partial}-$ 恰当形式, 则 $\mathscr{P}(\omega) = 0$. 事实上, 这时在局部坐标 ζ, ζ_2, ζ_3 下形式 $w_0^4\omega = \overline{\partial}\varphi$, 其中 φ 在 $D_\pm$ 的仿射部分为 C^2 类函数, 并且公式 (16) 有形式

$$f_k(Z) = \int_{\mathbb{C}} \zeta^{k-1}\overline{\partial}\varphi|_l \wedge d\zeta = \int_{\mathbb{C}} d(\zeta^{k-1}\varphi|_l d\zeta).$$

因为这里的积分是沿射影直线进行的, 故由斯托克斯公式 $f_k(Z) = 0, k = 1,2,3$.

(2) 如果形式 ω 光滑地延拓到 $\partial D_\pm = N$ 上, 则公式 (16) 中的积分可以沿直线 $l = p(Z)$ 进行, 其中 $Z \in M$. 在这种情形下我们得到了麦克斯韦方程在实闵可夫斯基空间上的自对偶解.

(3) 对于在 $\mathbb{P}^3$ 中齐次坐标下的系数, 公式 (16) 可重写为

$$f_k(Z) = \int_{\mathscr{P}(Z)} w_0^{3-k} w_1^{k-1} \omega|_l \wedge (w_0 dw_1 - w_1 dw_0), \quad k = 1, 2, 3; \tag{18}$$

这可由在 (18) 中进行简单的变换 $w_1 = w_0 \zeta$ 得到验证.

我们现在来证明彭罗斯变换 $\mathscr{P}$ 给出了麦克斯韦方程的自对偶解. 为此需要研究另一个彭罗斯变换 p 的逆, 它是我们在第 13 目中见到的, 对 4×2 矩阵 $\widetilde{Z} \in \widetilde{M}^c$ 相伴于 $\mathbb{C}^4$ 中的一个平面, 它由该矩阵的列向量张成, 或者等价地, 是 $\mathbb{P}^3$ 中通过由这些列的元素作为齐次坐标给出的点的直线. 因此, 逆变换 p^{-1} 为对每条直线 $l \subset \mathbb{P}^3$, 或等价地, 它的一对点 (w, v) 相伴于将向量 w 和 v 作为列的矩阵 $\widetilde{Z}$.

为了确定起见, 假设 $\Delta = w_0 v_1 - w_1 v_0 \neq 0$; 于是对应于一对点 (w, v) 的矩阵 $\widetilde{Z}$ 换为等价于它的格拉斯曼仿射部分的点

$$\widetilde{Z} \sim \begin{pmatrix} w_0 & v_0 \\ w_1 & v_1 \\ w_2 & v_2 \\ w_3 & v_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_0 & v_0 \\ w_1 & v_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} E \\ Z \end{pmatrix},$$

其中

$$Z = Z(w, v) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} w_2 v_1 - w_1 v_2 & w_0 v_2 - w_2 v_0 \\ w_3 v_1 - w_1 v_3 & w_0 v_3 - w_3 v_0 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

从而, 对于这样的点偶 (w, v) 彭罗斯变换的逆具有形式 $p^{-1} : (w, v) \mapsto Z(w, v)$, 这里的矩阵 Z 由 (19) 定义.

更进一步而言, 将 $\mathbb{P}^3$ 分层为不相交的射影直线族: 于是这样分层中的直线由一个点确定, 这表明彭罗斯映射的逆被它上面的一个单点所决定. 所需要的这个分层可以用所谓的*反对合映射*进行构造; 在 $\mathbb{P}^3$ 的齐次坐标下这个映射为

$$\nu : (w_0, w_1, w_2, w_3) \mapsto (-\overline{w}_1, \overline{w}_0, \overline{w}_3, -\overline{w}_2). \tag{20}$$

这就是一个从 $\mathbb{P}^3$ 到自己的反线性映射, 它有下述性质:

(1) 重复应用这个对合有 $\nu^2(w) = -w$, 其中 $w \in \mathbb{P}^3$ 为任意. (显然.)

(2) 反对合保持区域 $D_\pm$ 和曲面 N 不变. (因为在反对合下, $w_0\overline{w}_2 + w_1\overline{w}_3 \mapsto -\overline{w}_1 w_3 - \overline{w}_0 w_2$, 故其保持形式 $\Phi(w) = -2\mathrm{Im}(w_0\overline{w}_2 + w_1\overline{w}_3)$ 和它定义的这些集合不变, 见第 13 目).

(3) 反对合把通过点 w 和 $\nu(w)$ 的直线变到自己 (点 w 和 $\nu(w)$ 变到 $\nu(w)$ 和 $-w$, 而作为 $\mathbb{P}^3$ 中的点 $-w$ 等同于 w).

(4) 分别通过点 $w, \nu(w)$ 和 $w', \nu(w')$ 的直线 l 和 l' 或者不相交或者重合. (如果 l 和 l' 相交, 则可找到 $\lambda_j, \lambda'_j \in \mathbb{C}$ 使得 $\lambda_1 w + \lambda_2 \nu(w) = \lambda'_1 w' + \lambda'_2 \nu(w')$. 因为 w 和

$\nu(w)$ 为 l 的不同点, 于是它们复线性无关; 又因为 $\dim_{\mathbb{C}}\mathbb{P}^3 = 3$, 故或者 w' 或者 $\nu(w')$ 可经其线性表示. 譬如, 设 $w' = \lambda w + \mu\nu(w)$ 于是 $\nu(w') = \bar{\lambda}\nu(w) - \bar{\mu}w$, 即点 w' 和 $\nu(w')$ 都属于通过 w 和 $\nu(w)$ 的直线, 从而 $l' = l$.)

我们以 $L_{\mathbf{E}}$ 表示通过点 w 和 $\nu(w)$ 的 $\mathbb{P}^3$ 中的射影曲线族 (这个记号的意义马上会得到解释). 由反对合的性质 (4) 知, 这个族将 $\mathbb{P}^3$ 分层为不相交的直线, 又由性质 (2) 知, 这些直线中的每一条或者属于 D_+ 或者 D_- 或者 N. $L_{\mathbf{E}}$ 中的直线完全被它自身上的一个点确定, 故而在 $L_{\mathbf{E}}$ 上彭罗斯变换的逆不是由一对点而是一个单点 w 决定. 特别, 对那些满足 $\Delta = |w_0|^2 + |w_1|^2 \neq 0$ 的点 w, 由公式 (19), 其中 $v = \nu(w)$, 我们得到

$$p^{-1} : w \mapsto Z(w) = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} w_2\overline{w}_0 - w_1\overline{w}_3 & w_0\overline{w}_3 + w_2\overline{w}_1 \\ w_3\overline{w}_0 + w_1\overline{w}_2 & w_3\overline{w}_1 - w_0\overline{w}_2 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

由此公式看出, 分层 $L_{\mathbf{E}}$ 的直线经由彭罗斯变换的逆变到在实四维平面

$$\mathbf{E} = \{Z \in \mathbb{C}^4 : z_{11} = -\bar{z}_{00}, z_{10} = \bar{z}_{01}\} \tag{22}$$

中的点.

另一方面, 由公式 (10), 任意点 $Z \in \mathbf{E}$ 对应于直线 $l = \{w_2 = z_{00}w_0 + z_{01}w_1, w_3 = \bar{z}_{01}w_0 - \bar{z}_{00}w_1\}$. 但根据 (20), 对于任意点 $w \in l$, 点 $v = \nu(w)$ 的坐标满足方程 $\bar{v}_3 = -z_{00}\bar{v}_1 + z_{01}\bar{v}_0, -\bar{v}_2 = -\bar{z}_{01}\bar{v}_1 - \bar{z}_{00}\bar{v}_0$; 从它们转到复共轭, 我们看到点 $v \in l$, 即 $l \in L_{\mathbf{E}}$. 故而彭罗斯变换 p 在平面 $\mathbf{E}$ 的点和分层 $L_{\mathbf{E}}$ 的直线之间建立了一一对应.

由 (22) 看到, 对于点 $Z \in \mathbf{E}$,

$$\operatorname{Im} Z = \frac{1}{2i}(Z - Z^*) = \begin{pmatrix} y_{00} & 0 \\ 0 & y_{00} \end{pmatrix}.$$

所以集合

$$\mathbf{E}_\pm = \{Z \in \mathbf{E} : y_{00} \gtrless 0\}, \quad \mathbf{E}_0 = \{Z \in \mathbf{E} : y_{00} = 0\} \tag{23}$$

属于相应的 $M_\pm^c$ 和 M, 因而变换 p 把它们变成了落在 $D_\pm$ 或 N 上的直线.

平面 $\mathbf{E}$ 具有有趣的物理意义: 泡利映射

$$z_{00} = z_0 + z_1, \ z_{01} = z_2 + iz_3, \ z_{10} = z_2 - iz_3, \ z_{11} = z_0 - z_1,$$

的逆 (参看第 13 目) 把该平面变到复闵可夫斯基空间 M^c 的一个子集, 在此子集上 $\operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2 = \operatorname{Im} z_3 = 0$, 即时间 $z_0 = ix_0$ 为纯虚数, 而空间坐标 $z_k = x_k$ $(k = 1, 2, 3)$ 为实的. 在这个子集上,

$$\|Z\|^2 = -(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = -|x|^2$$

等于差一个符号的欧几里得范数. 故而称 $\mathbf{E}$ 为 M^c 的欧几里得子空间. 我们还发现, 线性变换

$$z_{00}+z_{11}=iz_1', \quad z_{00}-z_{11}=z_2',$$
$$z_{01}+z_{10}=z_3', \quad z_{01}-z_{10}=iz_4'$$

把 $\mathbf{E}$ 变到实空间 $\{z'\in\mathbb{C}^4:\operatorname{Im} z'=0\}$.

预备工作已经结束, 可以开始证明上面所阐述的定理了. 为了确定性, 我们限制在区域 M_+^c 上.

定理 2. 对麦克斯韦方程在区域 M_+^c 中的任意自对偶解

$$F^+=f_1\Phi_{\mathrm{I}}+f_2\Phi_{\mathrm{II}}+f_3\Phi_{\mathrm{III}}, \tag{24}$$

存在一个在区域 $D_+\in\mathbb{P}^3$ 中 $\overline{\partial}-$ 闭的双阶 (0,1) 形式 ω, 其系数为对变量 w_j 为 -4 次齐次, 而它的彭罗斯变换与这些解相等: $F^+=\mathscr{P}(\omega)$.

证明. 由所给出的形式 (24) 的系数和 D_+ 中的扭转子 w 和 v, 利用彭罗斯逆变换 (19), 我们构造函数 $g_k(w,v)=f_k(Z(w,v)), k=1,2,3$, 并记

$$\varphi(w,v)=\frac{1}{(w_0v_1-w_1v_0)^3}(g_1v_1^2-2g_2v_0v_1+g_3v_0^3) \tag{25}$$

我们考虑 D_+ 中满足 $\Delta=w_0v_1-w_1v_0\neq 0$). 现引进双阶 (1,0) 的微分形式

$$\omega(w,v)=\sum_{j=0}^{3}\frac{\partial\varphi}{\partial w_j}dv_j,$$

并考虑它在分层 $L_{\mathbf{E}}$ 上的限制, 即令 $v=\nu(w)$, 其中 ν 为反对合映射 (20); 我们得到了 D_+ 上的 (0,1) – 形式:

$$\omega(w)=\frac{\partial\varphi}{\partial w_1}d\overline{w}_0-\frac{\partial\varphi}{\partial w_0}d\overline{w}_1-\frac{\partial\varphi}{\partial w_3}d\overline{w}_2+\frac{\partial\varphi}{\partial w_2}d\overline{w}_3\bigg|_{v=\nu(w)}. \tag{26}$$

因为 φ 为对变量 w_j 的 -3 次齐次函数, 故 ω 对这些变量是 -4 次齐次的. 形式 ω 可通过 $\mathbb{P}^3$ 的局部坐标表达, 而直接但相当繁复的利用复合函数 g_k 求微分的计算证明, 如果 F^+ 为麦克斯韦方程的解, 则它在 D_+ 中为 $\overline{\partial}-$ 闭的. 因此, 形式 (26) 满足那些加在定理 1 中形式 ω 的条件.

另外, 在直线 $l\in L_{\mathbf{E}}$ 上由公式 (13) 有

$$\omega|_l=\overline{w}_0\left(-\frac{\partial\varphi}{\partial w_0}-\bar{z}_{01}\frac{\partial\varphi}{\partial w_3}+\bar{z}_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial w_2}\right)d\bar{\zeta}+\cdots$$

(我们在 (13) 中只写下了对沿 l 的积分中本质的部分). 我们在这里对 (25) 中函数 φ 计算导数, 发现在圆括号里的表达式等于

$$\frac{3v_1}{\Delta^4}G - \frac{1}{\Delta^3}\left(\frac{\partial G}{\partial w_0} + \bar{z}_{01}\frac{\partial G}{\partial w_3} - \bar{z}_{11}\frac{\partial G}{\partial w_2}\right),$$

像以前一样, $\Delta = w_0v_1 - w_1v_0$, 而 $G = g_1v_1^2 - 2g_2v_0v_1 + g_3v_0^2$. 利用公式 (21) 计算证明, 当 $v = \nu(w)$ 时在后面的那个括号中表达式等于零, 并且

$$w_0^4\omega|_l = \frac{3\overline{w}_0^2w_0^4}{(|w_0|^2 + |w_1|^2)^4}(g_1\overline{w}_0^2 + 2g_2\overline{w}_0\overline{w}_1 + g_3\overline{w}_1^2) + \cdots .$$

在逆彭罗斯变换 p^{-1} 下同一个点 $Z = Z(w)$ 对应于直线 $l \in L_{\mathbf{E}}$ 的所有点, 从而沿 l 的积分下系数 $g_k(w, \nu(w)) = f_k(Z)$ 为常数. 在 l 的仿射部分引进坐标 $\zeta = w_1/w_0$, 我们从而最终得到

$$w_0^4\omega|_l = \frac{3}{(1 + |\zeta|^2)^4}(f_1 + 2\bar{\zeta}f_2 + \bar{\zeta}^2f_3) + \cdots .$$

把它代入 (16), 我们得到对应于形式 (26) 的麦克斯韦形式 $\hat{\omega}$ 的系数

$$\hat{f}_k(Z) = 3\left\{f_1\int_{\mathbb{C}}\frac{\zeta^{k-1}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^4} + 2f_2\frac{\zeta^{k-1}\bar{\zeta}d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^4} + \right.$$
$$\left. f_3\int_{\mathbb{C}}\frac{\zeta^{k-1}\bar{\zeta}^2d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^4}\right\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

在此出现的积分, 经极坐标下的初等计算, 当 $k = 1$ 时, 由对称性知只有第一个积分非零, 当 $k = 2$ 时, 则只有第二个, 当 $k = 3$ 时, 只有第三个积分非零. 于是我们发现

$$\int_{\mathbb{C}}\frac{d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^4} = 2\int_{\mathbb{C}}\frac{|\zeta|^2d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^4} = \int_{\mathbb{C}}\frac{|\zeta|^4d\bar{\zeta}\wedge d\zeta}{(1 + |\zeta|^2)^4},$$

从而 $\hat{f}_k = cf_k$ 对 $k = 1, 2, 3$ 对应同一个常数 c.

因此, 如果令 $\omega = \omega(w)/c$, 其中 $\omega(w)$ 在 (26) 中有定义, 于是由定理 1 知形式 ω 和任意直线 $l \in L_{\mathbf{E}}$ 将对应于一个与所给解 F^+ 相同的解. 还要注意, 在闵可夫斯基的区域 M_+^c 中的族 $L_{\mathbf{E}}$ 的直线 l 对应于 $\mathbf{E}_+$ 中的点, 因此系数 $\hat{f}_k/c$ 和 f_k 在整个集合 $\mathbf{E}_+$ 上重合. 然而这些系数在区域 M_+^c 中全纯, 但 $\mathbf{E}$ 复线性等价于实子空间 $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{C}^4$. 按第 5 目的唯一性定理最终得到: 在 M_+^c 中处处有 $\hat{f}_k = cf_k$, 即所构造的解处处与 F^+ 重合. □

在前面我们已注意到, 如果形式 ω 光滑地延拓到 N 上, 故 $\hat{\omega} = \mathscr{P}(\omega)$ 为麦克斯韦方程在实闵可夫斯基空间 M 的解. 但是, 这些特别得到的并不是在 M 上全部的解, 我们只能证明, 任何这样的解可以通过在区域 $M_\pm^c$ 中解的边界值 (在广泛意义下) 表达.

在第 52 目中我们将继续研究麦克斯韦方程, 并将引进它们的解的积分表示, 这对于应用更为方便.

§6. 空间 $\mathbb{C}^n$ 的几何

空间 $\mathbb{C}^n$ 的几何较之于复直线 $\mathbb{C}$ 的几何更加丰富, 而我们从描述 $\mathbb{C}^n$ 的子流形的基本类型作为开端, 它们依其复结构处于不同的情况.

17. $\mathbb{C}^n$ 的子流形

实余维 1 的子流形 (实超平面) 是最简单的. 在它自身每点的邻域 U 中, 这个流形 M 由一个实方程给出:

$$M = \{z \in U : \varphi(z) = 0\}. \tag{1}$$

假设 $\varphi \in C^1(U)$, 及向量

$$\nabla_z \varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial z_n}\right) \tag{2}$$

在 U 中非零. 在点 a 的切平面 $T_a(M)$ 的方程有形式

$$\sum_{\nu=1}^n \left.\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}\right|_a (x_\nu - \alpha_\nu) + \sum_{\nu=1}^n \left.\frac{\partial \varphi}{\partial y_\nu}\right|_a (y_\nu - \beta_\nu) = 0,$$

其中

$$\alpha_\nu + i\beta_\nu = a_\nu.$$

或者经过标准变换后有

$$\sum_{\nu=1}^n \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\right|_a (z_\nu - a_\nu) + \sum_{\nu=1}^n \left.\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\nu}\right|_a (\bar{z}_\nu - \bar{a}_\nu) = 0. \tag{3}$$

因为 φ 为实函数, 故 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\nu} = \overline{\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}}$, 从而在 (3) 中的第二个和式复共轭于第一个. 由此得到, 在实超平面 $T_a(M)$ 中包含了复超平面

$$\sum_{\nu=1}^n \left.\frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\right|_a (z_\nu - a_\nu) = 0, \tag{4}$$

它被称做*复切平面*并以符号 $T_a^c(M)$ 表示.

方程 (3) 和 (4) 重写为

$$\operatorname{Re}\,(z - a, \overline{\nabla_a \varphi}) = 0, \quad (z - a, \overline{\nabla_a \varphi}) = 0. \tag{5}$$

因为埃尔米特内积的实部等于欧几里得内积, 则由 (5) 的第一个方程看出, 复共轭于 $\nabla_a \varphi$ 的向量 $n_a = \overline{\nabla_a \varphi}$ 对 M 为法向量 [1]. 我们还注意到, 向量 $i\overline{\nabla_a \varphi}$ 实正交于向量

[1] 可以另外的解释为: 法方向 $\left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \cdots, \dfrac{\partial \varphi}{\partial y_n}\right) \in \mathbb{R}^{2n}$ 在复化下变化为向量

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} + i\frac{\partial \varphi}{\partial y_n}\right) = 2\overline{\nabla \varphi} \in \mathbb{C}^n.$$

$\overline{\nabla_a\varphi}$ (因为 Re $(i\overline{\nabla_a\varphi}, \overline{\nabla_a\varphi}) = 0$), 从而属于 $T_a(M)$. 另外, 由 (5) 的第二个方程看出, 如果 $z \in T_a^c(M)$, 则 $(z-a, i\overline{\nabla_a\varphi}) = 0$, 即 $z-a$ 复正交于 $i\overline{\nabla_a\varphi}$. 如果按法方向 n_a 张成复直线 $n_a^c = \{z - a = \lambda n_a, \lambda \in \mathbb{C}\}$, 称其为在点 a 的 M 的复法线, 它与 $T_a(M)$ 正好交于向量 $i\overline{\nabla_a\varphi}$. 所有这些都显示在图 19 上.

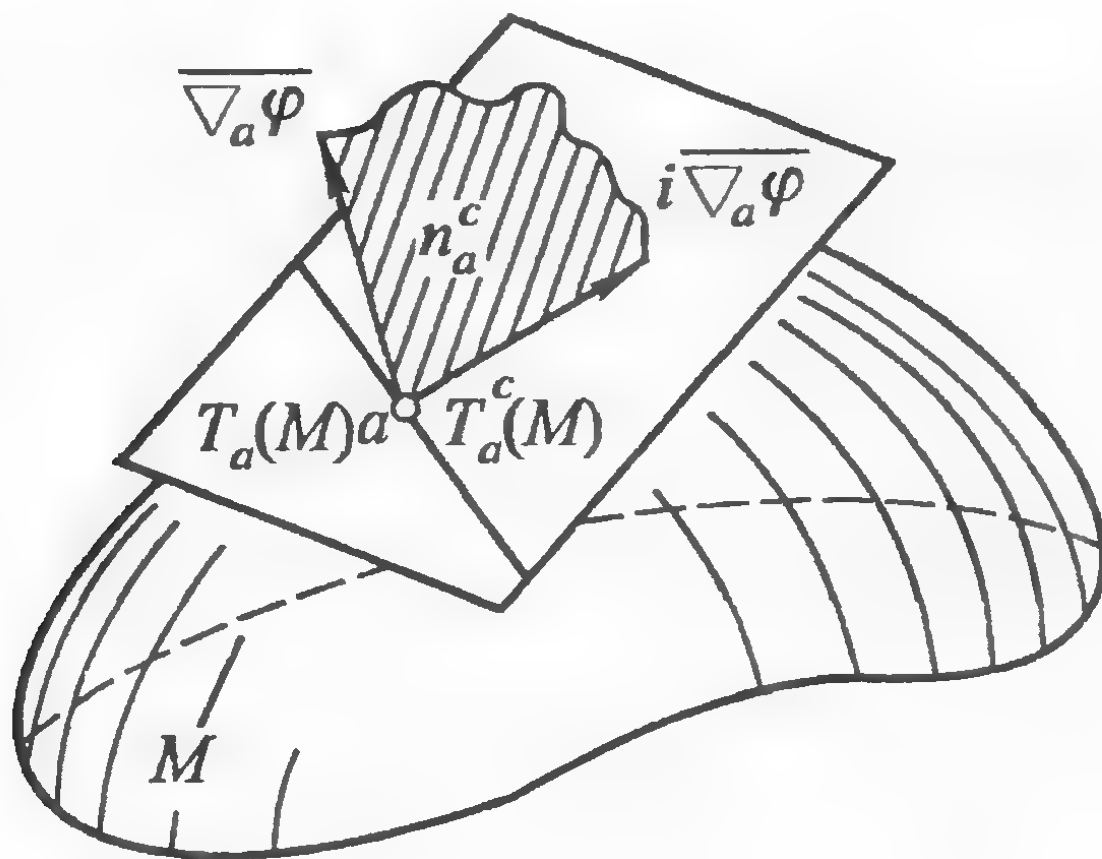


图 19

例题.

(1) 球面 $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = R\}$ 在点 a 的复切平面具有方程

$$\sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu (z_\nu - a_\nu) = 0 \quad \text{或者} \quad \sum_{\nu=1}^{n} \bar{a}_\nu z_\nu = R^2,$$

因为 $\sum \bar{a}_\nu a_\nu = R^2$, 其中 $a \in S$.

(2) 以齐次方程 $\operatorname{Im}(w_0\overline{w}_2 + w_1\overline{w}_3) = 0$ 给出的实超曲面 $N \subset \mathbb{P}^3$ (参看第 13 目) 在区域 $U_0 = \{[w] \in \mathbb{P}^3 : w_0 \neq 0\}$ 中的局部坐标 $z_\nu = w_\nu / w_0$ 下以方程

$$\bar{z}_2 + z_1\bar{z}_3 - z_2 - \bar{z}_1 z_3 = 0$$

给出. 从而在任意点 $a \in N, T_a^c(N)$ 有形如

$$\bar{a}_3 z_1 - z_2 + \bar{a}_1 z_3 + \bar{a}_2 = 0$$

的方程.

转向实余维 $k > 1$ 的流形时我们假定它们由 k 个实方程局部给出:

$$M = \{z \in U : \varphi_1(z) = \cdots = \varphi_k(z) = 0\}, \tag{6}$$

并且在 U 处处有

$$d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_k \neq 0. \tag{7}$$

为了解释最后这个条件的意义, 我们再次令 $y_\nu = x_{n+\nu}$, 于是 (7) 重写为

$$\sum_\nu \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_k)}{\partial(x_{\nu_1}, \cdots, x_{\nu_k})} dx_{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\nu_k} \neq 0,$$

其中取和是按照指标 $1,2,\cdots,2n$ 的定向组 $\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_k)$ 进行. 由此显见, (7) 表示了矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial x_\nu}\right)$ $(\mu=1,\cdots,k;\nu=1,\cdots,2n)$ 的秩的极大性条件, 或者说

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial z_\nu},\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\bar{z}_\nu}\right)=k,\quad \mu=1,\cdots,k;\quad \nu=1,\cdots,n.$$

因此, (7) 表达了向量 $\overline{\nabla\varphi_1},\cdots,\overline{\nabla\varphi_k}$ 的*实线性无关性*. 当此条件满足时, 由实方程组

$$\operatorname{Re}(z-a,\overline{\nabla_a\varphi_1})=0,\cdots,\operatorname{Re}(z-a,\overline{\nabla_a\varphi_k})=0 \tag{8}$$

在每点 $a\in M\bigcap U$ 定义的切平面 $T_a(M)$ 非退化: 它具有等于 $\dim_{\mathbb{R}}M$ 的维数 $m=2n-k$.

复切平面 $T_a^c(M)$ 由复方程组

$$(z-a,\overline{\nabla_a\varphi_1})=0,\cdots,(z-a,\overline{\nabla_a\varphi_k})=0 \tag{9}$$

定义, 是在 $T_a(M)$ 中所有复直线的集合, 它也可定义为交集 $T_a(M)\bigcap iT_a(M)$, 其中 $iT_a(M)$ 理解为向量 $i(z-a)$ 的集合, 其中 $z\in T_a(M)$ 为任意. 不同于 $T_a(M),T_a^c(M)$ 的实维数可能有差别.

特别, 如果在 U 中

$$\partial\varphi_1\wedge\cdots\wedge\partial\varphi_k\neq 0, \tag{10}$$

则 $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial z_\nu}\right)=k$ 且向量 $\overline{\nabla\varphi_1},\cdots,\overline{\nabla\varphi_k}$ 为*复线性无关*. 于是, 如在 (9) 中看到的, $T_a^c(M)$ 的复维数等于 $n-k$, 而它的实维数 $2n-2k<m$; 当 $k\geqslant n$ 时这个维数等于零.

但是有可能向量 $\overline{\nabla\varphi_j}$ 实线性无关, 而却复线性相关 (即满足条件 (7) 却不满足 (10)). 这时 $\dim_{\mathbb{R}}T_a^c(M)$ 可能大于 $2n-2k$, 而在某些情形下甚至达到 $2n-k=\dim_{\mathbb{R}}M$.

例题 (3). 考虑在 $\mathbb{C}^2$ 中两个实二维平面 $\Pi_1=\{z_1=\bar{z}_2\}$ 和 $\Pi_2=\{z_1=z_2\}$. 它们各自由一对实方程所描述:

$$\Pi_1: x_1-x_2=0,\ y_1+y_2=0;\ \Pi_2: x_1-x_2=0, y_1-y_2=0.$$

在第一种情形, $\overline{\nabla\varphi_1}=(1/2,-1/2)$ 和 $\overline{\nabla\varphi_2}=(i/2,i/2)$ 复线性无关且 $\dim_{\mathbb{R}}T^c(\Pi_1)=0$. 而在第二种情形, 向量 $\overline{\nabla\varphi_1}=(1/2,1/2)$ 和 $\overline{\nabla\varphi_2}=(i/2,i/2)$ 为实线性无关而复线性相关, 且 $\dim_{\mathbb{R}}(\Pi_2)=2$.

切平面 $T(M)$ 和复切平面 $T^c(M)$ 维数的差刻画了相对于 $\mathbb{C}^n$ 复结构的子流形不同位置的特性. 我们列出这些子流形中最重要的类型.

(1) *复流形*. 如同在 1900 年由列维 – 齐维塔 (Levi-Civita) 所证明的, 这种情况由 $T(M)$ 和 $T^c(M)$ 的维数的相等性质作出了特征刻画.

定理 1. 对 C^1 类的流形 $M \subset \mathbb{C}^n$ 在每点 $z \in M$ 有

$$T_z(M) = T_z^c(M) \tag{11}$$

当且仅当 M 为复流形.

证明. 设流形 M 其复结构局部地由 $f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0$ 给出, 其中函数 f_μ 在邻域 $U \ni a$ 中全纯, 并在其中 $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right) = k$. 令 $\varphi_\mu = \dfrac{1}{2}(f_\mu + \bar{f}_\mu), \varphi_{k+\mu} = \dfrac{1}{2}(f_\mu - \bar{f}_\mu), \mu = 1, \cdots, k$, 我们便以实方程 $\varphi_1 = \cdots = \varphi_{2k} = 0$ 给出了 $M \bigcap U$. 因为 $\overline{\nabla\varphi_{k+\mu}} = i\overline{\nabla\varphi_\mu}$, 故而曲面 $\{\varphi_\mu = 0\}$ 的切平面和曲面 $\{\varphi_{k+\mu} = 0\}$ 的切平面的交是个复超平面. 所以所有超曲面 $\{\varphi_\mu = 0\}, \mu = 1, \cdots, 2k$ 的切平面的交 $T(M)$ 也就是复平面.

反之, 设 $T_z(M) = T_z^c(M)$, 其中 $z \in M$ 为任意点. 固定一个点 $a \in M$, 不失一般性可设 $a = 0$, 且 $T_0(M)$ 与在坐标 $'z = (z_1, \cdots, z_m)$ 下的 $\mathbb{C}^m$ 相等. 根据隐函数定理在 0 的邻域中流形 M 由方程组 $z_\mu = f_\mu('z)$ 给出, 其中 $\mu = m+1, \cdots, n$, 而 f_μ 为 C^1 类复函数. 只需证明 f_μ 对每个单独的变量为全纯即可. 因此我们以 $\zeta = \xi + i\eta$ 代表 $z_1, \cdots, z_m$ 中任意一个, 并考虑实二维平面 $S = \{w = f(\zeta)\}$, 其中 $w = (z_{m+1}, \cdots, z_n)$. S 在点 ζ 的切平面由向量

$$w - w^0 = \left.\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right|_{\zeta_0}(\zeta - \zeta_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}}\right|_{\zeta_0}(\bar{\zeta} - \bar{\zeta}^0)$$

组成. 然而此切平面是条复直线 (因为它是 $T(M)$ 和通过点 ζ_0 的复平面的交), 故而 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}} = 0$. □

* 证明, C^1 类映射 $f: D \to \mathbb{C}^n$ 在区域 $D \subset \mathbb{C}^m$ 全纯当且仅当它的图像 $\{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^{m+n} : z \in D\}$ 为复流形. *

(2) *极大复流形*. 这是那样的流形 M, 在每点 z 的 $T_z(M)$ 和 $T_z^c(M)$ 的实维数相差 1 (因此 $\dim_{\mathbb{R}} M$ 为奇数). 如像前面所看到的, 实的超平面, 特别是 $\mathbb{C}^n$ 中区域的边界当它是 C^1 类时属于这个类. 因为 m 维复流形局部可看为 $\mathbb{C}^m$ 中的区域, 故而对于 $\mathbb{C}^n$ 中复子流形上区域的边界这也是对的.

粗略地说, 这些穷竭了极大复流形的类: 不久前, R. 哈维 (Harvey) 和 B. 劳森 (Lawson) 证明了, 在 $\mathbb{C}^n$ 中任意极大复闭链 (即无边界的流形) 可作为某个流形的边界, 但它可能带有奇点 [1].

---

[1]这时假定了闭链维数 $m > 1$; 在 $m = 1$ (实曲线) 的情形极大复的条件是平凡的, 而以其他的一些条件替换. 见 R. Harvey, *Holomorphic chains and their boundaries*, Several Complex Variables, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. 30, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977, pp. 309 — 382.

* 证明, a) 极大复 $\mathbb{R}-$ 线性子空间 $L \subset \mathbb{C}^n$ 是在其复线性包 $L+iL$ 中的实超平面; b) 极大复流形 M 局部地在点 $a \in M$ 的邻域中相互一一地投射到 $T_a(M)$ 的复线性包中的实超平面. *

(3) 全实流形. 这是那样的流形 M, 在它的每点 z, 它的复平面 $T_z^c(M)=0$. 容易看出, 对这样的流形其实维数 $m \leqslant n$. 事实上, 在点 a 的邻域 U 中我们以方程组 (6) 给出 M, 其中 $k=2n-m$. 如果 $m>n$, 则 $k<n$, 从而定义了 $T_a^c(M)$ 的线性方程组 (9) 的秩小于 n, 即这个方程组具有非零解 $z-a$, 就是说, $T_a^c(M) \neq 0$.

当 $m=n$, 则此方程组的秩不超过 n, 且等于 n 当且仅当向量 $\overline{\nabla\varphi_1}, \cdots, \overline{\nabla\varphi_n}$ 为复无关, 即满足条件

$$\partial\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \partial\varphi_n \neq 0 \tag{12}$$

参照 (10)). 因此当 $m=n$ 时这个条件特征描述了全实流形.

实子空间 $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ 和实环面 $T^n=\{z \in \mathbb{C}^n : |z_\nu|=1, \nu=1, \cdots, n\}$ 可以当作全实流形的例子. 在第一种情形 $T(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^n$ 显然并不包含复直线, 在第二个例子中 T^n 由方程 $\varphi_\nu(z)=z_\nu\bar{z}_\nu-1$ $(\nu=1,\cdots,n)$ 给出, 并且向量 $\overline{\nabla\varphi_\nu}=z_\nu$ 为复线性无关.

* 证明, a) $\mathbb{C}^n$ 中的任意平面都是复平面和全实平面的和; b) 如果在点 $a \in U$ 的邻域 U 中在点 a 有 $\partial f/\partial\bar{z} \neq 0$, 则图像 $\{(z, f(z)) \in \mathbb{C}^2 : z \in U \subset \mathbb{C}\}$ 为完全实流形. *

(4) 生成流形. 这是那样的流形 M, 在它的每点 z 的 $T_z(M)$ 的基向量的复线性包等同于整个空间 $\mathbb{C}^n$. 设 M 的实维数等于 m; 像前面那样局部地由 $k=2n-m$ 的方程组 (6) 给出它, 则我们看出, 它为生成流形当且仅当方程组 (9) 的秩为极大 (等于 k). 事实上, 如果这个秩等于 $k'<k$, 则 $\dim_{\mathbb{C}} T_z(M)=m'=n-k'$, 于是我们可选取 $T_z(M)$ 的基使它前 $2m'$ 个向量属于 $T_z^c(M)$. 因为这些向量的复线性包不由 $T_z^c(M)$ 之外得到, 而那些其余的 $m-2m'$ 个向量将其实维数加倍, 于是 $T_z(M)$ 中全部基向量的复线性包的维数等于 $m'+m-2m'=m-m'=n-(k-k')$. 因此, 这个包正好在 $k'=k$ 时与 $\mathbb{C}^n$ 重合.

如同上面所指出的, 方程组 (9) 的极大秩条件是向量 $\overline{\nabla\varphi_\nu}$ 为复线性无关, 即 (10) 是流形 M 为生成流形的条件. 显然对于生成流形有 $m \geqslant n$. 特别, 所有实超平面是生成流形. 当 $m=n$ 时, 由 (12) 看出, 生成流形与全实流形相同.

* 证明, 生成流形可如此刻画, 即它的任一点的切平面不包含在任一个复超平面中. *

18. 维尔丁格 (Wirtinger) 定理

我们记得在线性代数中, 称从 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}$ 的映射为 $\mathbb{C}^n$ 上的埃尔米特形式 $h(u,v)$ 是说, 它对第一个向量是复线性的, 并满足埃尔米特对称性 $h(u,v)=\overline{h(v,u)}$ (因而对第二个向量为反线性的). 如果令 $h=g+if$, 则满足关系式 $g(v,u)=g(u,v)$ 和 $f(v,u)=-f(u,v)$, 因而 $g=\mathrm{Re}\, h$ 为对称的而 $f=\mathrm{Im}\, h$ 为反对称的形式.

设 $e^1, \cdots, e^n$ 为空间 $\mathbb{C}^n$ 的基. $u = \sum_{\nu=1}^{n} \zeta_\nu(u) e^\nu$ 为 u 在此基下的展式: 设对 v 也写出这样的展式. 在这个基下的埃尔米特形式可表示为

$$h(u,v) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu} \zeta_\mu(u) \overline{\zeta_\nu(v)}, \tag{1}$$

其中 $h_{\mu\nu} = h(e^\mu, e^\nu)$, 从而 $h_{\nu\mu} = \overline{h_{\mu\nu}}$, 使 $h = (h_{\mu\nu})$ 为埃尔米特矩阵. 为了在此分出其实部和虚部, 我们令 $\zeta_\mu = \xi_\mu + i\xi_{n+\mu} (\mu = 1, \cdots, n)$ 和 $h_{\mu\nu} = h'_{\mu\nu} + ih''_{\mu\nu}$; 经简单变换后我们得到

$$g = \operatorname{Re} h = \sum_{\mu,\nu=1}^{2n} g_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu, \quad f = \operatorname{Im} h = \sum_{\mu,\nu=1}^{2n} f_{\mu\nu} \xi_\mu \xi_\nu, \tag{2}$$

其中实矩阵 $g = (g_{\mu\nu})$ 和 $f = (f_{\mu\nu})$ 分别是对称和反对称的 $(g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, f_{\mu\nu} = -f_{\nu\mu})$.

设 h 为正形式, 即形式 $h(u,u) = g(u,u)$ 为正定, 或等价地, 矩阵 $(h_{\mu\nu})$ 为正定. 于是这个形式给出了 $\mathbb{C}^n$ 中的埃尔米特内积 $(u,v) = h(u,v)$, 如果我们将它们看成 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的向量, 则形式 $g = \operatorname{Re} h$ 为 u 和 v 的黎曼内积. 特别, 在 $\mathbb{C}^n$ 的标准基下, 标准的埃尔米特形式

$$h(u,v) = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu(u) \overline{z_\nu(v)}, \tag{3}$$

而它的实部和虚部分别为

$$\begin{aligned} g(u,v) &= \sum_{\nu=1}^{n} (x_\nu(u) x_\nu(v) + y_\nu(u) y_\nu(v)), \\ f(u,v) &= \sum_{\nu=1}^{n} (y_\nu(u) x_\nu(v) - x_\nu(u) y_\nu(v)) \end{aligned} \tag{4}$$

(我们设 $z_\nu = x_\nu + iy_\nu$). 这些公式与第 1 目中关于内积 (u,v) 的公式一致.

每个正形式 h 在基 $\{e^\mu\}$ 及微分 $\{d\zeta_\nu\}$ 的对偶基 [1] 下对应了埃尔米特度量形式

$$h = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu} d\zeta_\mu \overline{d\zeta_\nu} \tag{5}$$

特别地, $\mathbb{C}^n$ 的标准度量形式为

$$h = \sum_{\nu=1}^{n} dz_\nu \overline{dz_\nu}, \tag{6}$$

从而

$$h(u,u) = g(u,u) = \sum_{\nu=1}^{n} |dz_\nu|^2 = ds^2. \tag{7}$$

[1] 这表明 $d\zeta_\mu(e^\nu) = \delta_{\mu\nu}$, 这是克罗内克符号.

对于积分和其他的分析运算, 把埃尔米特形式 (5) 换成相应的微分形式是比较方便的. 可以这样做: 通常微分的乘积被换成外积并引入因子 $i/2$:

$$\hat{h} = \frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n} h_{\mu\nu} d\zeta_\mu \wedge d\bar{\zeta}_\nu. \tag{5'}$$

其乘积因子保证了形式 $\hat{h}$ 为实的. 事实上, $d\zeta_\mu \wedge d\bar{\zeta}_\mu = -2i d\xi_\mu \wedge d\xi_{n+\mu}$, 而系数 $h_{\mu\mu}$ 由埃尔米特性质知为实的, 故形如 $\frac{i}{2}h_{\mu\mu}d\zeta_\mu \wedge d\bar{\zeta}_\mu$ 的所有项都是实的. 而其他的项为实的原因在于当 $\mu \neq \nu$ 时, 和 $h_{\mu\nu}d\zeta_\mu \wedge d\bar{\zeta}_\nu + h_{\nu\mu}d\zeta_\nu \wedge d\bar{\zeta}_\mu$ 为纯虚的 [1].

特别地, 标准埃尔米特形式 (6) 对应于微分形式

$$\varphi_0 = \frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^{n} dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}|z|^2, \tag{6'}$$

其中 $|z|^2 = \sum z_\nu \bar{z}_\nu$ 为欧几里得平方模. 为今后书写方便我们与通常算子

$$d = \partial + \bar{\partial} = \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu}dx_\nu + \frac{\partial}{\partial y_\nu}dy_\nu\right)$$

一起还引进"共轭微分"算子

$$d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{4i} = \frac{1}{4}\sum_{\nu=1}^{n}\left(-\frac{\partial}{\partial y_\nu}dx_\nu + \frac{\partial}{\partial x_\nu}dy_\nu\right); \tag{8}$$

这两个算子在下述意义下是实的, 即将其用于实函数时给出了实的结果. 这两个算子的复合

$$dd^c = (\partial + \bar{\partial})\frac{\partial - \bar{\partial}}{4i} = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}, \tag{9}$$

故而度量微分形式 (6) 可重写为形式 [2]

$$\varphi_0 = dd^c|z|^2. \tag{10}$$

* 1. 证明, 如果 $u = \mathrm{Re}\, f, v = \mathrm{Im}\, f$ 为共轭多重调和函数, 则 $d^c u = \frac{1}{4}dv$.

2. 当 $n = 1$ 时, 由题 1 推导出 $d^c \ln|z|^2 = \frac{1}{2}d\arg z$. *

---

[1] 这里对形式的实性质理解为经变换后它们可化为实微分形式 $d\xi_\mu$ 带实系数的组合.

[2] 在前面的计算中我们利用了

$$\partial = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} - i\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)(dx_\nu + i dy_\nu),$$

$$\bar{\partial} = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_\nu} + i\frac{\partial}{\partial y_\nu}\right)(dx_\nu - i dy_\nu),$$

还有关系式 $\partial^2 = \bar{\partial}^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$, 见第 14 目.

形式 φ_0 的双阶为 (1,1), 故可对它沿实二维流形积分, 而可对它的外幂 $\varphi_0^m = \varphi_0 \wedge \cdots \wedge \varphi_0$ (m 重) 沿 $2m$ 维流形积分. 似乎自然地是, 对于这些形式的积分给出了流形的体积, 然而在一般情形下并非如此. 例如, 在 $\mathbb{C}^2$ 中实二维平面 $\{z_1 = \bar{z}_2\}$ 有 $dz_1 \wedge d\bar{z}_1 = -dz_2 \wedge d\bar{z}_2$, 从而在其上 $\varphi_0 \equiv 0$, 因此不可能量度体积.

原来, 形式 φ_0^m 量度了 m 维复流形的体积, 而对其他实 $2m$ 维流形则给出了小于其体积的值. 这个事实为维尔丁格在 1936 年所证明.

定理 1. 设 $M \subset \mathbb{C}^n$ 为具实维数 $2m$ 的 C^1 类流形. 这个流形的体积.

$$\text{Vol}\, M \geqslant \frac{1}{m!}\int_M \varphi_0^m, \tag{11}$$

另外这里的等式成立当且仅当 M 为复 m 维流形.

证明. 只需对在任意点 $z \in M$ 对体积元 [1] 去证明此不等式即可, 这时它具有形式

$$dV \geqslant \frac{1}{m!}\varphi_0^m\Big|_{T_z(M)}. \tag{12}$$

因此不失一般性可以用切平面 $T_z(M) = T$ 代替 M 并将其看成是 $\mathbb{C}^n$ 的 $2m$ 维的实子空间.

在 T 中我们选取实线性无关向量 $z^1, \cdots, z^m, w^1, \cdots, w^m$, 它们对 $\mu, \nu = 1, \cdots, m$ 满足关系

$$(z^\mu, z^\nu) = (w^\mu, w^\nu) = \delta_{\mu\nu}, \quad (z^\mu, w^\nu) = i\alpha_\mu \delta_{\mu\nu}, \tag{13}$$

其中的括号代表了在 $\mathbb{C}^n$ 中的标准埃尔米特内积, $\delta_{\mu\nu}$ 为克罗内克符号, 而 α_μ 为实数. 可以如下来实现这个选取. 首先在 T 中选取基 $e^1, \cdots, e^{2m}$, 它们在欧几里得度量下为法正交; 对于它们有 $(e^\mu, e^\mu) = 1$ 和 $\text{Re}\,(e^\mu, e^\nu) = 0$, 其中 $\mu \neq \nu$. 描述 T 中向量的埃尔米特内积虚部的斜对称矩阵, 用 T 的正交变换 (即不破坏其法正交性), 使其变为这样的形状, 即其次对角线上为块矩阵

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha_\mu \\ -\alpha_\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu = 1, \cdots, m,$$

而其余部分的分量都为零 [2]. 我们以 $z^1, w^1, \cdots, z^m, w^m$ 记 $\{e^\mu\}$ 在这个变换下的像. 在此新坐标下除了在 $\mu \neq \nu$ 时的法正交条件仍旧为

$$\text{Im}(z^\mu, z^\nu) = \text{Im}(w^\mu, w^\nu) = \text{Im}(z^\mu, w^\nu) = 0.$$

[1] 为了在这个证明中具有几何直观性, 我们简单地把坐标的微分理解为数, 而它们的外积就像通常的带有符号的乘积, 而它依赖于因子的次序. 一个形式的、无懈可击的本定理的证明参看譬如哈维的文章; 见在“极大复流形”下面的脚注.

[2] 参看 Mal'tsev (马尔采夫) 的《线性代数基础》, 有中译本.

外, 而当 $\mu=\nu$ 时, 由公式 (2) 我们有

$$\mathrm{Im}\,(z^\mu, w^\mu)=\alpha_\mu$$

(其中 $f_{2\mu-1,2\mu}=-f_{2\mu,2\mu-1}=\alpha_\mu, \xi_{2\mu-1}(z^\mu)=\xi_{2\mu}(w^\mu)=1$, 而其余的坐标 z^μ 和 w^μ 等于 0). 因此所有的关系 (13) 都已满足

在所选的基下, 向量 $dz\in T$ 可表示为

$$dz=\sum_{\mu=1}^{m}(d\xi_\mu z^\mu+d\eta_\mu w^\mu), \tag{14}$$

其中 $d\xi_\mu$ 和 $d\eta_\mu$ 为实微分. 由于基的法正交性, 由向量 $d\xi_\mu z^\mu, d\eta_\mu w^\mu$ $(\mu=1,\cdots,m)$ 张成的平行多面体的体积等于

$$dV=|d\xi_1 d\eta_1\cdots d\xi_m d\eta_m|. \tag{15}$$

因为 $\sum\limits_{\nu=1}^{n}dz_\nu\wedge d\bar{z}_\nu$ 可以表示为行向量 $(dz)'$ (这里的 "$'$" 表示转置) 与列向量 $d\bar{z}$ 的外积, 故考虑到 (14) 时, 形式 φ_0 在 T 上的限制有

$$\begin{aligned}\varphi_0|_T&=\frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^{m}(d\xi_\mu z^\mu+d\eta_\mu w^\mu)'\wedge\sum_{\nu=1}^{m}(d\xi_\nu\bar{z}^\nu+d\eta_\nu\overline{w}^\nu)\\&=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\{(z^\mu,z^\nu)d\xi_\mu\wedge d\xi_\nu+(z^\mu,w^\nu)d\xi_\mu\wedge d\eta_\nu+\\&\quad(w^\mu,z^\mu)d\eta_\mu\wedge d\xi_\nu+(w^\mu,w^\nu)d\eta_\mu\wedge d\eta_\nu\}.\end{aligned}$$ [1]

[1] 从 (14) 中分离出坐标

$$dz_k=\sum_{\mu=1}^{m}(d\xi_\mu z_k^\mu+d\eta_\mu w_k^\mu),\quad k=1,\cdots,m$$

也可以得到同一个结果, 并将其代入到 φ_0 的表达式中:

$$\begin{aligned}\varphi_0|_T&=\frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{\mu=1}^{m}(d\xi_\mu z_k^\mu+d\eta_\mu w_k^\mu)\wedge\sum_{\nu=1}^{m}(d\xi_\nu\bar{z}_k^\nu+d\eta_\nu\overline{w}_k^\nu)\right\}\\&=\frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{m}\left\{d\xi_\mu\wedge d\xi_\nu\sum_{k=1}^{n}z_k^\mu\bar{z}_k^\nu+d\xi_\mu\wedge d\eta_\nu\sum_{k=1}^{n}z_k^\mu\overline{w}_k^\nu+\right.\\&\quad\left.d\eta_\mu\wedge d\xi_\nu\sum_{k=1}^{n}w_k^\mu\bar{z}_k^\nu+d\eta_\mu\wedge d\eta_\nu\sum_{k=1}^{n}w_k^\mu\overline{w}_k^\nu\right\}.\end{aligned}$$

因此, 考虑到关系 (13) 以及相同微分形式的外积等于 0, 我们得到

$$\begin{aligned}\varphi_0|_T &= \frac{i}{2}\sum_{\mu=1}^m d\xi_\mu \wedge d\eta_\mu[(z^\mu, w^\mu) - (w^\mu, z^\mu)] \\ &= -\sum_{\mu=1}^m \alpha_\mu d\xi_\mu \wedge d\eta_\mu.\end{aligned}$$

计算这个和的 m 重外幂, 我们发现

$$\left.\frac{\varphi_0^m}{m!}\right|_T = (-1)^m \prod_{\mu=1}^m \alpha_\mu d\xi_1 \wedge d\eta_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_m \wedge d\eta_m,$$

并且将其与 (15) 相比较, 使我们确信为了证明不等式 (12) 只需证明对所有 $\mu = 1, \cdots, m$ 有 $|\alpha_\mu| \leqslant 1$ 即可.

但是考虑到关系式 (13), 它直接由布尼亚科夫斯基 – 施瓦茨不等式得到:

$$|\alpha_\mu| = |(z^\mu, w^\mu)| \leqslant \sqrt{(z^\mu, z^\mu)(w^\mu, w^\mu)} = 1.$$

等号成立当且仅当 z^μ 和 w^μ 成复比例, 即 $w^\mu = \lambda z^\mu$, 其中有某个 $\lambda \in \mathbb{C}$. 但是在这时由 z^μ 和 w^μ 张成的实二维平面是条复直线, 而 (12) 中等式成立当且仅当所有的 $|\alpha_\mu| = 1$, 即 T 为复 n 维平面. 由第 17 目的定理 1 我们得出结论说, (11) 中等式成立当且仅当 M 为复流形. □

注. 定理中的断言: 在复流形情形中, 形式 $\frac{1}{m!}\varphi_0^m$ 给出其体积的这部分可以十分简单地证明. 事实上, 形式 φ_0 对于空间 $\mathbb{C}^n$ 的酉变换不变, 这是因为对于酉矩阵有 $U^*U = E$, 就是说, $U'\overline{U} = E$, 从而如果 $dw = Udz$, 则

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^n dw_\nu \wedge d\overline{w}_\nu &= (dw)' \wedge d\overline{w} = (dz)'U' \wedge Ud\bar{z} \\ &= (dz)' \wedge d\bar{z} = \sum_{\nu=1}^n dz_\nu d\bar{z}_\nu. \qquad (16)\end{aligned}$$

因此在复 m 维流形 M 的情形可以认为 $T_z(M) = T$ 与变量 $(z_1, \cdots, z_m)$ 的平面一样. 于是

$$\varphi_0|_T = \frac{i}{2}\sum_{\nu=1}^n dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu$$

以及

$$\begin{aligned}\frac{1}{m!}\varphi_0^m|_T &= \left(\frac{i}{2}\right)^m dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_m \wedge d\bar{z}_m \\ &= dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_m \wedge dy_m\end{aligned}$$

(我们再次利用了 $dz_\mu \wedge d\bar{z}_\mu = -2idx_\mu \wedge dy_\mu$). 这里的右端是平面 T 的体积元, 从而 (12) 中的等式得证.

由维尔丁格定理可推出在实流形一些不成立的有趣的几何论断. 它基于的事实是, 看作复流形的体积元的形式为

$$\frac{1}{m!}\varphi_0^m = \sum_J \left(\frac{i}{2}\right)^m dz_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge dz_{j_m} \wedge d\bar{z}_{j_m}, \tag{17}$$

其中和号取遍由数 $1, 2, \cdots, n$ 构成的所有的有序组 $J = (j_1 < \cdots < j_m)$. 因为 $\frac{i}{2}dz_j \wedge d\bar{z}_j = dx_j \wedge dy_j$, 故沿 M 对此和中具指标 $J = (j_1, \cdots, j_m)$ 的项的积分给出了 M 在坐标平面 $(z_{j_1}, \cdots, z_{j_m})$ 上投影的体积 (如果在这种投射下 M 中几个点映成平面中一个点, 则应计算重数). 因此成立

推论. m 维复流形 M 的体积等于它在 m 维坐标平面 $(z_{j_1}, \cdots, z_{j_m})$ 上投影的体积之和, 其中 $j_1, \cdots, j_m$ 为由数 $1, \cdots, n$ 中构成的有序组.

特别, 复曲线 $(m = 1)$ 的面积等于它在坐标轴 z_j 上投影的面积和.

由维尔丁格定理还得出了复流形的一个重要的极小性.

定理 2. 设闭链 Γ 为 m 维紧复流形 $M \subset \mathbb{C}^n$ 的边界. 于是 M 在所有 $\mathbb{C}^n$ 中具边界 Γ 的实 $2m$ 维子流形中具极小体积.

证明. 根据形式 φ_0 的定义和微分规则 (并考虑 $d\varphi_0 \equiv 0$) 有

$$d(d^c|z|^2 \wedge \varphi_0^{m-1}) = dd^c|z|^2 \wedge \varphi_0^{m-1} = \varphi_0^m.$$

因此对任意边界为 Γ 的 $2m$ 维实子流形 $N \subset \mathbb{C}^n$, 由维尔丁格定理和斯托克斯公式有

$$\mathrm{Vol}\, N \geqslant \frac{1}{m!}\int_N \varphi_0^m = \frac{1}{m!}\int_\Gamma d^c|z|^2 \wedge \varphi_0^{m-1}.$$

另一方面, 以同样的论证有

$$\frac{1}{m!}\int_\Gamma d^c|z|^2 \wedge \varphi_0^{m-1} = \frac{1}{m!}\int_M \varphi_0^m = \mathrm{Vol}\, M. \quad \square$$

我们注意, 并非任意具 $2m - 1$ 实维数的闭链都可以作为复流形的边界: 例如, 当 $m > 1$ 时, 它应该是个极大复流形 (参看第 17 目).

19. 富比尼 – 施图迪 (Fubini-Study) 形式及其相关问题

复射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的自然度量的度量形式 (富比尼 – 施图迪形式) 为

$$ds^2 = \frac{(w, w)(dw, dw) - (w, dw)(dw, w)}{(w, w)^2}, \tag{1}$$

其中 $w=(w_0,\cdots,w_n)$ 为齐次坐标, 括号表示埃尔米特内积 (参照第 1 目的公式 (18)). 对应于它的微分形式为

$$\omega=\frac{i}{2}\left(\frac{1}{|w|^2}\sum_{\nu=0}^{n}dw_\nu\wedge d\overline{w}_\nu-\frac{1}{|w|^4}\sum_{\nu=0}^{n}\overline{w}_\nu dw_\nu\wedge\sum_{\nu=0}^{n}w_\nu d\overline{w}_\nu\right),$$

它可以改写成形式

$$\omega=\frac{dd^c|w|^2}{|w|^2}-\frac{d|w|^2\wedge d^c|w|^2}{|w|^4}=dd^c\ln|w|^2 \tag{2}$$

(最后面的等式可经直接计算验证).

因为当 $w_0\neq 0$ 时函数 $\ln|w_0|^2=\ln w_0+\ln\overline{w}_0$ 为调和函数, 故 $dd^c\ln|w_0|^2=\frac{1}{2}\partial\overline{\partial}\ln|w_0|^2=0$, 从而当 $w_0\neq 0$ 时有

$$dd^c\ln|w|^2=dd^c\ln\left(1+\sum_{\nu=1}^{n}\left|\frac{w_\nu}{w_0}\right|^2\right).$$

于是, 在 $\mathbb{P}^n$ 仿射部分, 即它的标准覆盖的区域 $U_0=\mathbb{C}^n$ 的局部坐标 $z_\nu=w_\nu/w_0$ 下,

$$\omega=dd^c\ln(1+|z|^2). \tag{3}$$

特别地, 若 $n=1$, 这个公式有形式

$$\omega=\frac{i}{2}\partial\overline{\partial}\ln(1+z\overline{z})=\frac{i}{2}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}, \tag{4}$$

并且 ω 与 $\mathbb{C}$ 上的球面度量形式相同: 富比尼 – 施图迪度量就是球面度量的高维推广.

定理 1. 在富比尼 – 施图迪度量下, 射影空间 $\mathbb{P}^n$ 的体积等于

$$\int_{\mathbb{P}^n}\omega^n=\pi^n. \tag{5}$$

证明. 因为 $\mathbb{P}^n$ 的无穷远点的集合的实余维为 2, 从而对于该积分没有影响, 故而代替 $\mathbb{P}^n$ 可沿 $\mathbb{C}^n$ 进行积分, 并在那里以公式 (3) 表示 ω. 特别当 $n=1$, 在 $\mathbb{C}$ 上引进极坐标 ($z=re^{i\theta}$) 后我们得到了

$$\int_{\mathbb{P}}\omega=\frac{i}{2}\int_{\mathbb{C}}\frac{dz\wedge d\overline{z}}{(1+|z|^2)^2}=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\infty}\frac{rdr}{(1+r^2)^2}=\pi. \tag{6}$$

在 n 为任意的情形, 将 (3) 改写为

$$\omega=\frac{i}{2}\left(\frac{\sum dz_\nu\wedge d\overline{z}_\nu}{1+|z|^2}-\frac{\sum\overline{z}_\nu dz_\nu\wedge\sum z_\nu d\overline{z}_\nu}{(1+|z|^2)^2}\right)$$

(参照 (2)) 并注意到形式 $\sum \bar{z}_\nu dz_\nu$ 和 $\sum z_\nu d\bar{z}_\nu$ 的奇次外幂等于 0, 在简单的计算后我们发现

$$\omega^n = \left(\frac{i}{2}\right)^n \left\{ \frac{n!}{(1+|z|^2)^n} \prod_{\nu=1}^n dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu - \frac{(n-1)!n}{(1+|z|^2)^{n+1}} \sum_{\nu=1}^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge \right.$$

$$\left. dz_{\nu-1} \wedge d\bar{z}_{\nu-1} \wedge dz_{\nu+1} \wedge d\bar{z}_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n \wedge \sum_{\mu,\nu=1}^n \bar{z}_\mu z_\nu dz_\mu d\bar{z}_\nu \right\}$$

$$= \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{n!}{(1+|z|^2)^{n+1}} \prod_{\nu=1}^n dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu. \tag{7}$$

令 $'z = (z_1, \cdots, z_{n-1}), z_n = re^{i\theta}$ 并先对 z_n 积分而将 $'z$ 固定:

$$\int_{\mathbb{C}^n} \omega^n = \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} n! \prod_{\nu=1}^{n-1} dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{rdr}{(1+|'z|^2+r^2)^{n+1}}$$

$$= \pi \int_{\mathbb{C}^{n-1}} \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+|'z|^2)^n} \sum_{\nu=1}^{n-1} dz_\nu \wedge d\bar{z}_\nu.$$

考虑到 (7), 我们注意到在右端所得到的积分不同于 (7) 之处只是左端把原来的积分中 n 换作 $n-1$. 因此, 重复同一方式我们便可以降低幂次直至达到在 (6) 中被计算的积分为

$$\int_{\mathbb{C}^n} \omega^n = \pi^{n-1} \int_{\mathbb{C}} \frac{i}{2} \frac{dz_1 \wedge d\bar{z}_1}{(1+|z_1|^2)^2} = \pi^n. \quad \square$$

由于这个结果, 自然地引进了规范富比尼 – 施图迪形式 $\widetilde{\omega} = \frac{1}{\pi}\omega$: 使用它所量度的空间 $\mathbb{P}^n$ 的体积为 1.

考虑 $\mathbb{C}^n$ 上的形式

$$\omega_0 = \frac{1}{\pi} dd^c \ln|z|^2 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\varphi_0}{|z|^2} - \frac{d|z|^2 \wedge d^c|z|^2}{|z|^4}\right), \tag{8}$$

与 ω 不同, 它在点 $z=0$ 有奇点. 如果假设 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 为 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中的齐次坐标, 则它是这个空间上的 (规范) 富比尼 – 施图迪形式. 所以, 形式 ω_0 实质上依赖于 $n-1$ 个变量而不是 n 个 (例如, 当 $z_1 \neq 0$ 时依赖于 $z_2/z_1, \cdots, z_n/z_1$, 如前所看到的, 这由 $z_1 \neq 0$ 时 $dd^c \ln|z_1|^2 = 0$ 得到), 从而表明其外幂在 $z \neq 0$ 时有 $\omega_0^n \equiv 0$, 这里的 ω_0 被当作一个依赖于 $n-1$ 个变量的 (n,n) 双阶形式.

我们将证明, 形式 ω_0 量度了 $\mathbb{C}^n$ 中复流形的体积密度, 即在半径为 r 的球中流形部分的欧几里得体积与同一半径和维数等于该流形维数的球的体积的比率.

定理 2. 设 $M \subset \mathbb{C}^n$ 为维数为 $m < n$ 的复流形, 其不包含点 $z=0$, 而 $B_r = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < r\}$ 为球. 于是

$$\int_{M \cap B_r} \omega_0^m = \frac{\text{Vol}\,(M \cap B_r)}{V_m(r)}, \tag{9}$$

其中 $V_m(r) = \pi^m r^{2m}/m!$ 为半径为 r 的 m 维复球的体积.

证明. 因为 M 不包含 $z=0$, 于是在左端积分号下的形式没有奇点, 从而可应用斯托克斯公式, 有

$$\int_{M\cap B_r} \omega_0^m = \frac{1}{\pi}\int_{M\cap B_r} d(d^c \ln|z|^2 \wedge \omega_0^{m-1}) \\ = \frac{1}{\pi}\int_{M\cap S_r} d^c \ln|z|^2 \wedge \omega_0^{m-1},$$

其中 $S_r = \partial B_r$ 为球面. 在此球面上 $d|z|^2 = 0$, 这表明, 由公式 (8), 在其上有 $\omega_0 = \varphi_0/\pi r^2$, 而因为 $d^c \ln|z|^2 = d^c|z|^2/|z|^2$, 故

$$\int_{M\cap B_r} \omega_0^m = \frac{1}{\pi^m r^{2m}}\int_{M\cap S_r} d^c|z|^2 \wedge \varphi_0^{m-1}.$$

再次对右端积分应用斯托克斯公式, 然后再用维尔丁格定理, 我们得到

$$\int_{M\cap S_r} d^c|z|^2 \wedge \varphi_0^{m-1} = \int_{M\cap B_r} \varphi_0^m = m!\,\mathrm{Vol}\,(M\cap B_r),$$

将其代入前一个公式便得到了 (9). □

我们在这里引进的最后面的那个形式是 $\mathbb{C}^n$ 中的 $2n-1$ 次形式:

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} d^c \ln|z|^2 \wedge \omega_0^{n-1}. \tag{10}$$

像 ω_0 那样, 它在 $z=0$ 有奇点, 而当 $z\neq 0$ 时其微分 $d\sigma_0 = \omega_0^n = 0$, 从而在 $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 中为闭. 当 $n=1$ 时, 令 $z = re^{i\theta}$, 我们发现

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} d^c \ln|z|^2 = \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{11}$$

即等同于那个可用来计算对于点 $z=0$ 的闭道 $\gamma\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的指数的形式. 我们将证明这个形式对于任意 n 起着这种类似的作用.

考虑 $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 中的 $(2n-1)$ 维闭链, 即 $\mathbb{C}^n$ 中的一个 (无边界的) 闭的实超曲面并且不包含点 $z=0$. 我们知道, 第 $2n-1$ 个同调群 $H_{2n-1}(\mathbb{C}^n\setminus\{0\},\mathbb{Z}) = 0$, 即每个这样的闭链 γ 在 $\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 中同调于球面 $S_r = \{|z| = r\}$ 的一个整数倍. 称这个整数为闭链 γ 对于点 $z=0$ 的指数.

在 $n=1$ 时, 闭道 γ 的指数 (即其绕 $z=0$ 的旋转次数) 等于形式 $\sigma_0 = d\theta/(2\pi)$ 沿 γ 的积分. 在任意 n 时成立相似的结果.

定理 3. 对于点 $z=0$ 的 $(2n-1)$ 维闭链 $\gamma\subset\mathbb{C}^n\setminus\{0\}$ 的指数等于

$$\mathrm{Ind}_0\gamma = \int_\gamma \sigma_0. \tag{12}$$

证明. 由定义, $\text{ind}_0\gamma$ 等于那样的整数 k, 使得 γ 在 $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 中同调于 kS_r, 即 $\gamma' - kS_r$ 为一个 $2n$ 维闭链 $\Gamma \subset \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ 的边缘. 因为形式 σ_0 在 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ 中为闭, 故由斯托克斯公式有

$$\int_\gamma \sigma_0 - k\int_{S_r} \sigma_0 = \int_\Gamma d\sigma_0 = 0, \tag{13}$$

从而仍需进行计算

$$\int_{S_r} \sigma_0 = \frac{1}{\pi}\int_{S_r} d^c \ln |z|^2 \wedge \omega_0^{n-1}.$$

因为积分下的形式在点 $z = 0$ 的奇异性, 故在这里不能应用斯托克斯公式, 但像在前面的定理的证明那样, 我们得到

$$\int_{S_r} \sigma_0 = \frac{1}{\pi^n r^{2n}}\int_{S_r} d^c|z|^2 \wedge \varphi_0^{n-1} = \frac{1}{\pi^n r^{2n}}\int_{B_r} \varphi_0^n$$

(现在可以应用斯托克斯公式). 由维尔丁格定理, 右端的积分等于 $n!\,\text{Vol}\,B_r = \pi^n r^{2n}$, 从而所计算的积分等于 1, 并由 (13) 得到了

$$\int_\gamma \sigma_0 = k\int_{S_r} \sigma_0 = k = \text{ind}_0\gamma. \quad \square$$

指数的概念源于庞加莱, 所以在 (10) 中引进的形式自然被称为*庞加莱形式*.

§7. 覆叠

20. 覆叠的概念

这个概念是出现在黎曼曲面中的一个概念在拓扑学中的推广 (参看卷 I 第 33 目), 并在研究非一一映射里起着重要的作用.

定义. 设有三个对象 X, M 和 π, 其中 X 和 M 为道路连通的豪斯多夫拓扑空间, $\pi : X \to M$ 为连续映射; 称这个三元组为一个*覆叠*是说, 如果对任意点 $p \in M$ 存在它的邻域 $U \subset M$ 使得 $\pi^{-1}(U)$ 同胚于 U 和某个离散空间的乘积, 并且如果 $h : \pi^{-1}(U) \to U \times E$ 为这个同胚, $\pi' : (p, \varepsilon) \mapsto p$ 为通常的投射, 则图 20 所表示的图示为交换, 即对任意点 $x \in \pi^{-1}(U)$ 有

$$\pi' \circ h(x) = \pi(x). \tag{1}$$

称空间 X 为*覆叠空间*或简单地称做*覆叠*, 称 M 为底而 π 为*投射*, 称点 $p \in M$ 的原像 $\pi^{-1}(p)$ 为*纤维*. 该图示中的交换性表明, 同胚 h 保持了纤维: 对任意 $x \in \pi^{-1}(p)$ 有 $\pi' \circ h(x) = p$, 即对所有这样的 $x, h(x) = (p, \varepsilon)$ 的第一个坐标都相同并等于 p (参看图 20).

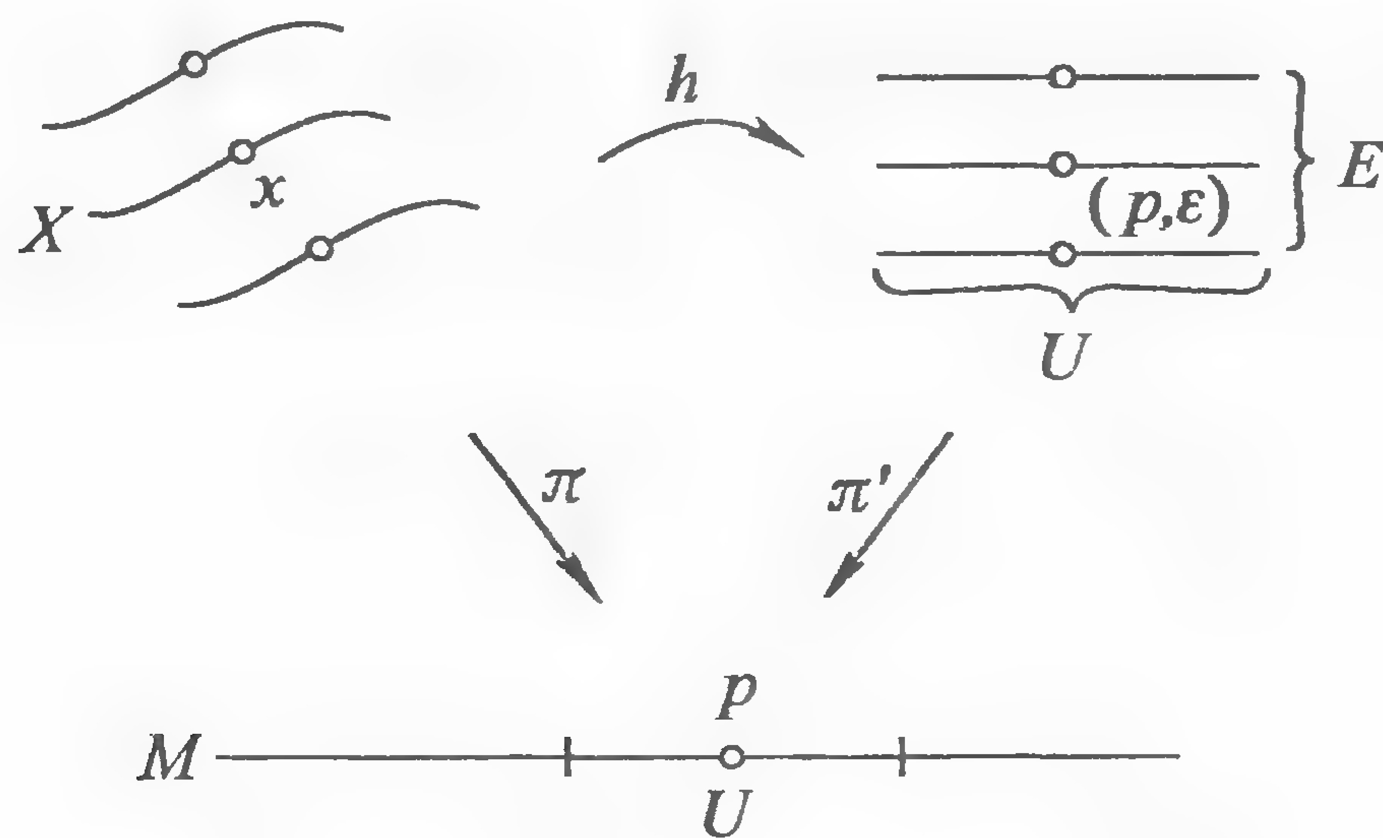


图 20

由覆叠的定义得出, 开集合 $\pi^{-1}(U)$ 分解为不相交开集 $\widetilde{U}_\varepsilon = h^{-1}(U \times \varepsilon), \varepsilon \in E$ 的并, 称其为 U 的一个提升. 限制 $\pi|_{\widetilde{U}_\varepsilon}$ 为同胚, 并且对任意覆叠, 投射 $\pi : X \to M$ 为局部同胚.

如果 X 和 M 为复流形, 而 $\pi : X \to M$ 为全纯映射, 则称此覆叠为全纯的.

初等单复变函数给出了平面区域的全纯覆叠的简单例子. 于是, 对于自然数 m, $f(z) = z^m$ 用圆环 $X_r = \{ \sqrt[m]{r} < |z| < 1/m\sqrt{r}\}$ 定义圆环 $M_r = \left\{r < |w| < \dfrac{1}{r}\right\}$ 的覆叠 $f : X_r \to M_r$; 这个覆叠的纤维 $f^{-1}(w)$ 由 m 个点即 w 的 m 次根组成. 类似地, 函数 $f(z) = e^z$ 定义了这同一个圆环 M_r 用带状域 $\left\{\ln\ r < \mathrm{Re}\ w < \ln \dfrac{1}{r}\right\}$ 的覆叠, 其纤维 $f^{-1}(w)$ 由数 $\mathrm{Ln}\ w = \ln\ w + 2k\pi i\ (k = 0, \pm 1, \cdots)$ 的可数集构成.

在图 21 中表明, 如何用黎曼曲面来表示这些覆叠. 在函数 $f(z) = z^m$ 的情形还需要把黎曼面上的带的端线粘合 (它们以虚线表示), 而在 $f(z) = e^z$ 的情形表示带的两端无限制地缠绕. 在此表示中映射 f 变成通常的投射.

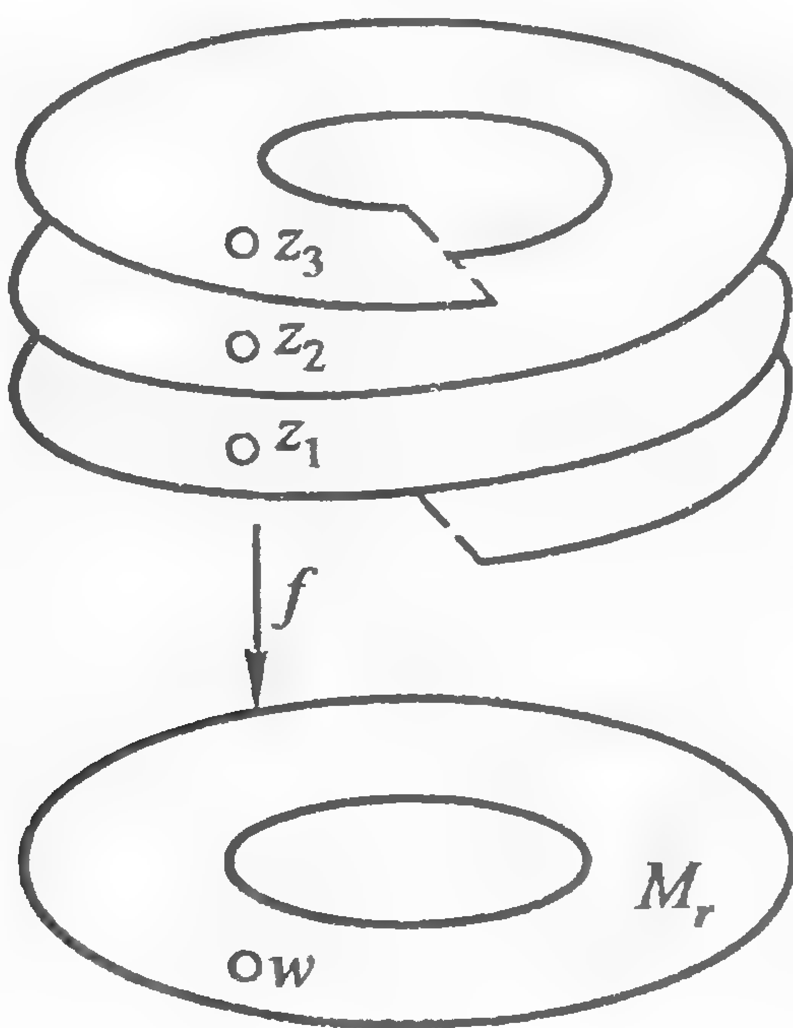


图 21

当 $r \to 0$ 时, 第一个例子给出了覆叠 $f : \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_*$, 其中 $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 而第二个为 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}_*$, 另外它们中第一个的纤维为有限点集而第二个的为可数的点集. 与多复变函数相关的覆叠的例子将在下一章考察.

我们现在着手讨论在覆叠中道路的提升问题, 另外为简单起见, 我们限制所有的

道路均为线段 $I = [0,1]$ 的参数化. 称 $\gamma: I \to M$ 在覆叠 $\pi: X \to M$ 下被提升是说, 如果存在道路 $\widetilde{\gamma}: I \to X$ 使得 $\pi \circ \widetilde{\gamma} = \gamma$ (于是说, $\widetilde{\gamma}$ 是 γ 的提升, 而 γ 是 $\widetilde{\gamma}$ 的投影).

定理 1. 对任意覆叠 $\pi : X \to M$, 任意道路 $\gamma : I \to M$ 均可提升为道路 $\widetilde{\gamma}: I \to X$, 并且在给定起点 $\widetilde{\gamma}(0)$ 时这个提升是唯一的.

证明. *唯一性*: 同一条道路 γ 的两个提升 $\widetilde{\gamma}_1$、$\widetilde{\gamma}_2$ 或者不相交或者重合. 事实上, 集合 $E = \{t \in I : \widetilde{\gamma}_1(t) = \widetilde{\gamma}_2(t)\}$ 在 I 中为开, 这是因为 $\pi \circ \widetilde{\gamma}_1(t) = \pi \circ \widetilde{\gamma}_2(t)$, 而 π 为局部同胚. 但是它也是闭的, 这是由于 $E' = I \backslash E$ 为开: 对于 $t_0 \in E'$、点 $\widetilde{\gamma}_1(t_0) \neq \widetilde{\gamma}_q(t_0)$, 并由 X 的豪斯多夫性质, 存在不相交的邻域 $\widetilde{U}' \ni \widetilde{\gamma}_1(t_0)$ 和 $\widetilde{U}'' \ni \widetilde{\gamma}_2(t_0)$, 使它们投影到同一个邻域 U 中, 从而在 t_0 的某个邻域中有 $\widetilde{\gamma}_1(t) \neq \widetilde{\gamma}_2(t)$. 因此, E 或与 I 重合或为空集.

存在性: 因为对每个点 $\gamma(t_0)$ 存在开集 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 分解为开集, 其经 π 同胚于 U, 故 γ 的局部提升由覆叠的定义所保证. 由 $\gamma(I)$ 的紧性, 它可被 M 中有限个邻域所覆盖, 其中每一个均可提升, 剩下来的事只要粘合上这有限段的道路即可. □

推论. 覆叠 $\pi: X \to M$ 的所有纤维 $\pi^{-1}(p), p \in M$ 有相同的基数.

证明. 设 $p, q \in M, \gamma: I \to M$ 为从 p 到 q 的道路 (因 M 的道路连通性, 故存在这样的路径). 我们来构造映射 $\varphi: \pi^{-1}(p) \to \pi^{-1}(q)$, 它把每个点 $x \in \pi^{-1}(p)$ 带到起点为 x 的 γ 提升的终点 $y = \widetilde{\gamma}_x(1)$ (由定理 1 这个提升是唯一确定的.) 由定理 1 映射 φ 为单的 (相互一一的). 但是因为由同一定理知, 对每个点 $y_0 \in \pi^{-1}(q)$ 可构造唯一的道路 $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$ (从 q 到 p) 以 y_0 为起点的提升, 故它也是满的 (到 $\pi^{-1}(q)$ 上); 如果 x 为这个提升的终点, 则 $\widetilde{\gamma}_x(1) = y_0$. 因此集合 $\pi^{-1}(p)$ 和 $\pi^{-1}(q)$ 有相同基数. □

称任意纤维 $\pi^{-1}(p)$ 的基数为覆叠 $\pi: X \to M$ 的**重数**.

我们记得, 称两条具公共端点 p, q 的道路 γ_0 和 $\gamma_1 : I \to M$ 为在 M 中同伦是说, 如果存在一个连续映射 $\gamma: I \times I \to M$ 使得 $\gamma(0,t) = \gamma_0(t), \gamma(1,t) = \gamma_1(t)$, 其中所有的 $t \in I$, 且 $\gamma(s,0) = p, \gamma(s,1) = q$ 对所有 $s \in I$ 成立 (参看卷 I 第 17 目).

定理 2 (单值化). 如果具共同端点 p 和 q 的道路 γ_0 和 γ_1 在 M 中同伦, 则它们在覆叠 $\pi : X \to M$ 下的具共同起点的提升 $\widetilde{\gamma}_0$ 和 $\widetilde{\gamma}_1$ 有公共的终点且在 X 中同伦.

证明. 设 $\gamma: I \times I \to M$ 为 γ_0 和 γ_1 的同伦. 对固定的 $s \in I$, 道路 $\gamma_s = \gamma(s,t): I \to M$, 依定理 1, 以唯一的方式被提升到以 x 为起点的道路 $\widetilde{\gamma}_s = \widetilde{\gamma}(s,t)$. 映射 $\widetilde{\gamma}: (s,t) \mapsto \widetilde{\gamma}(s,t)$ 在 $I \times I$ 上为连续, 这是因为局部地 $\widetilde{\gamma}(s,t) = \pi^{-1} \circ \gamma(s,t)$, 而 π^{-1}

和 γ 连续. 函数 $\widetilde{\gamma}(s,1)$ 作为 (在集合 $\pi^{-1}(q)$ 中) 取离散值的连续函数是个常值函数, 于是所有 $\widetilde{\gamma}_s$ 具有公共端点. 最后, $\widetilde{\gamma}(0,t)=\widetilde{\gamma}_0(t), \widetilde{\gamma}(1,t)=\widetilde{\gamma}_1(t)$, 即 $\widetilde{\gamma}$ 建立了道路 $\widetilde{\gamma}_0$ 和 $\widetilde{\gamma}_1$ 间在 X 中的同伦. □

推论. 如果空间 M 是单连通的 (即任意两条具公共端点的道路同伦), 则任意覆叠 $\pi: X \to M$ 的重数为 1.

证明. 设某个纤维 $\pi^{-1}(q)$ 包含了两个不同的点 y' 和 y''. 取点 $x \in X$, 并由 X 的道路连通性, 以道路 $\widetilde{\gamma}_0$ 和 $\widetilde{\gamma}_1$ 分别从 x 连接 y' 和 y'' (图 22). 设 $\gamma_0=\pi \circ \widetilde{\gamma}_0$ 和 $\gamma_1=\pi \circ \widetilde{\gamma}_1$, 它们为在 M 中连接点 $p=\pi(x)$ 和 $q=\pi(y')=\pi(y'')$ 的道路, 而 $\widetilde{\gamma}_0$ 和 $\widetilde{\gamma}_1$ 则是它们以 x 为起点的提升. 因为 M 的单连通性,γ_0 和 γ_1 同伦, 从而根据定理 2, 它们的提升的终点 $y'=\widetilde{\gamma}_0(1)$ 和 $y''=\widetilde{\gamma}_1(1)$ 重合. 因为我们设 $y' \neq y''$, 故矛盾. □

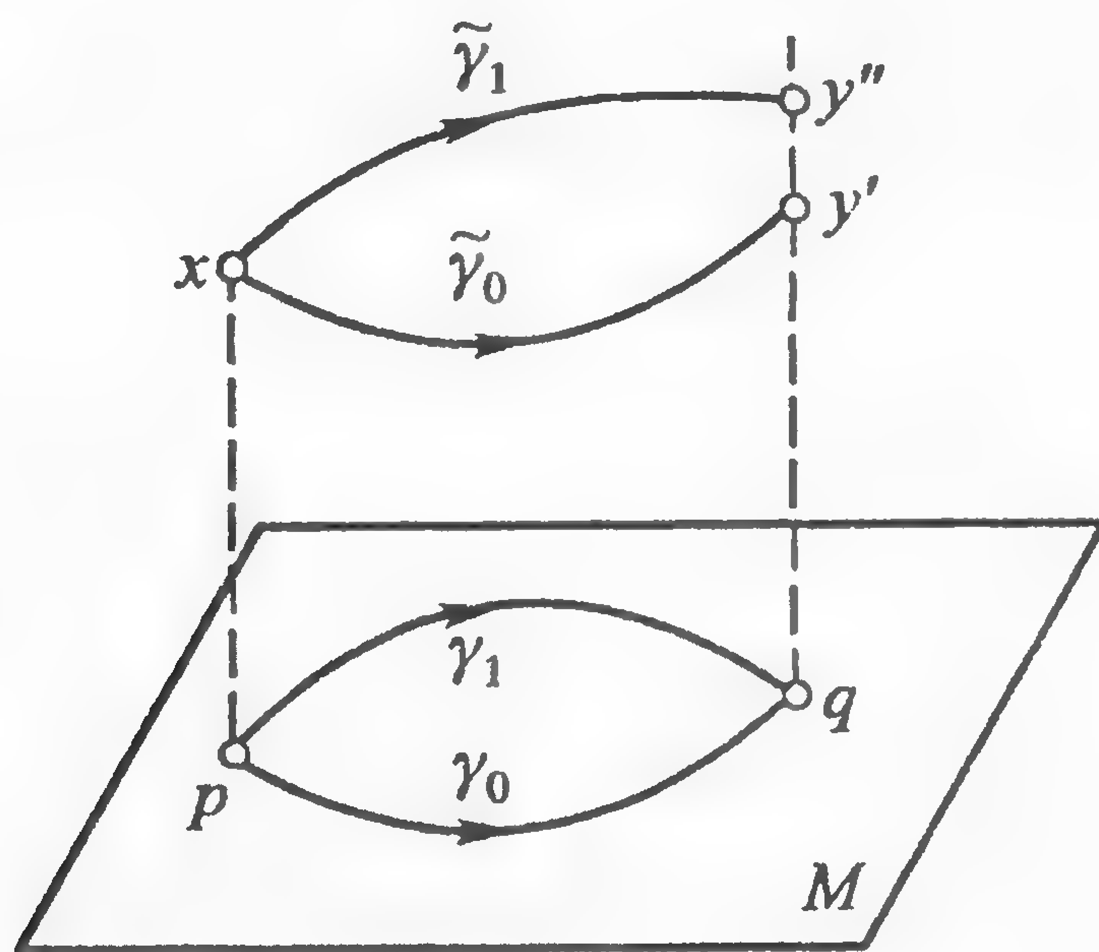


图 22

如果覆叠 $\pi: X \to M$ 的像 $M=\pi(X)$ 为单连通, 那么根据这个引理, 在 M 上定义了反函数 $\pi^{-1}(p)$. 因此它推广了经典的单值性定理 (卷 I, 第 28 目).

21. 基本群与覆叠

在这里我们以符号 "$\sim$" 代表道路间的同伦, 而 M 为道路连通的豪斯多夫空间. 回忆某些定义: 任意道路 α 和 $\beta: I \to M$, 其中 $\alpha(1)=\beta(0)$, 称道路

$$\alpha\beta(t)=\begin{cases}\alpha(2t), & t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right], \\ \beta(2t-1), & t \in \left[\dfrac{1}{2},0\right],\end{cases} \tag{1}$$

为 α 和 β 的*乘积道路*, 称道路 $\varepsilon(t)=$ 常值为*点道路*, 而称道路 $\alpha^{-1}(t)=\alpha(1-t)$ 为道路 α 的*逆*.

固定一点 $p \in M$ 并考虑 M 上闭的道路 (*闭路*) 的集合, 这些道路的起点和终点都与 p 重合. 闭路的同伦是个等价关系, 从而我们可以依照这个关系把所考虑道路分成等价类, 称其为*同伦等价类*. 我们以 $\boldsymbol{\alpha}$ 记包含闭路 α 的等价类.

我们称包含乘积 [1]$\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$ 的类为类 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的乘积, 记为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$, 这里的 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}$ 为这些类中任意代表元的乘积 ($\alpha \in \boldsymbol{\alpha}, \beta \in \boldsymbol{\beta}$). 这个定义是合理的, 即它不依赖于代表元的选取, 这是因为如果 $\alpha_0 \sim \alpha_1, \beta_0 \sim \beta_1$, 则 $\alpha_0\beta_0 \sim \alpha_1\beta_1$; 闭路 $\alpha_0\beta_0$ 和 $\alpha_1\beta_1$ 的同伦显然由函数

$$\gamma(s,t) = \begin{cases} \alpha(s,2t), & t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right], s \in I, \\ \beta(s,2t-1), & t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right], s \in I, \end{cases}$$

给出, 其中 $\alpha(s,t)$ 和 $\beta(s,t)$ 分别为建立同伦 $\alpha_0 \sim \alpha_1$ 和 $\beta_0 \sim \beta_1$ 的函数.

定理 1. 起点和终点为 p 的 M 上闭路的同伦类的集合 $\pi_1(M,p)$ 在类的乘积运算下构成一个群.

证明. 我们以 $\mathbf{e}$ 表示同伦于零 (即同伦于点闭路 $\varepsilon(t)=p$) 的闭路类. 对任意类 $\boldsymbol{\alpha} \in \pi_1(M,p)$ 积 $\boldsymbol{\alpha}\mathbf{e} = \boldsymbol{\alpha}$, 这是因为如果 $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}$, 则积 $\alpha\varepsilon \sim \alpha$. 事实上, 由道路乘积的定义 (1)

$$\alpha\varepsilon(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right], \\ \alpha(1)=p, & t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right], \end{cases}$$

而这条道路与道路 α 间的同伦由函数 $\gamma(s,t) = \alpha[st+(1-s)\tau(t)]$ 实现, 其中当 $t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right]$ 时 $\tau(t)=2t$, 而当 $t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right]$ 时 $\tau(t)=1$. 因此 $\mathbf{e}$ 为 $\pi_1(M,p)$ 的中性元 (单位元).

另外, 对于类 $\boldsymbol{\alpha} \in \pi_1(M,p)$, 我们以 $\boldsymbol{\alpha}^{-1}$ 表示同伦于某个闭路 α^{-1} 的类, 其中的 $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}$; 这个表示是合理的, 因为 $\alpha \sim \beta \Rightarrow \alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$ (如果 $\gamma(s,t)$ 是第一个同伦的实现, 则 $\gamma(s,1-t)$ 是第二个的同伦实现). 于是对任意的 $\boldsymbol{\alpha} \in \pi_1(M,p)$ 有 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{-1} = \mathbf{e}$, 其理由是, 对 $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}$ 按定义 (1) 有

$$\alpha\alpha^{-1}(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right], \\ \alpha^{-1}(2t-1) = \alpha[2(1-t)], & t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right], \end{cases}$$

而函数

$$\gamma(s,t) = \begin{cases} \alpha[2(1-s)t], & t \in \left[0,\dfrac{1}{2}\right], \quad s \in I, \\ \alpha[2(1-s)(1-t)], & t \in \left[\dfrac{1}{2},1\right], \quad s \in I, \end{cases}$$

建立了 $\alpha\alpha^{-1}$ 与点道路 $\alpha(t)=\alpha(0)$ 之间的同伦.

---

[1]起点和终点为 p 的任何闭路之间可以相乘.

最后, 类之间的乘积是结合的 (即 $\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta\gamma}=\boldsymbol{\alpha\beta}\cdot\boldsymbol{\gamma}$), 这是因为闭路的乘积

$$\alpha\cdot\beta\gamma=\begin{cases}\alpha(2t), & t\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right],\\ \beta(4t-2), & t\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right],\\ \gamma(4t-3), & t\in\left[\dfrac{3}{4},1\right]\end{cases}$$

和

$$\alpha\beta\cdot\gamma=\begin{cases}\alpha(4t), & t\in\left[0,\dfrac{1}{4}\right],\\ \beta(4t-1), & t\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right],\\ \gamma(2t-1), & t\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]\end{cases}$$

同伦: 如果记 $\alpha\cdot\beta\gamma(t)=\delta(t)$, 于是 $\alpha\beta\cdot\gamma(t)=\delta\circ\tau(t)$, 其中 $\tau(t)$ 当 $t\in\left[0,\frac{1}{4}\right]$ 时等于 $2t$, 当 $t\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$ 时等于 $t+\frac{1}{4}$, 且当 $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ 等于 $\frac{t+1}{2}$, 从而函数 $\delta[(1-s)t+s\tau(t)]$ 建立了这两个闭路的同伦. □

定义. 称群 $\pi_1(M,p)$ 为拓扑空间 M 带标识点 p 的基本群.

定理 2. 对于不同的点 $p\in M$, 基本群 $\pi_1(M,p)$ 均同构.

证明. 设 p 和 q 为 M 的两个任意点; 因 M 的道路连通性, 存在从 p 到 q 的道路 $\gamma: I\to M$. 对每个类 $\boldsymbol{\alpha}\in\pi_1(M,p)$ 给出一个对应类 $\boldsymbol{\beta}\in\pi_1(M,q)$, 这个类 $\boldsymbol{\beta}$ 包含了闭路 $\beta=\gamma^{-1}\alpha\gamma$, 其中 $\alpha\in\boldsymbol{\alpha}$. 我们留给读者去证明映射 $\varphi:\boldsymbol{\alpha}\mapsto\boldsymbol{\beta}$ 是群 $\pi_1(M,p)$ 到 $\pi_1(M,q)$ 的同构. □

因此, 对于空间 M, 基本群 $\pi_1(M)$ 在同构下被完全确定.

例题.

(1) 我们来计算圆 $S^1=\{|z|=1\}$ 的以 1 为标识点的基本群. 在 S^1 上有闭路组 $\alpha_m: t\mapsto e^{2\pi imt}$, 其中 $t\in I, m$ 为整数; 对于不同的 m, 这些闭路不同伦. 任意闭路 α (确定到一个点闭路因子) 有形式 $t\mapsto e^{if(t)}$, 其中 f 为连续实函数, 满足 $f(0)=0, f(1)=2\pi m$ (m 为整数), 并且同伦于闭路 α_m: 实现这个同伦的函数为 $\gamma(s,t)=e^{i[(1-s)f(t)+2\pi mst]}$. 最后有 $\alpha_m\alpha_n\sim\alpha_{m+n}$, 因此 $\pi_1(S^1)$ 同构于整数群 $\mathbb{Z}$. 任何圆环 $\{r<|z|<R\}$ 和去掉一个点的平面 $\mathbb{C}_*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 具有同一个基本群.

(2) 维数 $n>1$ 的球面的基本群 $\pi_1(S^n)=0$, 因为这些球面是单连通的 (在它们之上的任意闭路同伦于 0).

设 $f: M \to N$ 为拓扑空间的连续映射. 那么对任意道路 $\gamma: I \to M$ 有对应的道路 $f(\gamma) = f \circ \gamma: I \to N$, 于是道路变到了道路, 并保持了同伦: $\gamma_0 \sim \gamma_1 \Rightarrow f(\gamma_0) \sim f(\gamma_1)$ (后面的这个道路的同伦由函数 $f \circ \gamma(s,t)$ 实现, 其中 γ 是建立同伦 $\gamma_0 \sim \gamma_1$ 的函数). 故而, 诱导出了基本群间的映射

$$f_*: \pi_1(M,p) \to \pi_1(N, f(p)); \tag{2}$$

因为 $f(\alpha\beta) = f(\alpha)f(\beta)$ 故它是一个同态.

如果 $f: M \to N$ 为 N 上的同胚, 则 f_* 为同构, 故对于空间的同胚性基本群必须是同构. 这个条件显然不是充分的: 平面圆环与圆具有相同的基本群 $\mathbb{Z}$, 但它们并不同胚.

设空间 X 和 M 为局部单连通 (即在它们的每个点存在单连通的邻域) 并且 $\pi: X \to M$ 为覆叠. 所诱导出的基本群的同态

$$\pi_*: \pi_1(X) \to \pi_1(M) \tag{3}$$

把同伦类 $\widetilde{\boldsymbol{\alpha}} \in \pi_1(X)$ 变为包含了 $\alpha = \pi \circ \widetilde{\alpha}$ 的类, 其中道路 $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$. 同态 π_* 是个单射 (即将 $\pi_1(X)$ 中不同的元映成不同的元): 事实上, 只要单位元 $\mathbf{e} \in \pi_1(M)$ 的原像是 $\pi_1(X)$ 的单位元, 这是由前一目的单值性定理得到的. 由此知道, 在映射 (3) 下 $\pi_1(X)$ 的像 $\operatorname{im} \pi_* = G$ 是 $\pi_1(M)$ 的子群, 它同构于 $\pi_1(X)$.

用子群 $G = \operatorname{im} \pi_*$ 可以构成 M 上闭路的陪集 (类): 闭路 α 和 β 属于同一个类是说 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{-1} \in G$. 包含闭路 α 的陪集记以符号 $[\alpha]$; 这些类的个数被称为*子群* G *的指数*.

例题 (3). 由公式 $f(z) = z^2$ 定义的映射 $f: \mathbb{C}_* \to \mathbb{C}_*$ 是个二叶覆叠. 在这里 $X = M = \mathbb{C}_*$, 并且 $\pi_1(X) = \pi_1(M) = \mathbb{Z}$ (参看前面一个例题). 我们以闭路 $\gamma_m: t \to e^{2\pi i m t}$ $(t \in I, m \in \mathbb{Z})$ 代表 $\pi_1(M)$ 中的元. 当 m 为奇数时 γ_m 在以 $z = 1$ 为起点的提升其终点在点 $z = -1$ (是在映射 f 下的原像, 即道路 $\widetilde{\gamma}_m: t \to e^{\pi i m t}$), 从而不是闭路. 因此代表 $\pi_1(X)$ 的闭路的像仅仅是那些 m 为偶数的闭路 γ_m. 于是群 $G = \operatorname{im} f_*$ 同构于偶数子群. 它定义了两个陪集, 分别以具偶数和奇数 m 的闭路 γ_m 所代表. G 的指数为 2.

定理 3. 子群 $G = \operatorname{im} \pi_*$ 的指数等于覆叠 $\pi: X \to M$ 的重数.

证明. 固定一点 $p \in M, x \in \pi^{-1}(p)$ 及以 p 为起点和终点的闭路的陪集 $[\alpha]$. 选取闭路 $\alpha \in [\alpha]$, 我们以 $\widetilde{\alpha}$ 表示 α 以 x 为起点的提升, 并以 $\widetilde{\alpha}(1) \in \pi^{-1}(p)$ 作为 $[\alpha]$ 的相伴的点. 定理由映射 $\varphi: [\alpha] \mapsto \widetilde{\alpha}(1)$ 的下列性质得到:

a) φ 的定义合理, 即不依赖于陪集的代表元的选取. 事实上, 如果 $\alpha, \beta \in [\alpha]$, 则 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{-1} \in G$, 即 $\alpha\beta^{-1}$ 是 X 的某个闭路的投影, 就是说闭道 $\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}^{-1}$ 的像. 由此得到 $\widetilde{\alpha}(1) = \widetilde{\beta}(1)$ (见图 23).

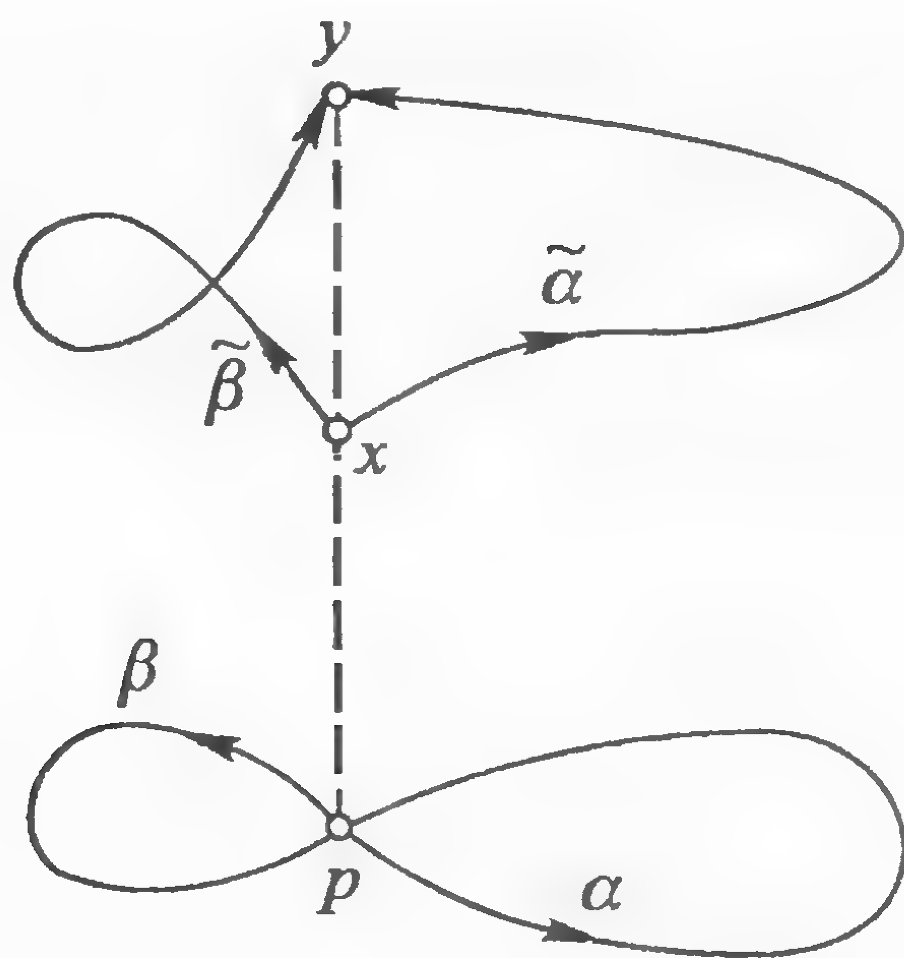


图 23

b) φ 为单射. 事实上, 如果 $\varphi([\alpha]) = \varphi([\beta])$, 则 $\widetilde{\alpha}$ 和 $\widetilde{\beta}$ 具有公共的终点, 于是 $\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}^{-1}$ 为闭路, 从而 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{-1} \in G$, 即 $[\alpha] = [\beta]$.

c) φ 为满射. 事实上, 设 $y \in \pi^{-1}(p)$ 为任意一个点. 以 $\widetilde{\alpha}$ 连接 x 和 y; 其投影 α 是闭路, 满足 $\widetilde{\alpha}(1) = y$, 即 $\varphi([\alpha]) = y$. □

可以把前一目的一个结果作为定理的推论而重新得到: 对于底 M 为单连通的覆叠其重数为 1. 事实上这里的群 $\pi_1(M)$ 为平凡, 从而 $\operatorname{im}\pi_*$ 的指数等于 1. 我们要指出, 在本书中所考虑的所有情形中底空间的基本群 $\pi_1(M)$ 的基数都不大于可数基数, 于是由定理 3, 这种覆叠的纤维的基数也就不大于可数 (参照卷 I, 第 29 目的庞加莱 – 沃尔泰拉定理).

定理 3 有意思的地方还在于它把关于覆叠 $\pi : X \to M$ 的重数问题与关于子群 $\operatorname{im}\pi_*$ 的指数联系起来. 覆叠和基本群子群之间最完全的联系可表达为

定理 4. 任意子群 $G \subset \pi_1(M)$ 对应于一个覆叠 $\pi : X \to M$, 满足 $\operatorname{im}\pi_* = G$.

证明. *构造覆叠*. 固定一点 $p_0 \in M$ 并考虑任意的道路 $\alpha : I \to M, \alpha(0) = p_0$. 我们把这些道路按照以下的等价关系分类: $\alpha \sim \beta(\operatorname{mod} G)$ 表示, 如果闭路 $\alpha\beta^{-1}$ 的同伦类 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{-1} \in G$ (关于模 G 的等价性). 包含道路 α 的类被记作 $[\alpha]$, 并且所有可能的道路 $\alpha, \alpha(0) = p_0$ 被看成是空间 X 的点. 以条件 $\pi([\alpha]) = \alpha(1)$ 定义投射 $\pi : X \to M$, 其中 α 为类 $[\alpha]$ 的任意一个代表元 (显然, 该投射并不依赖于代表元的选取).

X 的拓扑. 点 $[\alpha] \in X$ 的邻域 $\widetilde{U}_{[\alpha]}$ 定义为: 取点 $p = \pi([\alpha])$ 的单连通邻域 $U_p \subset M$ 及其中道路 $\beta : I \to U_p, \beta(0) = p. \widetilde{U}_{[\alpha]}$ 中的点被认定为由道路 $\gamma = \alpha\beta$ 的类 $[\gamma]$ 组成, 其中 α 固定, β 为所有可能的那种道路.

以这些邻域所引进的拓扑是豪斯多夫的. 事实上, 设道路 $[\alpha]$ 和 $[\alpha']$ 为 X 的不同点. 如果这两个点的投影 p 和 p' 互不相同, 我们则可选取互不相交的邻域 U_p 和 $U_{p'}$, 从而 $\widetilde{U}_{[\alpha]}$ 和 $\widetilde{U}_{[\alpha']}$ 也互不相交 (相应的道路甚至不构成闭路). 如果确有 $p = p'$ 则 $\boldsymbol{\alpha'\alpha}^{-1} \notin G$, 从而投射到同一个单连通邻域 U_p 的 $\widetilde{U}_{[\alpha]}$ 和 $\widetilde{U}_{[\alpha']}$ 也不相交: 若非如此, 则可找到道路 $\gamma = \alpha\beta$ 和 $\gamma' = \alpha'\beta'$ 使得 $\boldsymbol{\gamma'\gamma}^{-1} \in G$. 但 β 和 β' 有公共终点并且

属于 U_p, 于是 $\beta \sim \beta'$ 从而 $\gamma'\gamma^{-1} = \alpha'(\beta'\beta^{-1})\alpha^{-1} \sim \alpha'\alpha^{-1}$ (这里的 $\sim$ 代表同伦), 即 $\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\alpha}^{-1} \in G$, 矛盾.

空间 X 是道路连通的. 设 $[\alpha], [\beta] \in X$; 选取这两个类中的代表元 (α 和 β), 以道路 $\delta : I \to M$ 连接端点 $\alpha(1) = p$ 和 $\beta(1) = q$, 并以 γ_t 记 M 上连接 p_0 和 $\delta(t)$ 的道路. (见图 24; 我们有假定: M 为道路连通的). 映射 $t \mapsto [\gamma_t]$ 定义了 X 上的一条道路, 它连接了 $[\alpha]$ 和 $[\beta]$.

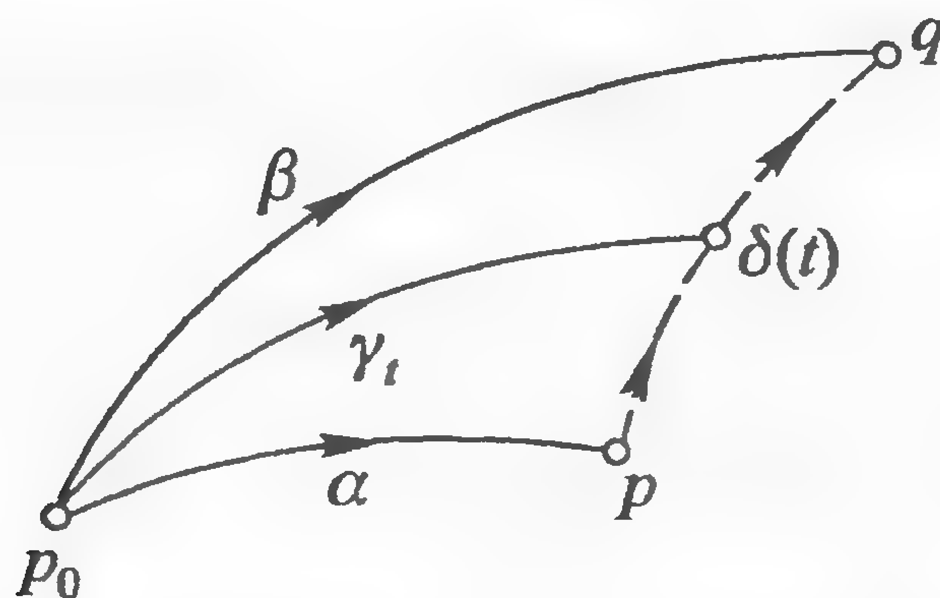


图 24

显然, X 是局部单连通的; 这是因为它的邻域 $\widetilde{U}_{[\alpha]}$ 同胚于 U_p.

$\pi : X \to M$ 为所求的覆叠. 首先, 因为由构造知, 对每个点 $p \in M$ 存在邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)$ 被分成互不相交区域, 使 π 在其上为同胚, 故这是个覆叠. 还需要证明 $\operatorname{im} \pi_* = G$.

取点道路 $\varepsilon : I \to p_0$, 以 $x_0 = [\varepsilon]$ 表示之, 并考虑基本群 $\pi_1(X, x_0)$. 设 $\widetilde{\alpha}$ 为其中任意一个元 (即 X 上以 x_0 为起点和终点的闭路的同伦类), 而 $\widetilde{\alpha} \in \widetilde{\boldsymbol{\alpha}}$ 为这个类的代表元. 对于每个固定的 $t \in I$, 根据我们的构造知道, 点 $\widetilde{\alpha}(t)$ 代表了这样的道路的等价类, 这条道路模 G 等价于道路 $\alpha_t(s) = \alpha(st) : I \to M, \alpha_t(0) = p_0$, 且投影 $\pi([\alpha_t]) = \alpha(t)$. 故而 $\pi \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$ 为 M 上起点和终点均为 p_0 的, 并被模 G 等价确定的闭路, 这表明 $\pi_*(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) \in G$.

反之, 对任意元 $\boldsymbol{\alpha} \in G$ (即 M 上一个闭路的同伦类) 我们可以选取闭路 $\alpha \in \boldsymbol{\alpha}$, 并将其提升到起点为 x_0 的道路, 设 $\widetilde{\alpha}_t = [\alpha_t]$. 显然 $\pi_*(\widetilde{\boldsymbol{\alpha}}) = \boldsymbol{\alpha}$. □

定理 4 让我们可以对具给定底 M 的所有覆叠进行分类: 它把这个问题化为研究基本群 $\pi_1(M)$ 的子群. 特别, 由此定理得到两个"极端"的覆叠. 其中之一对应于基本群自己 $G = \pi_1(M)$, 它是平凡的 (整体同胚), 这是因为 G 的指数为 1. 另一个对应于子群 $G = \{\mathbf{e}\}$, 由一个单位元组成, 称其为*万有覆叠*. 因为对它来说, $\operatorname{im} \pi_*$ 平凡, 而 π_* 是单同态, 故它的基本群 $\pi_1(x)$ 也是平凡的, 故*万有覆叠总是单连通的*. 它的叶数 (可能无穷) 等于群 $\pi_1(M)$ 中元素的个数.

例题.

(4) 对于去掉一点的平面 $\mathbb{C}_* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 其基本群等于圆的基本群, 它同构于整数群 $\mathbb{Z}$. 偶数组成的子群 (其指数 2) 对应于二叶覆叠, 这是 $w = \sqrt{z}$ 的黎曼面, 但去掉了分歧点 0 和 ∞ (参看前一个例题). 一般地, m 倍整数的子群对应于 $\mathbb{C}_*$ 的 m 叶

覆叠, 它是去掉分歧点的函数 $w = \sqrt[m]{z}$ 的黎曼面. 平凡子群 $\{0\}$ 对应于单连通的无限叶的覆叠, 即函数 $w = \operatorname{Ln} z$ 的黎曼面. 有限叶复叠以 $\mathbb{C}_*$ 代表, 而万有覆叠为平面 $\mathbb{C}$ 代表.

(5) 去掉两个点的平面 $M = \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$ 的万有覆叠是模函数的逆的黎曼面 (参看卷 I, 第 44 目). 覆叠空间 X 是平面 $\mathbb{C}$.

22. 黎曼区域

这个概念接近于区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的覆叠, 并且是黎曼曲面概念的高维类比.

定义. 称偶对 $(\widetilde{D}, \pi)$ 为黎曼 (区) 域或 $\mathbb{C}^n$ 上的区域, 其中 $\widetilde{D}$ 为道路连通空间, 而 $\pi : \widetilde{D} \to \mathbb{C}^n$ 为局部同胚映射, 称其为投射.

黎曼区域 $\widetilde{D}$ 可能不是区域 $D = \pi(\widetilde{D})$ 的覆叠, 这是由于位于 D 的某些点的上面可能会有 $\widetilde{D}$ 的边界点, 并且对于这样的点不存在邻域 U, 使得在其中 $\pi^{-1}(U)$ 同胚于 U 和一个离散集合的乘积 (图 25). 但是有时也称黎曼区域为覆叠, 而我们所接受的覆叠的意思是无边界的覆叠.

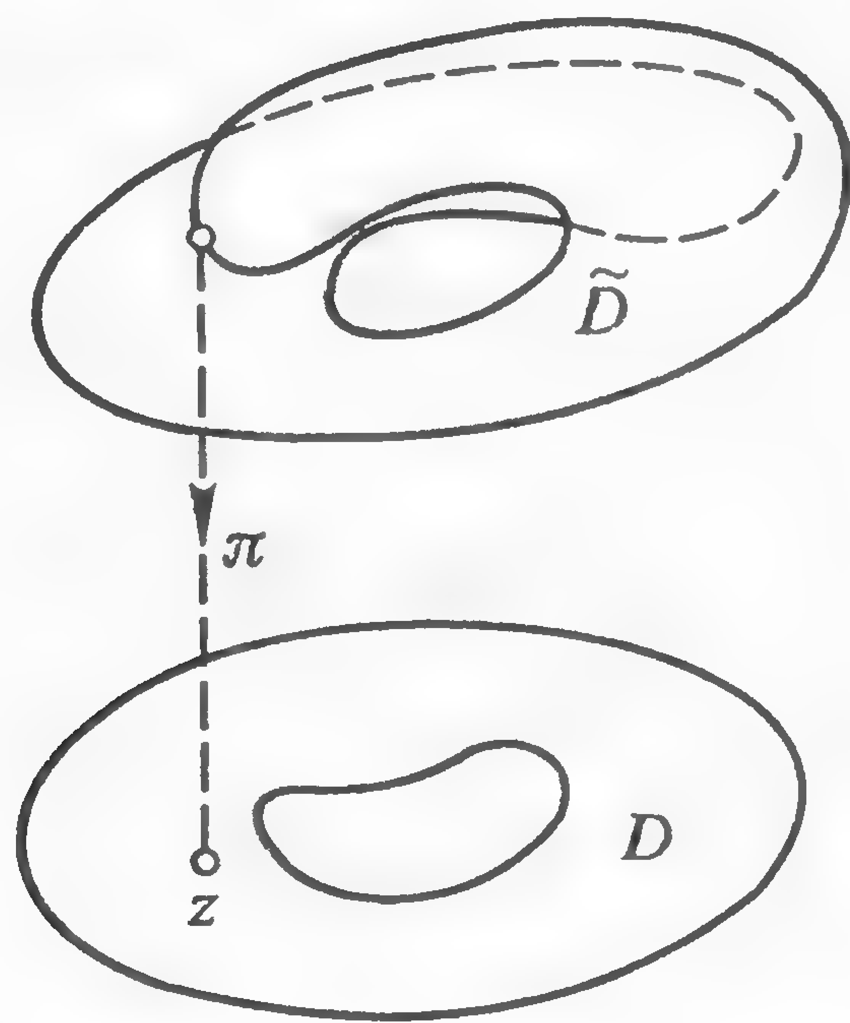


图 25

利用投射 π 可在空间 $\widetilde{D}$ 中引进流形的结构, 并进一步引进复结构. 为此只需考虑 $\widetilde{D}$ 的如此细的区域 $\widetilde{U}_\alpha$ 的覆盖, 使得 π 在它们上为同胚, 并在 $\widetilde{U}_\alpha$ 中引进 $z^\alpha = \pi(p), p \in \widetilde{U}_\alpha$ 为局部坐标. 总图表 $(\widetilde{U}_\alpha, z^\alpha)$ 的毗连关系为恒同 (表明其为双全纯) 映射, 即这是个复总图表.

我们注意到, 在黎曼区域上不仅能正确地定义出全纯函数 (就像在任意复流形上那样), 而且还有它们的导数. 就是说, 对任意在点 $p \in D$ 的全纯函数 f, 称

$$D^k f|_p = \frac{\partial^{|k|}}{\partial z_1^{k_1} \cdots \partial z_n^{k_n}} f \circ \pi\Big|_{\widetilde{U}}^{-1}(z)$$

为 f 在该点的 $k = (k_1, \cdots, k_n)$ 阶导数, 其中的 $\widetilde{U}$ 为 p 的一个邻域, 使得限制 $\pi|_{\widetilde{U}}$ 在其上为双全纯, $\pi|_{\widetilde{U}}^{-1}$ 是它的逆映射, 上式右端是在点 $z = \pi(p)$ 的导数.

更进一步地, 在黎曼区域 $(\widetilde{D},\pi)$ 上可自然地引进中心在点 $p\in\widetilde{D}$, 半径为 r 的多圆盘, 这是一个集合 $\widetilde{U}(p,r)\ni p$, 使得 π 将其全纯地投射为多圆盘 $U(z,r)\subset\mathbb{C}^n$, 其中 $z=\pi(p)$. 所有 $\widetilde{D}$ 上具已知中心 p 的多圆盘的并集被称为极大多圆盘, 而这个多圆盘的半径 (有限或无穷) 被称做p 到 $\widetilde{D}$ 的距离, 并以 $\rho(p,\partial\widetilde{D})$ 表示. 集合 $N\subset\widetilde{D}$ 到边缘的距离理解为 $\inf\limits_{p\in N}\rho(p,\partial\widetilde{D})$.

在解析延拓的过程中会自然地出现黎曼区域. 由于在多变量的情形, 这个过程像在单变量情形中一样, 我们只限于给出一个简短的描述. 我们将由中心在点 $a\in\mathbb{C}^n$ 的元素 (U,f) 着手, 即由一个多圆盘 $U=U(a,r)$ 和一个在其中全纯的函数 $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k$ 组成的偶对. 如同卷 I 中那样, 定义直接的解析延拓和沿道路 $\gamma:I\to\mathbb{C}^n,\gamma(0)=a$ 的解析延拓, 同样也证明沿道路 γ 的延拓结果在固定终点的同伦下不变, 就是说在沿实现此同伦的任意道路 γ_s 的所有可能的延拓下不变.

n 个复变量的*解析函数*是说像卷 I 那样, 是元素 $F=\{(U_\alpha,f_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, 其中的每一个都由沿 $\mathbb{C}^n$ 中某条道路的任意其他的解析延拓得到. 一般地说, 解析函数并不是在它被构建的区域 D 上的函数, 这是由于它可能在点 $z\in D$ 取许多个值. 但是像我们现在要证明的, 它是在 D 上的某个黎曼区域上的函数.

我们假设在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 上的解析函数 F 由元素 (U,F) 定义. 因为我们对于多圆盘 U 的半径并无兴趣, 我们可以不去考虑 (U,f) 而考虑元素 (U,f) 所代表的芽 $\mathfrak{f}_a$ (点 $a\in D$ 是它的中心; 参看卷 I, 第 29 目). 赋予在点 $z\in D$ 的芽 $\mathfrak{f}_z^\alpha$ 以参数 $\alpha\in A_z$, 它代表了由 (U,f) 出发沿所有可能的道路 $\gamma:I\to D$ 从 a 到 z 的延拓所得到的元, 另外我们还考虑偶对 $Z=(z,\mathfrak{f}_z^\alpha)$, 其中 $z\in D,\alpha\in A_z$.

在 $\widetilde{D}$ 中我们以下面的方式引进拓扑. 对于点 $Z=(z,\mathfrak{f}_z^\alpha)\in\widetilde{D}$ 的邻域, 我们采用所有点 $W=(w,\mathfrak{f}_w^\beta)\in\widetilde{D}$ 的集合, 它们满足 1) $\|w-z\|<\varepsilon$, 其中 $\varepsilon>0$ 为一个固定的数 [1] 和 2) 芽 $\mathfrak{f}_w^\beta$ 由元 (V_w,f^β) 代表, 它是元素 $(U_z,f^\alpha)\in\mathfrak{f}_z^\alpha$ 的直接延拓. 显然, 当 ε 足够小时这样的邻域非空. 我们让读者去证明, 在这个拓扑下, $\widetilde{D}$ 是个连通的豪斯多夫空间.

我们定义投射 $\pi:\widetilde{D}\to D$ 为映射 $(z,\mathfrak{f}_z^\alpha)\mapsto z$; 显然, 这是个连续的局部同胚映射. 因此, 我们构造了一个流形, 并称其为*解析函数 $\mathscr{F}$ 的黎曼域* (类比于单变量解析函数的黎曼面, 参看卷 I, 第 33 目).

如果元 (U,f) 沿所有道路 $\gamma:I\to D$ 都被延拓, 则显然地, 黎曼区域 $\pi:\widetilde{D}\to D$ 是个覆叠. 由在第 22 目所证明的知道, 这个覆叠对所有 $z\in D$ 的纤维 $\pi^{-1}(z)$ 的基数相同, 并且不超过可数基数. 在一般情形, 即当沿 D 中一条道路而不沿其他道路延拓时, 集合 $\pi^{-1}(z),z\in D$ 的基数也不超过可数 (只有在这种情形下这些基数对不同的点可能不同). $\pi^{-1}(z)$ 的基数就是“多值函数” F 在点 $z\in D$ 取值的个数. 然而更为正确的是, 把 F 看成是在 $\widetilde{D}$ 上的 (单值) 函数, 就是说, 对于点 $(z,\mathfrak{f}_z^\alpha)\in\widetilde{D}$,

[1] 我们记得, 对于点 $z\in\mathbb{C}^n$, 我们以 $\|z\|=\max\limits_\nu|z_\nu|$ 表示它的多圆盘范数.

其值为 $f^\alpha(z)$ 的函数, 其中 (U_z, f^α) 是芽 $\mathbf{f}_z^\alpha$ 的任一个代表元. 显然, 这个函数在 $\widetilde{D}$ 上全纯.

我们在下一章要讨论多变元函数的解析延拓问题, 将证明它与单变元函数在这方面有本质的区别.

§8.　解析集

在此我们将考虑复分析的基本对象之一, 它自然地产生于对全纯函数的几何研究之中, 这就是使那些函数为零的集合.

23. 魏尔斯特拉斯预备定理

这个定理 (Vorbereiungssatz) 发表于 1879 年, 是联系复分析和代数的基本定理之一. 它推广了单变量全纯函数像 $(z-a)$ 的整幂那样变为零的熟知性质: 如果 $f(a)=0$ (但 $f \not\equiv 0$), 则在点 a 的一个邻域内有

$$f(z) = (z-a)^k \varphi(z), \tag{1}$$

其中 φ 全纯, 并在 a 不为零.

在高维情形, 代替 $(z-a)$ 的幂的是用一个关于某个变量, 譬如 z_n 的多项式, 而系数是全纯依赖于其余变量 $'z = (z_1, \cdots, z_{n-1})$ 的函数.

定理 1. 设函数 f 在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 中某个邻域中全纯, 且 $f(a)=0$, 而 $f('a, z_n) \not\equiv 0$; 于是在这点的某个邻域 V 中有

$$f(z) = \{(z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + \cdots + c_k('z)\}\varphi(z), \tag{2}$$

其中 $k \geqslant 1$ 为 $f('a, z_n)$ 在点 $z_n = a_n$ 取零的阶, 函数 c_ν 在 $'V$ 中全纯, $c_\nu('a) = 0$, 而 φ 在 V 全纯并在这里不为零.

证明. 不失一般性, 设 $a=0$. 由单复变函数的唯一性定理, 可以选取 $r_n > 0$ 使得当 $0 < |z_n| \leqslant r_n$ 时 $f('0, z_n) \neq 0$, 而由于 f 的连续性, 存在多圆盘 $'V('0, r)$ 使得 $f('z, z_n) \neq 0$, 其中 $'z \in {'V}, |z_n| = r_n$. 对于任意固定的 $'z^0 \in {'V}$, 函数 $f('z^0, z_n)$ 在圆盘 $V_n = \{|z_n| < r_n\}$ 中零点的个数等于

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_n} \frac{\dfrac{\partial}{\partial z_n} f('z^0, z_n)}{f('z^0, z_n)} dz_n = k, \tag{3}$$

这是因为 (3) 的左端是整数并是点 $'z^0$ 在 $'V$ 中的连续函数 [1], 从而其为常数, 而当 $'z^0 = {'0}$ 时它等于函数 $f('0, z_n)$ 在点 $z_n = 0$ 的零点的阶数, 即 k.

---

[1] 参看第 5 目的引理.

我们固定 $'z \in 'V$, 并以 $z_n^{(\nu)} = z_n^{(\nu)}('z), \nu = 1, \cdots, k$ 记函数 $f('z, z_n)$ 在圆盘 V_n 中的零点, 从而我们构造对于 z_n 的多项式

$$P(z) = \prod_{\nu=1}^{k}(z_n - z_n^{(\nu)}) = z_n^k + c_1('z)z_n^{k-1} + \cdots + c_k('z), \tag{4}$$

它以这些零点为其根. 它的系数在 $'V$ 中全纯. 事实上, 对任意在 $\overline{V}_n$ 中的全纯函数 $\omega(z_n)$, 按照广义辐角原理 (参看卷 1, 第 34 目的习题)

$$\sum_{\nu=1}^{k}\omega(z_n^{(\nu)}) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V_n}\omega(z_n)\frac{\dfrac{\partial}{\partial z_n}f('z, z_n)}{f('z, z_n)}dz_n,$$

由此看出, 左端的和为变量 $'z$ 在 $'V$ 中全纯函数 (我们考虑当 $'z \in 'V$ 和 $z_n \in \partial V_n$ 时 $f \neq 0$). 现令 $\omega(z_n) = z_n^\mu, \mu = 1, \cdots, k$, 那么我们发现多项式 (4) 的根的 μ 次幂的和在 $'V$ 中全纯, 而用这些和 (在代数中所熟知) 有理地表达出它的系数, 从而 $c_\nu \in \mathscr{O}('V)$. 当 $'z = '0$ 时多项式的所有 k 个根都等于零, 所以所有 $c_\nu('0) = 0$.

对任意固定的 $'z \in 'V$, 函数

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{P(z)}$$

为对在圆盘 V_n 中的 z_n 的全纯函数并且不取零值, 这是因为 P 只在 $f = 0$ 处的点 $z_n^{(\nu)}('z)$ 为零并具相同阶数. 所以当任意 $'z \in 'V$ 时, 函数 φ 由对变量 z_n 的柯西积分表示:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial V_n}\frac{f('z, \zeta_n)}{P('z, \zeta_n)}\frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n},$$

因而在 $V = 'V \times V_n$ 的那些使 $P = 0$ 的点上有定义. 因为在 ∂V_n 上 $P \neq 0$ (因为在那里 $f \neq 0$), 故右端, 从而 φ, 全纯地依赖于 $'z$. 由哈托格斯定理, φ 在多圆柱 V 中全纯. □

魏尔斯特拉斯预备定理证明了, 全纯函数化为零的情形如同系数为环 $\mathscr{O}_{'a}$ 的 $'z$ 的全纯于点 $'a$ 的函数的多项式情形:

$$P('z, z_n) = (z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + \cdots + c_k('z). \tag{5}$$

更准确地说, 这个多项式的除去首项外所有的系数属于 $\dot{\mathscr{O}}_{'a}$ 中的一个理想[1], 它由其中在点 $'a$ 为零的函数组成. 称具这种性质的多项式为此点的**魏尔斯特拉斯多项式**. 因此, 定理 1 让我们对于研究全纯函数零点集时可诉诸于代数方法.

---

[1]称环 R 中它的元素构成的集合 I 为它的一个理想是说它: ① 是该环的加法子群 (对此, I 中任意两个元的差也属于 I) 和 ② 对任意元 $j \in I$ 和任意 $r \in R$, 乘积 $jr \in I$. $\dot{\mathscr{O}}_{'a}$ 中所有在 $'a$ 为零的函数的集合满足这两个条件.

注. 如果 $f \not\equiv 0$ 并且除了 $f(a', z_n) \not\equiv 0$ 这个条件外它满足魏尔斯特拉斯定理的所有条件, 我们则可在 U 中选取点 z^0, 使 $f(z^0) \neq 0$, 并改变坐标轴使得轴 z_n 成为平行于通过 a 和 z^0 的复直线. 于是也就满足了条件 $f('a, z_n) \not\equiv 0$.

我们还注意到, 由魏尔斯特拉斯定理可直接得到复的隐函数定理: 如果 $f(a) = 0$, 但 $\dfrac{\partial f}{\partial z_n}(a) \neq 0$, 则定理 1 可用于 $k = 1$ 的情形. 故在 a 的邻域中方程 $f(z) = 0$ 等价于方程 $P(z) = z_n - a_n + c_1('z) = 0$, 由此解出 z_n, 于是 $z_n = a_n - c_1('z)$ 为其余变量的全纯函数.

由这同一个定理我们得到了我们在第 9 目中利用过的水平集合的一个性质: 在函数 f 的水平集 $\{f(z) = 0\}$ 上存在以 a 为起点的光滑道路, 其中 f 在点 a 为全纯. 事实上, 水平集 $\{f(z) = 0\}$ 可以用 $P('z, z_n) = 0$ 描述, 其中的 P 为 f 在点 a 的魏尔斯特拉斯多项式. 如果 $\gamma : [0, 1] \to 'V, \gamma(0) = 'a$ 为光滑道路, 则该多项式的系数 $c_j \circ \gamma(t)$ 光滑地依赖于 t, 而当 $t \to 0$ 时它趋向 0. 因此存在此多项式的光滑依赖于 t 的根, 当 $t \to 0$ 时趋向 a_n; 道路 $[0, 1] \to (\gamma(t), z_n(t))$ 为所求.

当 $n = 2$ 时, 函数 $f \not\equiv 0$ 的魏尔斯特拉斯展式可以写成

$$f(z, w) = (z - a)^k \{(w - b)^l + c_1(z)(w - b)^{l-1} + \cdots + c_k(z)\}\varphi(z, w), \qquad (6)$$

它并不要求 $f(a, w) \not\equiv 0$ 的条件 (这里的 c_ν 在点 $a \in \mathbb{C}$ 为全纯的函数, $C_\nu(a) = 0$, k 和 l 为整数, φ 在点 $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ 为全纯的函数, 并在此点非零). 事实上, 如果 $f(a, w) \not\equiv 0$, 我们则有展式 (6), 其中 $k = 0$; 如果 $f(a, w) \equiv 0$, 则由泰勒展开式得到 $f(z, w) = (z - a)^k g(z, w)$, 其中 $g(a, w) \not\equiv 0$, 从而将定理用于 g, 即有了展开式 (6).

我们还需要所谓的魏尔斯特拉斯除法定理.

定理 2. 设函数 f 在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的邻域中全纯, 并且 P 为在此点的某个魏尔斯特拉斯多项式 [1], 设 k 为其 (相对于 z_n 的) 次数. 于是在 a 的某个邻域中函数 f 可唯一地表示为形式

$$f = P\varphi + Q, \qquad (7)$$

其中函数 φ 在点 a 为全纯, 而 Q 为次数不大于 $k - 1$ 的 z_n 的多项式, 其系数在点 $'a \in \mathbb{C}^{n-1}$ 的邻域中全纯.

证明. 不失一般性, 设 $a = 0$. 选取圆 $\{|z_n| = r\}$ 使得对所有点 $'a$ 的邻域 $'U$ 中所有的 $'z$ 在此圆上满足 $P('z, z_n) \neq 0$, 并且令

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\{|\zeta_n| = r\}} \frac{f('z, \zeta_n)}{P('z, \zeta_n)} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}.$$

[1] 不必是函数 f 的魏尔斯特拉斯多项式.

于是 φ 在 $U='U\times\{|z_n|<r\}$ 全纯, 同样全纯的还有函数

$$Q(z)=f(z)-P(z)\varphi(z)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|\zeta_n|=r\}}\frac{f('z,\zeta_n)}{P('z,\zeta_n)}\frac{P('z,\zeta_n)-P('z,z_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n.$$

积分号内的第二个因子是个次数不大于 $k-1$ 的关于 z_n 的多项式. 其系数对任意 $\zeta_n,|\zeta_n|=r$ 是 $'U$ 中的全纯函数:

$$\frac{P('z,\zeta_n)-P('z,z_n)}{\zeta_n-z_n}=q_1('z,\zeta_n)z_n^{k-1}+\cdots+q_k('z,\zeta_n).$$

把这个式子代入前面并沿 $\{|\zeta|_n=r\}$ 积分, 我们便得到

$$Q(z)=b_1('z)z_n^{k-1}+\cdots+b_k('z),$$

其中函数

$$b_j('z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|\zeta_n|=r\}}\frac{f('z,\zeta_n)}{P('z,\zeta_n)}q_j('z,\zeta_n)d\zeta_n,j=1,\cdots,k$$

在 $'U$ 中全纯. 展式 (7) 的存在性得证, 剩下的要证明它的唯一性.

假说与 (7) 一起的还存在另一个展式 $f=P\varphi_1+Q_1$ 具有同样的那些性质. 于是成立恒等式

$$P(\varphi_1-\varphi)=Q-Q_1,$$

那么, 如果 $\varphi_1\not\equiv\varphi$, 则对于 z_n 而言, 左端的次数不小于 k, 而右端的不大于 $k-1$. 这个矛盾表明 $\varphi_1\equiv\varphi$, 从而 $Q_1\equiv Q$. □

我们以它在解析集理论中对重要的不可约概念的应用来说明这个定理. 我们首先来回忆一些代数知识, 仅仅局限于对于 z_n 的系数在点 $'a\in\mathbb{C}^{n-1}$ 的邻域中全纯的那些多项式的环 $\mathscr{P}_a$ 方面. 称多项式 $P\in\mathscr{P}_a$ 为不可约是说它不能分解为两个次数不小于 1 的多项式 $P_1,P_2\in\mathscr{P}_a$ 的乘积. 任何一个多项式 $P\in\mathscr{P}_a$ 可以表示为

$$P=P_1^{m_1}\cdots P_l^{m_l},\tag{8}$$

其中 P_j 为 $\mathscr{P}_a$ 中的不可约多项式, 而 m_j 为自然数, 并且这样的分解在差一个 $'a$ 的邻域中非零全纯的因子下是唯一确定的.

另外, 如果给出了两个多项式 $P,Q\in\mathscr{P}_a,\deg P\geqslant\deg Q$, 则可应用欧几里得辗转相除法:

$$\begin{aligned}&P=q_1Q+r_1,\ Q=q_2r_1+r_2,\\&r_1=q_3r_2+r_3,\cdots,r_{k-2}=q_kr_{k-1}+r_k\end{aligned}\tag{9}$$

(所有的 $q_j,r_j\in\mathscr{R}_a$, 这是个 z_n 的多项式的集合, 其中多项式的系数是在 $'a$ 的邻域内全纯函数的分式, 并且有 $\deg r_j<\deg r_{j-1},r_0=Q$), 一直下去直到在余函数中得

到一个只依赖于 $'z$ 的函数 (即对于 z_n 为零次的多项式):

$$r_{k-1}(z) = q_{k+1}(z)r_k(z) + r('z). \tag{10}$$

如果在 r 的表达式中消去在除法过程中出现的所有分母 (只有有限个), 则得到一个全纯函数

$$R('z) = a('z)r('z), \tag{11}$$

称其为多项式 P 和 Q 的**结式**.

如果此结式为 0, 则 $r('z) = 0$, 那么正如从 (10) 和 (9) 中看到的, 两个多项式 P 和 Q 都被 $r_k \in \mathscr{R}_a$ 除尽, 这是一个对 z_n 的次数不小于 1 的多项式: $P = \widetilde{p}r_k, Q = \widetilde{q}r_k$, 其中 $\widetilde{p}, \widetilde{q} \in \mathscr{R}_a$. 因为这些等式的左端属于 $\mathscr{P}_a$, 故在对右端的系数简约之后便将其转化为

$$P = pR_k, \quad Q = qR_k, \tag{12}$$

其中 $p, q, R_k \in \mathscr{P}_a$, 其中的 $R_k(z) = c_k('z)r_k(z)$ 为次数不小于 1 的多项式.

在一般情形中, 每个余项 r_j 可通过前两个余项 (r_{j-1} 和 r_{j-2}) 线性地表达; 逐次地将这些表达式代入 (9) 和 (10), 并去除分母, 我们便得到结式

$$R('z) = p(z)P(z) + q(z)Q(z), \tag{13}$$

其中 p 和 q 是 $\mathscr{P}_a$ 中的多项式. 由此看出, 如果在某个 $'z$, 多项式 P 和 Q 有 (对 z_n) 的公共根, 则 $R('z) = 0$. 反之, 如果 $R('z) = 0$, 并在这个 $'z, P$ 和 Q 的首项系数不为 0, 则在 (11) 中 $a('z) \neq 0$ 而 $r('z) = 0$; 故而 $P('z, z_n)$ 和 $Q('z, z_n)$ 被 $r_k('z, z_n)$ 除尽, 就是说它们具有 (对 z_n 的) 公共根.

称多项式 $P \in \mathscr{P}_a$ 和它的导数 $\dfrac{\partial P}{\partial z_n}$ 的结式为这个多项式的**判别式**. 由上面所说知道, 多项式 P 的判别式 (如果其首项系数不取零值) 等于零当且仅当在值 $'z$ 时 P (对 z_n) 有重根.

例题. 设 $P(z) = z_2^3 - 3z_1^2 z_2 + 2z_1^3 - z$; 于是 $\dfrac{\partial P}{\partial z_2} = 3z_2^2 - 3z_1^2$, 并且欧几里得除法给出 $r_3(z_1) = (-4z_1^2 + z_1)/(2z_1^2 - 1)$. 在简约分母后我们得到了结式 $\Delta(z_1) = 4z_1^2 - z_1$. 因而 P 对于 z_2 的重根只出现在 $z_1 = 0$ ($z_2 = 0$ 为三重根), $z_1 = \dfrac{1}{2}$ ($z_2 = -\dfrac{1}{2}$ 为二重根) 和 $z_1 = -\dfrac{1}{2}$ ($z_2 = \dfrac{1}{2}$ 为二重根).

如果多项式 P 的判别式恒等于 0, 则 P 必定是可约的, 这是因为由 (12), P 有次数不低于 1 而不高于 $\deg P - 1$ (因 $\dfrac{\partial P}{\partial z_n}$ 也被其除尽) 的因子 R_k. 这个结果可加以推广.

定理 3. 如果在多项式 $P \in \mathscr{P}_a$ 分解为不可约多项式的表达式 $P = P_1 \cdots P_l$ 中的所有因子互不相同, 则 P 的判别式不恒等于零.

证明. 如果其判别式 $\Delta \equiv 0$, 则根据 (12), 多项式 P 和 $\dfrac{\partial P}{\partial z_n}$ 具有公共的非平凡因子 R_k. 由于分解为不可约因子的唯一性, R_k 应该 (确定到一个只依赖于 $'z$ 的因子) 等于其中的一个 P_j. 然而由乘积的微分公式: $\dfrac{\partial P}{\partial z_n} = \dfrac{\partial P_1}{\partial z_n} P_2 \cdots P_l + \cdots + P_1 \cdots P_{l-1} \dfrac{\partial P_l}{\partial z_n}$ 知道, 导数 $\dfrac{\partial P}{\partial z_n}$ 不被任何一个 P_j 除尽. □

函数的不可约概念与多项式的不可约概念紧密相关. 对于在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 全纯并在该点为零的函数 $f \neq 0$, 称其为在此点不可约是说, 如果它不能表示为在 a 全纯并在此为零的函数的乘积. 不失一般性, 可设 $f('a, z_n) \neq 0$, 于是可以建立函数 f 在点 a 的魏尔斯特拉斯多项式 P. 如果 f 在点 a 可约, 则对其分解中的每个因子可以应用魏尔斯特拉斯定理; 我们得到 P 是这些魏尔斯特拉斯多项式的乘积, 即是可约的. 反之, 如果 P 可约, 则它可分解为在点 a 为零的多项式的乘积 (这由魏尔斯特拉斯多项式的系数的性质得出 $P(a', z_n) = (z_n - a_n)^k$), 从而 f 在这点可约.

由所指出的这些事实也得到论断说, 每个在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 全纯并在该点取 0 的每个函数 $f \neq 0$ 可以唯一地 (可以相差一个全纯的非零因子) 分解为在该点不可约的因子的乘积:

$$f = f_1^{m_1} \cdots f_l^{m_l} \tag{14}$$

(参照分解 (8)).

最后我们给出魏尔斯特拉斯除法定理的一个推论, 它表达了不可约函数的一个重要性质.

定理 4. 设函数 f 在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 为全纯, 取零值且不可约, 而函数 g 在 a 的邻域中全纯, 并在 $f = 0$ 的地方等于 0. 于是 g 被 f 除尽, 其意思是说, 在 a 的邻域中

$$g = fh, \tag{15}$$

其中 h 为全纯函数.

证明. 不失一般性, 我们假定 $f('a, z_n) \neq 0$, 并以 P 表示 f 在点 a 的魏尔斯特拉斯多项式; 设其次数为 k. 因为它不可约, 故其判别式 $\Delta \neq 0$, 从而在 a 的某个邻域存在点 z^0 使 $\Delta('z^0) \neq 0$, 但 $f(z^0) = 0$, 因而 $P(z^0) = 0$. 由定理 2 知, 函数 g 在该邻域中可表示为

$$g = P\varphi + Q, \tag{16}$$

其中 $Q \in \mathscr{P}_a, \deg Q < k$, 而 φ 为全纯函数. 将上面找到的点 $'z^0$ 代入其中, 则在 $'z$ 的这个值下多项式 P 具有 k 个不同的根 z_n^j. 然而由定理的条件, 在点 $('z^0, z_n^j)$ 函数

$g=0$, 而根据 (16) 知, 在这些点上 $Q=0$. 因此次数小于 k 的多项式 Q 具有 k 个不同的根, 从而 $Q\equiv 0$. 故 $g=P\varphi$, 这等价于 (15). □

24. 解析集的性质

定义 1. 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的解析集 A 定义成局部为有限个全纯函数的公共零点的集合. 换句话说, 对任意点 $a\in D$ 存在邻域 $U\subset D$ 以及函数 $f_\mu\in\mathscr{O}(U)$ 的有限组使得

$$A\bigcap U=\{z\in U: f_1(z)=\cdots=f_k(z)=0\}. \tag{1}$$

D 中解析集的特殊的平凡情形就是 D 本身, 这时所有的 $f_\mu\equiv 0$. 如果解析集 $A\neq D$, 则在邻域 $U\subset D\setminus A$ 中可以选取不相容的方程组作为 $\{f_\mu=0\}$. 这些集合的最简单的性质可表达为

定理 1. 区域 D 中的解析集 $A\neq D$ 是个闭的, 在 D 中无处稠的, 并且不分离这个区域的集合.

证明. 设 $a\in D$ 为序列 $a^\mu\in A$ 的极限点; 并设在邻域 $U\ni a$ 中, 集合 $A\bigcap U$ 中由公式 (1) 定义. 由于函数 f_μ 在点 $a\in A$ 的连续性知第一个论断成立.

如果 A 在 D 中有内点, 则其开核 E 非空. 然而因为集合 E 的任一极限点 $z^0\in D$, 由 A 的闭性和全纯函数的唯一性知其属于 E, 故 E 闭于 D. 再由 D 的连通性知 $E=D$, 从而与定理条件矛盾. 第二个论断得证.

关于最后一个论断的证明只需要证明每个点 $a\in A$ 具有连通的邻域使得 $U\setminus A$ 连通. 设 $a\in A$ 为任意一个点, $U\subset D$ 为其一个凸邻域,z^0 和 z^1 为 $U\setminus A$ 中任意点. 以 $G=\{\zeta\in\mathbb{C}:\zeta z^0+(1-\zeta)z^1\in U\}$ 记连接 z^0 和 z^1 的复直线与 U 的交集, 这是平面中的一个凸区域. 在邻域 U 中定义 A 的函数里存在这样的函数使得

$$g_\mu(\zeta)=f_\mu(\zeta z^0+(1-\zeta)z^1)\not\equiv 0,$$

从而集合 $H=\{\zeta\in\mathbb{C}:\zeta z^0+(1-\zeta)z^1\in A\}$ 为离散的. 因此集合 $G\setminus H$ 为连通, 而因为它包含了点 $\zeta_0=0$ 和 $\zeta_1=1$, 故存在道路 $\gamma: I\to G\setminus H$, 它连接了 ζ_0 和 ζ_1; 于是函数 $t\mapsto\gamma(t)z^0+(1-\gamma(t))z^1$ 定义了连接 z^0 和 z^1 的在 $U\setminus A$ 中的道路. □

如果函数 (1) 在某个邻域 $U\ni a$ 中可以这样选取使得雅可比矩阵 $\left(\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right)_a$ 的秩等于 k, 则称 a 为集合 A 的**正则点**, 而数 $n-k=m$ 为 A 在点 a 为**复维数**, 并记为 $\dim_a A$. 集合 A 的正则点的集合以 A^0 表示, 而 $A\setminus A^0$ 中的点被称做 A 的**临界点**.

例题. 对于集合 $A=\{z\in\mathbb{C}^3: z_1z_2z_3=0\}$, 即由三个超平 $H_\nu=\{z_\nu=0\}$ 组成, 函数 $f(z)=z_1z_2z_3$ 的雅可比矩阵具形式 $\triangledown f=(z_2z_3,z_1z_3,z_1z_2)$. 除了在复直线 $l_1=H_2\bigcap H_3, l_2=H_1\bigcap H_3, l_3=H_1\bigcap H_2$ 上 $\triangledown f=0$ 外, 它的秩在 A 处处为 1. 因此, A 的临界点等于并 $L=l_1\bigcup l_2\bigcup l_3$; 而正则点集 $A^0=A\setminus L$.

定理 2. 解析集 A 的正则点集合 A^0 是 A 中的开集, 而它的连通分支是复流形.

证明. A^0 的开性是显然的, 这是因为如果在邻域 U 中, 集合 A 由方程组 (1) 给出且 $a \in U$ 为正则点, 那么矩阵 f' 有一个 k 阶子式在 a 不为零; 从而这个子式在 a 的一个邻域中不为零, 这表明, A 中在此邻域中的点也是正则的. 设这个子式为 $\det\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right)$, 其中 $\mu = 1, \cdots k, \nu = m+1, \cdots, n$ $(m = n-k)$. 由隐函数定理 (参看第 9 目), 在 a 的邻域中 A 由方程组

$$z_\nu = g_\nu(z_1, \cdots, z_m), \quad \nu = m+1, \cdots, n \tag{2}$$

给出, 其中 g_ν 为全纯函数.

因此在这个邻域中集合 A 被作为全纯函数的图像给出, 从而是维数为 $m = n-k$ 的复流形. 于是, 对于 A^0 的包含 a 的连通分支的论断也同样成立. □

现转到 A 的临界点的集合 $A^c = A \setminus A^0$, 这时我们注意到, 它属于不同于 A 自身的一个解析子集. 事实上, 设 a 是 A 的一个临界点, k 为那样的最大整数, 使得在 a 的邻域 U 中存在全纯函数 $f_1, \cdots, f_k$, 它们在 A 上为零并且矩阵 f' 有个 k 阶子式 D 在 U 上不恒为 0. 设 $\widetilde{A}$ 为 U 中一个点集, 它的每个点都满足 $f_1 = \cdots = f_k = 0$, 而且这个子式 D 不等于 0. 对于在 $A \bigcap U$ 上为零的任意函数 $f \in \mathscr{O}(U)$, 其微分 df 是 $df_1, \cdots, df_k$ 的线性组合, 因为如若不然, 可将 f 添加到这些 f_μ 中, 从而 k 就不是最大的那个数了, 这表明在 $\widetilde{A}$ 上 $df = 0$.

由此得知, 在点 $z^0 \in \widetilde{A}$ 的邻域中集合 $\widetilde{A}$ 与 A 相等, 并且这样的点是 A 的正则点. 于是 $A^c \bigcap U$ 的点应该属于集合 $\{z \in A \bigcap U : D(z) = 0\}$, 从而证明了我们的断言. 在这里我们不再引进更加复杂的讨论, 尽管这些讨论会得出更强的结果. [1)]

定理 3. 解析集 A 的临界点集合 A^c 是个不同于 A 的解析集.

注. 在临界点的邻域中, 解析集甚至可能不是个拓扑流形. 例如, 考虑解析集 $A = \{z_1 z_2 - z_3^2 = 0\}$. 其雅可比矩阵为 $(z_2, z_1, -2z_3) \neq 0$, 于是它的维数为 2, 而 $0 \in \mathbb{C}^3$ 是其临界点. 如果在 0 的邻域中该集合为流形, 那么 $A \setminus \{0\}$ 就会局部地同胚于去掉一个点的实四维球, 即 $A \setminus \{0\}$ 为单连通集合. 映射 $g : (\zeta_1, \zeta_2) \mapsto (\zeta_1^2, \zeta_2^2, \zeta_1 \zeta_2)$ 把 $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 确定为 $A \setminus \{0\}$ 的二叶覆叠, 并由第 20 目的单值性定理知 $A \setminus \{0\}$ 不可能是单连通的.

若像定理 1 的证明那样进行, 则可由定理 3 中推导出 A^c 为闭集并在 A 中无处稠 (最后的这个论断已在所证过的这个定理的部分得到). 但是像在本目定理 1 后面

[1)] 参看丘尔卡 (E. M. Chirka) Комплексные аналитические множества. – М.: Наука, 1985. 有英译本: *Complex analytic sets*, Kluwer Academic, Norwell, MA, 1989.

的例题中看到的, A^c 可能分离 A; 关于这点的详情可参看后面的内容.

由定理 2 看出, 解析集在它的正则点上, 前面所规定的维数概念与复流形的维数的几何定义一致. 因为正则点的集合 A^0 在 A 处处稠密, 故而对任意点 $a \in A$ 可以按定义令

$$\dim_a A = \varlimsup_{\substack{z \to a \\ z \in A^0}} \dim_z A; \tag{3}$$

我们称数 $\dim A = \sup\limits_{a \in A} \dim_a A$ 为集合 A 的维数; 称数 $n - \dim A$ 为 A 的余维. 如果 $\dim_a A = m$ 对所有的 a 成立, 则称集合 A 为纯 m 维的.

余维为 1 ($\dim A = n-1$) 的解析集 $A \subset \mathbb{C}^n$ 被称做一个*复超曲面*, 而维数 1 的集合被称做*复曲线*. 没有临界点 ($A^c = \varnothing$) 的解析集是复流形的 (局部有限个) 并; 有时也称这样的集合为*光滑的*.

可以证明对于 $k, 0 \leqslant k \leqslant m = \dim A$, 集合 $A_{(k)} = \{a \in A : \dim_a A = k\}$ 是个解析集 (也可能为空集), 并显然是纯 k 维的. 因此, 每个解析集可表示为有限个解析集的并: $A = \bigcup\limits_{k=0}^{m} A_{(k)}$, 其中每一个都是纯维的, 于是 $\dim_a(A \setminus A^0) < \dim_a A$, 因而纯 m 维解析集 A 的临界点集的维数严格地小于 m.

因为定理 3 可应用于解析集 $A \setminus A^0$, 故而我们得到了解析集为复流形的分解: $A = A^0 \bigcup (A \setminus A^0)^0 \bigcup \cdots$. 分解为维数严格下降的流形则更为方便:

$$A = A^0_{(m)} \bigcup (A \setminus A^0_{(m)})^0_{(m-1)} \bigcup \cdots (m = \dim A). \tag{4}$$

称这样的分解为解析集的一个*分层*, 而称它的每个因子为相应维数的层.

例题 (1). 对于定理 1 后面的例题中的集合 $A = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 z_2 z_3 = 0\}$, 二维层为 $A^0_{(2)} = A \setminus L$, 一维层为 $L \setminus \{0\}$, 而零维的是点 $\{0\}$.

定义 2. 称解析集 A 在区域 D 中为*不可约的*是说, 如果它不能表示为除了它本身之外的 D 中解析集的并. 称集合 A 在点 $a \in A$ 不可约是说, 如果在这点的足够小的邻域 U 中集合 $A \bigcap U$ 为不可约.

例题.

(2) 解析集 $A = \{z_1^2 z_2^2 - z_3^2 = 0\}$ 在 $\mathbb{C}^3$ 中可约, 这是因为它被分解为两个集 $A_1 = \{z_1 z_2 - z_3 = 0\}$ 和 $A_2 = \{z_1 z_2 + z_3 = 0\}$. 它在交集 $A_1 \bigcap A_2$ 的所有点也是可约的, 这个交集为直线 $(z_1, 0, 0)$ 和 $(0, z_2, 0)$; 而在其他点它是不可约的.

(3) 集合 $\{z_1 z_2^2 - z_3^2 = 0\}$ 在点 $z = 0$ 为不可约, 但在所有点 $(a_1, 0, 0), a_1 \neq 0$ 为可约 (它可表示为集合 $\{\sqrt{z_1} z_2 \pm z_3 = 0\}$ 的并, 其中的 $\sqrt{z_1}$ 表示平方根分支中的一个).

(4) 集合 $\{z_1 z_2 - z_3^2 = 0\}$ 在所有点都不可约 (包括在临界点 $z = 0$).

解析集的不可约概念与在第 23 目我们所考虑的函数的不可约概念有关. 设函数 f 在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 全纯, 并在此点不可约; 我们将证明因此而有解析集 $A = \{f(z) = 0\}$ 在点 a 为不可约. 事实上, 设若相反, 在此点的邻域中 $A = A_1 \bigcup A_2$, 其中 A_1 和 A_2 为不同于 A 的复超曲面, 从而互不相同. 于是存在函数 f_1 和 f_2, 它们在点 a 全纯, 并使得 $f_1|_{A_1} \equiv 0, f_1|_{A_2} \not\equiv 0$, 且相类似地 $f_2|_{A_2} \equiv 0, f_2|_{A_1} \not\equiv 0$. 函数 f 在集合 $\{f_1 f_2 = 0\}$ 上为零, 并由魏尔斯特拉斯除法定理 (参看第 23 目) 有 $f_1 f_2 = hf$, 其中 h 为在 a 全纯的函数; 于是 f 可约, 与假设相反. 这个论断的逆论断却不成立: 设 f^2 为在点 a 的不可约函数的平方, 从而在这点为可约, 但是集合 $A = \{f^2 = 0\}$ 与 $\{f = 0\}$ 重合, 并且根据上述的讨论它在点 a 为不可约.

在第 23 目我们曾证明, 任意在点 a 全纯并在此为 0 的函数可以分解为不可约因子的乘积. 于是, 根据前面所进行过的讨论得出, 在它的任意点的邻域中任何一个复超曲面都可以表示为在这点的不可约超曲面的并.

进一步地, 复超曲面 A 在区域 D 不可约当且仅当它的正则点的集合 A^0 为连通. 事实上, 设 A 为可约且分解为 D 中解析集的并 $A_1 \bigcup A_2$. 交集 $A_1 \bigcap A_2$ 的所有点都是临界点 (在它们的邻域中, A 不是个流形), 从而临界点的集合 A^c 包含了这个交集从而分离了 A^0 (去掉 $A_1 \bigcap A_2$ 不可能从 A_1 到达 A_2). 反之, 设 A^0 不连通并分裂为连通的超曲面 A_j 的并; 我们将证明闭包 $\overline{A}_j$ 为 D 中的复超曲面即 $A = \overline{A}^0$ 是 $\overline{A}_j$ 的并, 从而可约.

设点 $a \in D$ 属于 $\overline{A}_j$; 因为 $\overline{A}_j \subset A$, 在某个邻域 $U \ni a$ 中这个集合便由方程 $f(z) = 0$ 定义, 其中 $f \in \mathscr{O}(U)$. 不失一般性可设 $a = 0$, 并且 $f('0, z_n) \not\equiv 0$, 从而可将 f 换成它在 0 的魏尔斯特拉斯多项式 $P('z, z_n)$. 不失一般性, 又可设 P 在 0 不可约, 这是因为, 不然的话, P 可以用它的对应于 A_j 这个分支的不可约因子. 那么在 $'0$ 的某个邻域 $'V$ 中这个多项式的判别式 $\Delta \not\equiv 0$ (见第 23 目), 从而集合 $E = \{'z \in {'V} : \Delta('z) = 0\}$ 是 $'V$ 中的一个复超平面.

对于 $'z \in {'V} \setminus E$, 方程 $P('z, z_n) = 0$ 的所有根都是单根; 我们以 $z_n^{(\mu)}(z)$ ($\mu = 1, \cdots, k_j$) 记它们中那些使 $('z, z_n^{(\mu)}) \in A_j$ 的根, 并且构造多项式

$$p_j(z) = \prod_{\mu=1}^{k_j} (z_n - z_n^{(\mu)}('z)) = z_n^{k_j} + c_1('z) z_n^{k_j - 1} + \cdots + c_{k_j}('z).$$

因为 $\dfrac{\partial P}{\partial z_n}('z, z_n^{(\mu)}) \neq 0$, 故由第 9 目的隐函数定理, 根 $z_n^{(\mu)}$ 在 $'z$ 的充分小邻域中全纯, 并且它们显然可以沿 $'V \setminus E$ 中的任意道路进行解析延拓. 但是在环绕某个闭道路一周时这个有限值可能不与初始的值不同而变到另一个根的值. 这样的置换并不改变这些根的对称函数的值, 故而后者仍然是个单值函数, 从而在 $'V \setminus E$ 中全纯. 那么, 多项式 p_j 的系数, 因为可以通过它的根的对称函数初等地表达, 便是在 $'V \setminus E$ 中全纯.

另外, 可清楚看出, 根 $z_n^{(\mu)}$, 从而 p_j 的系数当 $'z \to E$ 时保持有界. 因为 E 是解

析集, 故由下一章我们将证明的定理 (参看第 32 目的定理 3) 知道这些系数可全纯延拓到整个邻域 $'V$. 因为集合 A_j 连通, 则在所描述的解析延拓下得到了它的所有点, 并且 $p_j(z)=0$ 是 $\overline{A}_j$ 在 V 的处处成立的方程. 于是集合 $\overline{A}_j$ 的解析性得证, 从而整个论断得证.

这个论断不仅对超曲面成立而且对任意维的集合也成立.

定理 4. 区域 D 中的解析集 A 不可约当且仅当其正则点集 A^0 连通, 从而 A^0 在 D 中的闭连通分支是不可约的解析集.

但这个一般情形的证明是复杂的, 我们不想进行这个证明 [1]. 由这个定理得到

定理 5. 在区域 D 中的任意解析集 A 可表示为在这个区域的不可约解析集的并集.

要证明它只需考虑 A 的正则点集的连通分支并取其闭包即可: 它们是 A 的不可约分支.

* 证明, 集合 $A=\{z\in\mathbb{C}^2: z_1^3+z_1^2-z_2^2=0\}$ 不可约, 但在点 0 为可约. (提示: A 为 $\mathbb{C}$ 在 $\zeta\mapsto(\zeta^2-1,\zeta(\zeta^2-1))$ 下的像); A^0 的原像连通而 $(A\bigcap U)^0$ 不连通, 其中 $U=\{|z_1|<1, |z_2|<1\}$. *

最后, 我们要给出两个定理, 它们可以看作是单变函数的唯一性定理的推广.

定理 6. 如果区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中解析集 A 为零维, 即不具有除点以外的连通分支, 则它不可能存在 D 内部的极限点.

证明. 我们将对 n 进行归纳证明. 对 $n=1$, 因为它就等同于单变函数的唯一性定理, 故断言成立. 假设它对于 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中集合成立但对 $\mathbb{C}^n$ 中的集合不成立. 于是在 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中存在集合 A, 其满足定理中的条件却具有在 D 中的极限点 $a\in D$. 设在 a 的某个邻域中集合 A 由方程

$$f_1(z)=\cdots=f_m(z)=0 \tag{5}$$

给出. 因为它是零维的, 故当 $n>1$ 时 $m>1$. 除此而外, A 不可能包含直线 $'z='a$, 故不可能所有的函数都有 $f_j('a,z_n)\equiv 0$: 设 $f_j('a,z_n)\not\equiv 0$, 其中 $j=1,\cdots,l$ 而当 $j=l+1,\cdots,m$ 时 $f_j('a,z_m)\equiv 0$. 将 (5) 换作等价于它的方程组 $g_j(z)=0$, 其中当 $j=1,\cdots,l$ 时 $g_j=f_j$, 而当 $j>l$ 时 $g_j=f_j+f_1$, 我们于是得到 $g_j('a,z_n)\not\equiv 0$ 对所有的 j 都成立. 在这之后就可以应用预备定理并以魏尔斯特拉斯多项式的方程来局部给出 A:

$$P_1('z,z_n)=\cdots=P_m('z,z_n)=0 \tag{6}$$

[1] 参看本目前一个脚注提到的丘尔卡的书中的 48 页.

不失一般性可设 A 包含了点的序列 $('a^\nu, a_n^\nu)$, 其中的 $'a^\nu$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$ 全不相同.

考虑多项式 P_m 与复系数的线性组合 $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{m-1} P_{m-1}$ 的结式. 这是个变量为 λ_j, 系数在 $'a$ 的邻域中全纯的多项式, 按通常的写法其形式为

$$R('z, \lambda) = \sum_{k \in K} Q_k('z) \lambda^k, \tag{7}$$

其中 K 为多重指标 $k = (k_1, \cdots, k_{m-1})$ 的某个集合. 如果对固定的 $'z$ 存在点 $('z, z_n)$ 使得所有 P_j 在这个点等于 0, 于是在那些点对所有的 $\lambda \in \mathbb{C}^{m-1}$ 有 $R('z, \lambda) = 0$. 反之, 如果对某个 $'z$, 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}^{m-1}$ 结式 $R('z, \lambda) = 0$, 则存在所有多项式 $P_j('z, z_n)$ 的公共的对 z_n 的根 (事实上, 如果对多项式 $P_j('z, z_n)$ 的每个根 $z_n^{(\mu)}$ 存在一个 P_j 使得 $P_j('z, z_n^{(\mu)}) \neq 0$, 则 P_m 和线性组合 $\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_{m-1} P_{m-1}$ 对某个 λ 没有公共根, 从而在这些 λ 有 $R('z, \lambda) \neq 0$).

因此, A 在空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的投影在靠近点 $'a$ 的地方, 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}^{n-1}$ 由条件 $R('z, \lambda) = 0$ 描述, 它等价于 $Q_k('z) = 0$, 其中 $k \in K$, 即是个解析集. 这个集合满足定理的条件并以 $'a$ 为其极限点. 我们引出了与归纳假定的矛盾. □

定理 7. 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中的解析集或者具有可以任意靠近边界 ∂D 的点, 或者由有限个点组成.

证明. 我们需要证明, 区域 D 中的任意解析集 A 如果在 D 中为紧, 那么它是个有限点集. 集合 A 为属于某个多圆盘 $U^n = \{\|z\| < R\}$ 中的紧集; 我们还是用对 n 的归纳来证明这个有限性. 对于 $n = 1$, 由唯一性定理得到了论断, 从而我们假定论断对维数 $n - 1$ 为真.

以 $\pi : z \mapsto {'z}$ 表示 $\mathbb{C}^n$ 到 $\mathbb{C}^{n-1}$ 的投射; 设 $'A = \pi(A)$ 和 $'z^0$ 为 $'A$ 中任意点. 集合 A 中只有有限个点其像为 $'z^0$, 理由是 $A \bigcap \{'z = {'z^0}\}$ 是复直线上的紧解析集合, 从而为有限. 以 $z^j = ('z^0, z_n^j)$ 记这些点, 并且取它们的不相交的邻域 U_j, 其中的每个都投射成邻域 $'U \ni {'z^0}$. 这些邻域可取为如此之小, 使得它们中每一个都有

$$A \bigcap U_j = \{z \in U_j : f_1(z) = \cdots = f_m(z) = 0\}, \tag{8}$$

其中所有的 $f_\mu \in \mathscr{O}(U_j)$.

因为 A 不包含直线 $'z = {'z^0}$, 故重复在前一个定理的证明中进行的讨论, 我们能用魏尔斯特拉斯多项式的方程组 (6) 来描述 $A \bigcap U_j$, 从而确信投影 $\pi(A \bigcap U_j)$ 为 $'U$ 中的解析集.[1)] 整个集合 A 在 $'U$ 中的投影是对不同 j 的 $\pi(A \bigcap U_j)$ 的有限并集, 从而其自身也是解析集. 我们已证明了 $'A = \pi(A)$ 为解析集, 而由于由条件 $A \Subset U^n$ 得出 $'A \Subset \pi(U^n)$, 于是按归纳假定 $'A$ 为有限. 于是 A 便为有限集合. □

1) 在此我们假定了 $m > 1$; 在 $m = 1$ 的情形显然有 $\pi(A \bigcap U_j) = {'U}$ 为余维 0 的解析簇.

25. 局部结构

由余维为 1 解析集的最简单的情形即复超曲面着手. 这种集合局部地作为全纯函数的零点集合, 另外在那些在点 a 的某邻域中给出集合 A 的函数中可以挑出一个 A 在点 a 的定义函数. 这是那样的在邻域 $U \ni a$ 中的全纯函数, 它满足 1) $A \bigcap U = \{z \in U : f(z) = 0\}$ 和 2) 任何在 A 为 0 的函数 $g \in \mathscr{O}(U)$ 均被 f 除尽.

局部定义函数的存在性容易得到证明. 设 f 为某个在点 a 全纯的函数, 它在邻域 U 中给出了 A. 将 f 分解为第 23 目的乘积 (14), 在这个乘积中我们从每组相等的因子中选取在 a 的一个不可约因子, 并由它们构造一个函数 $\widetilde{f} = f_1 \cdots f_l$. 显然, 方程 $\widetilde{f}(z) = 0$ 在邻域 U 中给出了同一个集合 A, 而由第 23 目的定理 4 知任意在点 a 为全纯并在 A 为零的函数 g 必被每个不可约的因子 f_j 除尽, 从而被 $\widetilde{f}$ 除尽. 因此, $\widetilde{f}$ 是 A 在点 a 的定义函数. 同样由第 23 目的定理 4 也得出: 定义函数在差一个不为零的全纯因子下唯一确定.

由魏尔斯特拉斯预备定理可以清楚了解复超曲面的局部结构. 不失一般性假定在点 $a \in A$ 的邻域 U 中这个集合由定义函数 f 给出, 使得 $f('z, z_n) \not\equiv 0$, 几何上这意味着 A 不含有复直线 $\{'z = 'a\}$. 根据预备定理, 函数 f 可以将其换作在点 a 的魏尔斯特拉斯多项式, 另外因为 f 是定义函数, 故所有的不可约因子互不相同. 由第 23 目定理 3, 这个多项式的判别式 Δ 在邻域 U 的投影 $'U$ 中不恒等于 0, 因此, 集合 $E = \{'z \in 'U : \Delta('z) = 0\}$ 在 $'U$ 中为复超曲面或者为空.

设 $k = \deg P > 1$, 于是对任意点 $'z \in 'U \setminus E$ 方程 $P('z, z_n) = 0$ 有 k 个不同的解 $z_n^j('z)$, 而且所有这些解在不包含 E 中点 $'z$ 的邻域中保持不同和连续 (甚至全纯). 因此, 在我们的假设下集合 A 是 $'U \setminus E$ 上的 k 叶覆叠. 当 $'z$ 趋向于 E 时根 $z_n^j('z)$ 中一些会合在一起, 使得 $\pi^{-1}(E)$ 作为投射 $\pi : A \bigcap U \to 'U$ 的分歧点集, 而这个投射, 如所说的那样, 是 $'U$ 上的分歧覆叠. 如果 $k = \deg P = 1$, 则判别集合 E 为空, 而 $A \bigcap U$ 为全纯函数 $z_n = z_n('z)$ 在 $'U$ 上的图像, 即一个复流形.

这个分析指出, 在 $'U \setminus E$ 上超曲面 $A \bigcap U$ 点是正则的, 所以判别集合 E 包含了 $A \bigcap U$ 的所有临界点的投影. 但是 E 可能还包含了其他的点: 例如, 对于集合 $A = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2^2 - z_1 = 0\}$, 原点为正则点, 而它的投影 $z_1 = 0$ 与判别集合 E 相等 (当 $z_1 = 0$ 时方程 $z_2^2 - z_1 = 0$ 具有重根).

在余维 2 的解析集 $A \subset \mathbb{C}^n$ 的情形容易得到类似的结果, 这时在邻域 $U \ni a$, 它局部地由方程 $f(z) = g(z) = 0$ 给出, 其中两个函数 f 和 g 都是相应超曲面的定义函数. 选择轴 z_n 的方向使得 $f('a, z_n) \not\equiv 0$ 和 $g('a, z_n) \not\equiv 0$, 则可替换这些函数为其在点 a 的魏尔斯特拉斯多项式 P 和 Q. 于是像在第 24 目所证明的那样, 集合 A 在邻域 $'U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 中的投影 $'A = \pi_1(A)$ 由方程 $R('z) = 0$ 定义, 其中 R 为多项式 P 和 Q 的结式, 且 $R \not\equiv 0$, 因为此时有 codim $A = 1$. 于是, $'A$ 是在 $'U$ 中的超曲面, 而且由前面所述可以选取轴 z_{n-1} 的方向使得投射 $\pi_2 : 'A \bigcap 'U \to ''U \subset \mathbb{C}^{n-2}$ 是个分歧覆叠. 然而因此投射 $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : A \bigcap U \to ''U$ 是个分歧覆叠.

在一般情形中, 称在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中的解析集 A 是在区域 $G \subset \mathbb{C}^m$ 的一个分歧覆叠 (图 26) 是说, 如果存在那样的解析集 $E \subset G$ (不等于 G), 使得投射 $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ 把 A 映到 G 是逆紧的[1], 而 π 在 $A \backslash \pi^{-1}(E)$ 上的限制是在 $G \backslash E$ 上的有限重覆叠 (由此可知 $\dim A = m$). 于是在一般情形成立

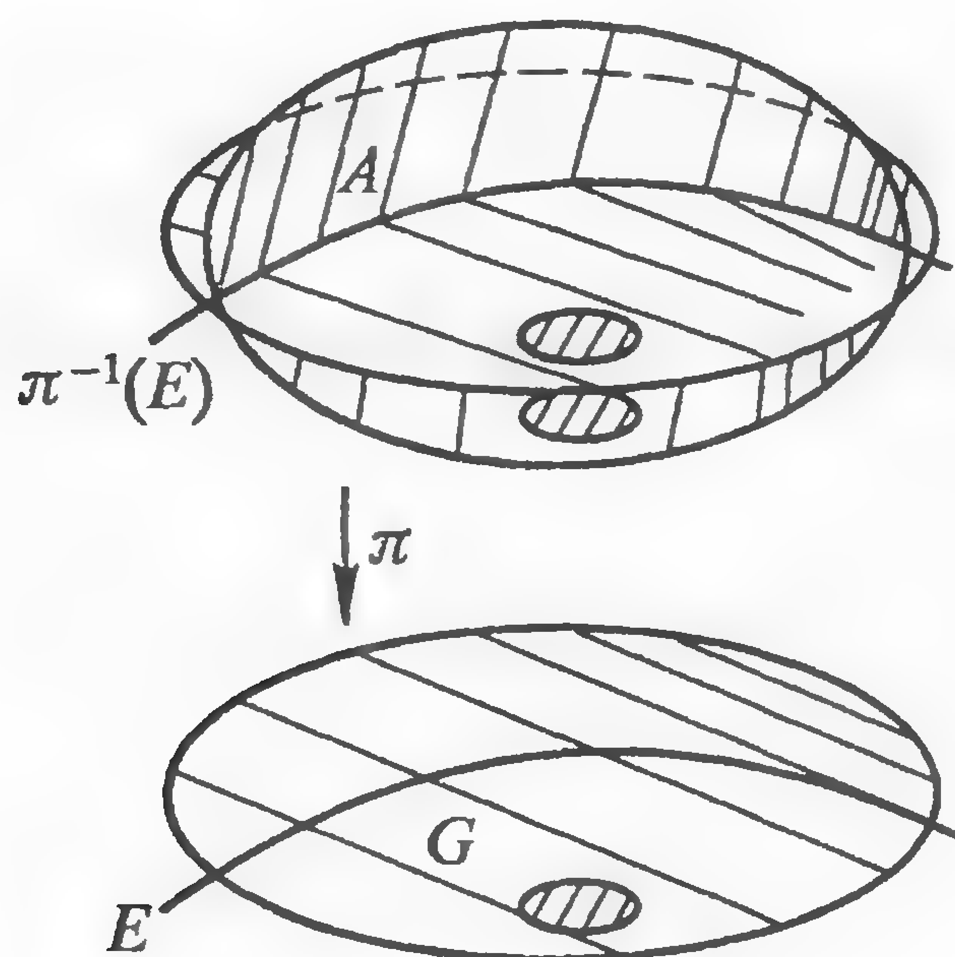


图 26

定理 1. 任意解析集 $A \subset \mathbb{C}^n$, 在它的每个点 a 的充分小的邻域 U 中, 都是在到某个子空间 $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^n$ 中 a 的投影点的一个邻域上的分歧覆叠, 其中 $m = \dim A$.

这个定理的证明相当复杂, 我们将不予证明 (参看第 24 目定理 3 前面脚注中提到的丘尔卡的书).

注. 在一般情形的定理 1 的证明的困难之一在于, 区域 D 中的解析集 A 在余维 $m > 1$ 时, 甚至局部地, 也不总是由 m 个方程给出的. 例如, 考虑在具坐标 $(z_1, z_2, z_3, w_1, w_2, w_3)$ 的空间 $\mathbb{C}^6$ 中的锥面 C, 它在坐标原点的邻域中由方程组

$$z_1 w_2 = z_2 w_1, \quad z_1 w_3 = z_3 w_1, \quad z_2 w_3 = z_3 w_2 \tag{1}$$

定义. 在 C 的点中的那些没有一个坐标为零的点上, 这些方程中的一个是另外两个的推论, 即在那里 $\operatorname{codim} C = 2$, 并且因为这样的点集在 C 中稠密, 由第 24 目关于维数的定义知道处处有 $\operatorname{codim} C = 2$. 然而在 C 上满足 $z_1 = w_1 = 0$ (或者 $z_2 = w_2 = 0$ 或者 $z_3 = w_3 = 0$) 的点中, 这些方程中的两个为平凡而第三个不是, 因此不能去掉这些方程中的任一个. (C 不能由两个方程给出的严格证明十分复杂.)

显然可见, 这样的情形只能出现在集合的临界点的邻域中: 在正则点的邻域中余维为 k 的集合局部地可由 k 个方程给出.

关于解析集 A 在其临界点 a 的邻域中的进一层的表示可由在此点的切锥 $C_a(A)$ 给出. 这个被称做切锥的是那些向量 v 的集合, 它是序列 $\lambda_j v^j$ 的极限, 其中 v^j 为连

[1]称映射 $f : D \to G$ 为逆紧的是说, 如果对任意的紧子集 $K \Subset G$, 其逆像 $f^{-1}(K)$ 为 D 中的紧子集.

接 a 和点 $z^j \in A \setminus \{a\}$ 的向量, 而 λ_j 为复数, 其中 $z^j \to a$ (从而, 如果 $v \neq 0$ 则 $\lambda_j \to \infty$). 换句话说, $C_a(A)$ 由“割线” $v^j = z^j = a$ 当 $z^j \to a$ 的极限位置组成; 如果 a 是 A 的正则点, 则 $C_a(A)$ 与切空间 $T_a(A)$ 相同. 显然, 如果 $v \in C_a(A)$, 则对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 有 $\lambda v \in C_a(A)$, 故而 $C_a(A)$ 由复直线构成, 就是说, 实际上是个顶点在 a 的锥.

对于复的超平面, 切锥的方程立刻可以写出:

定理 2. 设在点 a 的邻域中定义了复超曲面 A 的函数 f 被分解为 $z-a$ 的齐次多项式的级数

$$f(z) = \sum_{\nu=l}^{\infty} P_\nu(z-a). \tag{2}$$

于是切锥 $C_a(A)$ 的方程为

$$P_l(z-a) = 0, \tag{3}$$

其中 P_l 为展式 (2) 中最低的次的不为零的多项式.

证明. 不失一般性, 设 $a=0$. 由 (2) 并利用 P_ν 为 ν 次齐次多项式及点 $z^j \in A$, 我们得到

$$0 = f(z^j) = \frac{1}{\lambda_j^l} P_l(\lambda_j z^j) + \frac{1}{\lambda_j^{l+1}} P_{l+1}(\lambda_j z^j) + \cdots.$$

于是, 因为对任意 $v = \lim\limits_{j\to\infty} \lambda_j v^j \in C_a(A) \setminus \{a\}$, 其中有 $\lambda_j \to \infty$, 则我们最终在极限状态有 $P_l(v) = 0$.

反之, 设 $P_l(v) = 0$. 选取坐标使得 $v = (v', 0)$, 其中 $v' = (v_1, \cdots, v_{n-1})$; 因为 $P_l(v', 0) = 0$, 故 $P_l(v', z_n) = \sum\limits_{\nu=m}^{l} q_\nu(v') z_n^\nu$, 其中 $m \geqslant 1, q_m(v') \neq 0$, 从而对于固定 v' 及 $|z_n| < 1$ 有

$$\begin{aligned} |P_l(v', z_n)| &\geqslant |z_n|^m \left\{ |q_m| - \sum_{\nu=m+1}^{l} |q_\nu| |z_n|^\nu \right\} \\ &\geqslant a|z_n|^m \geqslant a|z_n|^l, \end{aligned} \tag{4}$$

其中 $a > 0$ 为某个常数. 另一方面, 如果令 $g_l(z) = \sum\limits_{\nu=l+1}^{\infty} P_\nu(z)$, 则对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $|z_n| < 1$ 有

$$|g_l(\lambda v', \lambda z_n)| = \left| \sum_{\nu=l+1}^{\infty} \lambda^\nu P_\nu(v', z_n) \right| \leqslant b|\lambda|^{l+1}. \tag{5}$$

我们把对最后一个变量的鲁歇 (Rouché) 定理应用于函数 $f = P_l + g_l$, 其中的其余变量固定: 我们取圆 $\{|z_n| = r\}$, 其中 $r^l = 2b|\lambda|/a$; 在其上, 根据 (4) 和 (5) 有

$$|P_l(\lambda v', \lambda z_n)| \geqslant a|\lambda z_n|^l = 2b|\lambda|^{l+1} > |g_l(\lambda v', \lambda z_n)|,$$

因此 $f(\lambda v', \lambda z_n)$ 在圆盘 $\{|z_n| < r\}$ 至少有一个零点 (我们有 $P_l(\lambda v', 0) = 0$). 我们现在选取序列 $\lambda_j \to 0$ 并利用我们刚刚证明过的构造序列 $z_n^j \in \{|z_n|^l < 2b|\lambda_j|/a\}$ 和收敛于 0 的点序 $z^j = (\lambda_j v', \lambda_j z_n^j) \in A$, 使得 $\lambda_j^{-1} z^j \doteq (v', z_n^j) \to (v', 0) = v$. 这表明 $v \in C_0(A)$. □

对于高余维的情形, 情况并非如此: 例如, 对于曲线 $\{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2^2 = 0, z_1 + z_3^3 = 0\}$ 在点 $z = 0$ 的切锥是直线 $\{z_1 = z_2 = 0\}$, 与此同时, 令最低次项为零的方程却给出了超平面 $\{z_1 = 0\}$. 在一般情形容易证明 (像在定理 2 中那样), 解析集 A 的切锥 $C_a(A)$ 属于包含 A 的任意一个超曲面在点 a 的切锥. 事实上, $C_a(A)$ 是所有切锥 $C_a(S)$ 的交, 其中 $S \supset A$ 为所有复超曲面 (参看前面多次提到过的丘尔卡的书的第 68 页).

那么, 如果在点 a 的邻域, 解析集 A 由方程

$$f_1(z) = \cdots = f_k(z) = 0 \tag{6}$$

给出, 则切锥 $C_a(A)$ 只属于那些由 f_j 展开式中次数最小的不为零的项所描述, 这是一组 $z - a$ 的齐次多项式:

$$P_{l_1}^1(z-a) = \cdots = P_{l_k}^k(z-a) = 0. \tag{7}$$

如果 (7) 定义了一个维数等于 $\dim_a A = m$ 的集合, 则这个方程组的确描述了 $C_a(A)$ (参看前面提到的丘尔卡的书).

我们还发现, 切锥 $C_a(A)$ 在点 a 的邻域中能很好地逼近于 A, 例如, 在 A 和 C_a 的交与球面 $\{|z-a| = r\}$ 的距离当 $r \to 0$ 时是个 $0(r)$ 这种意义下的逼近. 这个性质不难从切锥的定义得到.

§9. 纤维丛与层

在本章最后部分我们还要描述在分析中有重要作用的两个几何概念.

26. 纤维丛的概念

这个概念是覆叠概念的推广, 这里替代离散空间 E (见第 20 目中的定义) 的是去考虑任意的拓扑空间.

定义 1. 考虑由三个拓扑空间 [1]) 构成的一组对象: X (丛空间), M (底), E (纤维空间), 以及连续映射 $\pi : X \to M$ (投射). 称这一组对象为纤维丛是说, 如果对每点 $p \in M$ 存在邻域 U 及同胚 $h : \pi^{-1}(U) \to U \times E$, 使得图 27 为交换, 即对任意 $x \in \pi^{-1}(U)$ 有

$$\pi' \circ h(x) = \pi(x), \tag{1}$$

[1]) 总是设为豪斯多夫的, 并具可数的开集基.

其中 $\pi' : U \times E \to U$ 为通常的投射 ($\pi'(p, \varepsilon) = p$). 常常为简单起见, 我们就称空间 X 本身为纤维丛.

称原像 $\pi^{-1}(p) = E_p$ 为纤维丛 $\pi : X \to M$ 的*纤维* (或茎); (在固定 p 的) 映射 h 建立了 E_p 与 E 的同胚. 图表的交换性意味着 $h : \pi^{-1}(U) \to U \times E$ 是*按纤维的*, 即它保持了纤维到纤维 (参看图 27 以及在第 20 目中的讨论). 除此之外, 由我们的定义知道, 丛 X 是*局部平凡的*: 在邻域 U 的范围内 (准确到一个同胚) 它被构造成一个乘积 $U \times E$; 但在整体上, 纤维丛不必是平凡的, 即不必同胚于乘积 $M \times E$.

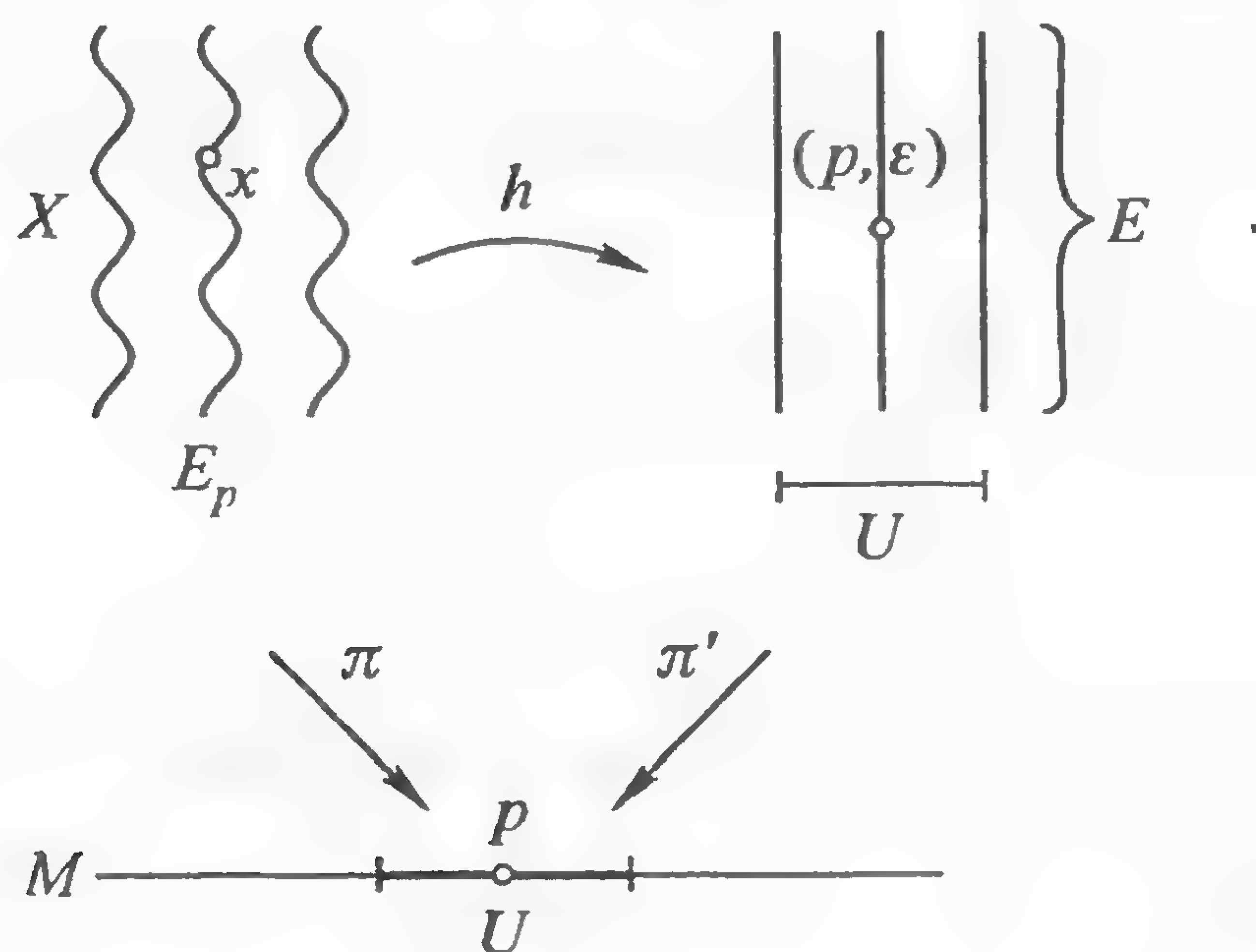


图 27

定义 2. 纤维丛 $\pi : X \to M$ 在区域 $D \subset M$ 上的一个*截影*是一个连续映射: $s : D \to X$, 使得在 D 上有

$$\pi \circ s(p) = p. \tag{2}$$

截影*局部地*总存在: 取邻域 U, 使在其上纤维丛 X 为平凡. 固定一个元 $\varepsilon \in E$, 对每一个点 $p \in U$ 我们给出元 $s_\varepsilon(p) = h^{-1}(p, \varepsilon)$. 因为 $\pi \circ s_\varepsilon(p) = \pi' \circ h(s_\varepsilon(p)) = p$ 对所有 $p \in U$ 成立, 故映射 $s_\varepsilon : U \to X$ 是 X 在 U 上的截影. 我们将从例题中看到, 整体的截影 $s : M \to X$ 对任意纤维丛并不总存在.

例题.

(1) 二维球面 S^2 的长度为 1 的切向量的集合构成一个以 S^2 为底的纤维丛, 其纤维为圆 (即在点 $p \in S^2$ 的切向量的终点). 投射 π 建立了圆上每个点到该圆中心 p 的对应. 这个丛的截影是个单位切向量的*向量场*, 即一个连续函数, 它对区域 $D \subset S^2$ 中每点给定某个单位向量. 它们在不同于 S^2 本身的球面区域上存在, 但是在整个球面上光滑的截影却不存在, 这是一个著名的定理 (按该定理, 不可能光滑地把刺猬梳平).

(2) **默比乌斯 (Möbius) 带** X 是一个矩形, 它的两条相对的边经过扭转后相叠合 (图 28). 这是个纤维丛, 其底是圆 S^1 (它是该矩形的中线, 其两端点粘合一起), 而纤维为线段, 譬如说, $I = [-1, 1]$. 投射 π 建立了线段 $p \times I$ 中每点 x 到这线段中点

p 的对应. 这个纤维丛的整体截影是连续函数 $s: S^1 \to X$. 这个纤维丛不是平凡的: 它不同胚于圆柱 $S^1 \times I$.

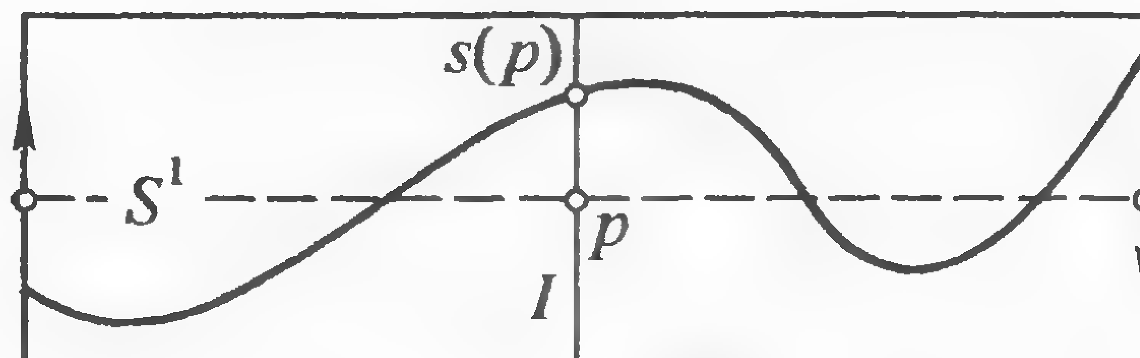


图 28

(3) 复射影空间 $\mathbb{CP}^n$ 可以看成是纤维丛 $\pi: \mathbb{C}_*^{n+1} \to \mathbb{CP}^n$ 的底空间; 投射 π 把点 $z \in \mathbb{C}_*^{n+1} = \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\}$ 对应到等价类 $[z]$, 其关系是 $z' \sim z''$, 为 $z' = \lambda z''$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}_*$. 这个纤维丛的纤维为集合 $\pi^{-1}([z]) = \{\lambda z\}$, 其中 z 为类 $[z]$ 中任一代表元, 而 λ 取遍 $\mathbb{C}_*$; 这个集合同胚于 $\mathbb{C}_*$ (去掉一点的复直线). 在区域 $U_j = \{[z] \in \mathbb{CP}^n; z_j \neq 0\}$ 这个 $\mathbb{CP}^n$ 的标准覆盖中的一个开集上, 此纤维丛为平凡: $\pi^{-1}(U_j)$ 同胚于 $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}_*$, 但整体上它不是平凡的.

正如在第 1 目中所说过的, 替代 $\mathbb{C}_*^{n+1}$ 可取单位球面 S^{2n+1}; 丛 $\pi: S^{2n+1} \to \mathbb{CP}^n$ 的纤维于是为圆 $\{|\lambda| = 1\} \subset \mathbb{C}_*$.

纤维丛的最重要的类是*光滑向量丛*, 它由下面附加的条件所刻画: 1) 该类丛的底空间 M 是光滑流形, 设 $\dim M = m$, 而纤维空间是向量空间 $\mathbb{R}^n$; 2) 丛在 M 的分图表的区域 U_α 上为平凡, 其中微分同胚 $h_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ 对任意固定的点 $p \in U_\alpha$ 是个线性空间 $V_p = \pi^{-1}(p)$ 到 $\mathbb{R}^n$ 上的同构.

如果 $\pi: V \to M$ 为向量丛, 则对具非空交 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$ 的分图表 $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ 和 (U_β, φ_β), 除了流形 M 的毗连关系 $\varphi_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ (空间 $\mathbb{R}^m$ 的区域间的微分同胚) 外, 还有映射

$$h_{\alpha\beta} = h_\beta \circ h_\alpha^{-1}, \tag{3}$$

对于固定的 $p \in U_{\alpha\beta}$, 它是空间 $\mathbb{R}^n$ 的一个同构, 即非退化的线性变换 (图 29). 对于指定的 $p \in U_{\alpha\beta}$ 和任意的向量 $v \in V_p$, 变换 (3) 可以写为

$$\xi^\beta = h_{\alpha\beta}(p)\xi^\alpha, \tag{4}$$

其中 $\xi^\alpha = h_\alpha(v), \xi^\beta = h_\beta(v)$ 为列向量, 而 $h_{\alpha\beta}(p)$ 是个非退化 $n \times n$ 矩阵. 称这样的矩阵为向量丛 V 的*转移矩阵*, 它们是在交集 $U_{\alpha\beta}$ 上定义的函数矩阵, 并且刻画了该丛的特性. 当 $n = 1$ 时的向量丛被称做*线丛*, 这时的转移矩阵的角色成了*转移函数* $h_{\alpha\beta}$, 它是 $U_{\alpha\beta}$ 上的光滑函数, 且不取零值.

任一个在 m 维流形 M 上具 n 维纤维的向量丛 V 其自身是一个 $m+n$ 维的流形. V 在区域 $U_\alpha \subset M$ 上的局部坐标可取为 (x^α, ξ^α), 其中 $x^\alpha = \varphi_\alpha(p)$ 而 $\xi^\alpha = h_\alpha(v)$ $(p \in U_\alpha, v \in V_p)$, 而毗连关系为 $\mathbb{R}^{m+n}$ 中区域间的映射 $(\varphi_{\alpha\beta}, h_{\alpha\beta})$.

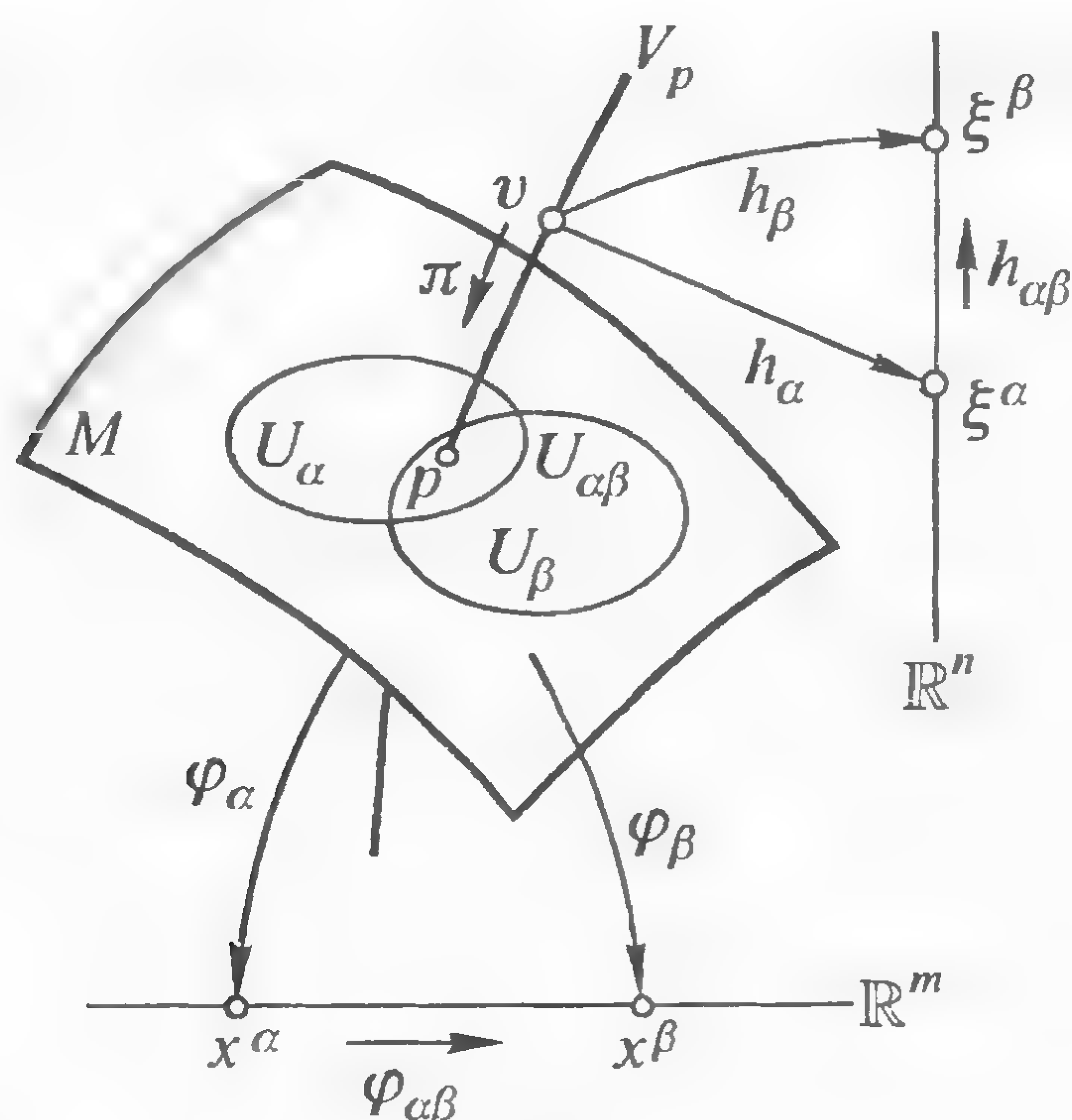


图 29

向量丛的概念可以不加改变地推广到复流形 M 上, 这里的纤维空间自然地被认为是 $\mathbb{C}^n$. 这时可以作为由全纯函数组成转移矩阵的丛来识别出全纯纤维丛的类. 对于全纯丛除连续和光滑截影外还可考虑全纯截影.

例题 (4). 我们在第 16 目曾考虑过 $\mathbb{P}^3$ 中不交复直线的族 $L_{\mathbf{E}}$, 它被复闵可夫斯基空间 M^c 中四维平面 $\mathbf{E}=\{z_{00}=\bar{z}_{11}, z_{01}=-\bar{z}_{10}\}$ 的点参数化. 这个参数化由彭罗斯变换 $p:\mathbf{E}\to L_{\mathbf{E}}$ 所实现, 使每个点 $Z\subset\mathbf{E}$ 相伴于直线 $l\in L_{\mathbf{E}}$.

$L_{\mathbf{E}}$ 中的直线由点 w 和 $\nu(w)$ 决定, 其中 ν 为反对合的, 并且 $|w_0|^2+|w_1|^2\neq 0$. 如果放弃最后的这个条件, 则它必须由 M^c 过渡到它的紧化 $\widetilde{M}^c$, 其中的点由 4×2 矩阵 $\widetilde{Z}$ 代表. 在 $\widetilde{M}^c$ 上可定义彭罗斯变换, 从而我们过渡到了族 $L_{\mathbf{E}}$ 的紧化 $L_{\widetilde{\mathbf{E}}}$. 被紧化了的族 $L_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ 是以复直线为纤维, $\widetilde{\mathbf{E}}$ 为底的丛 $\mathbb{P}^3$, 其中 $\widetilde{\mathbf{E}}$ 为平面 $\mathbf{E}$ 的紧化. 这里的投射是彭罗斯变换的逆 p^{-1}. 在第 16 目中我们只在 $\widetilde{\mathbf{E}}$ 的仿射部分上描述这个纤维丛, 然而不难在格拉斯曼流形 $G(3,1)$ 的其他属于 $\widetilde{M}^c$ 分图上描述这个丛. 丛 $L_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ 是个全纯线丛.

27. 切丛和余切丛

我们已经写出过 $\mathbb{C}^n$ 中子流形的 (实和复的) 切平面方程. 但是有一个对任意流形的切空间的一般抽象定义是有用的.

我们首先考虑实流形 M 的情形. 固定一个点 $p\in M$ 并以 $\mathscr{F}_p$ 表示在这一点的光滑实函数芽的集合 (如果 $f_1\equiv f_2$ 在 p 的某个邻域中成立, 则称 $f_1\sim f_2$; 芽即是按此关系的等价类). 我们以 I 代表线段 $[0,1]\subset\mathbb{R}$, 并在以 $\gamma(0)=p$ 为起点的光滑道路 $\gamma: I\to M$ 的集合中引进等价关系: $\gamma_1\sim\gamma_2$ 表示

$$\left.\frac{d}{dt}f\circ\gamma_1(t)\right|_{t=0}=\left.\frac{d}{dt}f\circ\gamma_2(t)\right|_{t=0}$$

对所有 $f\in\mathscr{F}_p$ 成立; 以 $\boldsymbol{\gamma}$ 表示按此关系的等价类. 可以把它几何地表示为切向量

(图 30), 更加方便地是把 $\boldsymbol{\gamma}$ 与它在芽上的作用等同起来, 即与芽沿 $\boldsymbol{\gamma}$ 方向的导数等同. 所以给出了

定义 1. 流形 M 在点 p 的**切向量**是指作用于芽 $f \in \mathscr{F}_p$ 的泛函 $v : \mathscr{F}_p \to \mathbb{R}$, 其中这个作用规则是, 对所有 $\gamma \in \boldsymbol{\gamma}$,

$$v(f) = \frac{d}{dt} f \circ \gamma(t)\Big|_{t=0}. \tag{1}$$

M 在 p 点的所有切向量的集合 $T_p(M)$ 被称做 M 在点 p 的**切空间**.

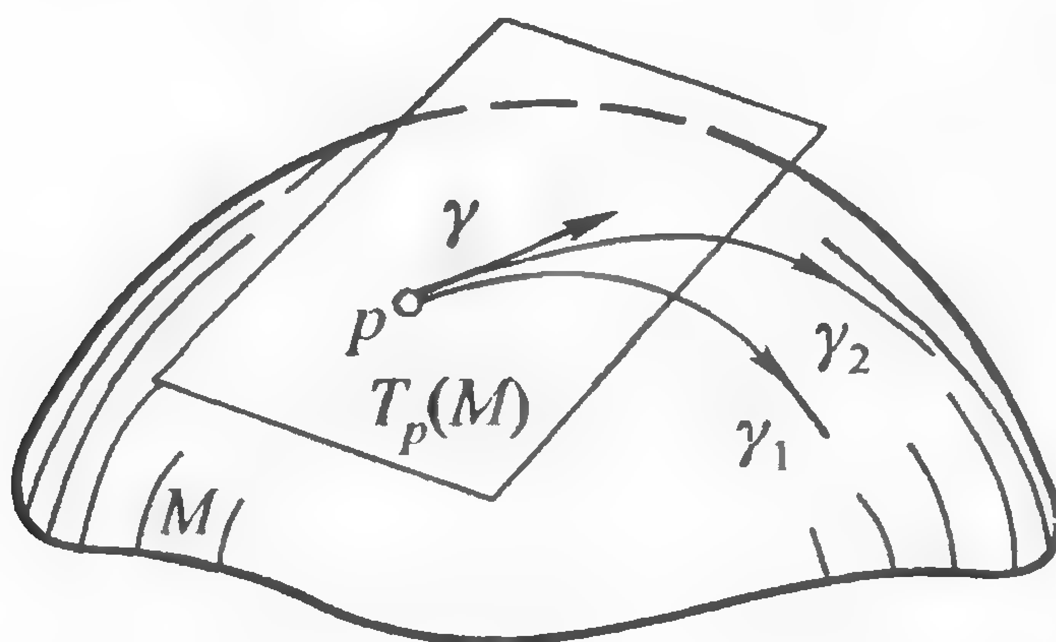


图 30

可以把空间 $T_p(M)$ 看成是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 其运算是

$$(v+w)(f) = v(f) + w(f), \quad \lambda v(f) = v(\lambda f) \tag{2}$$

(这里的 $v, w \in T_p(M), f \in \mathscr{F}_p, \lambda \in \mathbb{R}$), 而任意切向量 $v \in T_p(M)$ 有

a) 线性, 即 $v(\alpha f + \beta g) = \alpha v(f) + \beta v(g)$, 其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $f, g \in \mathscr{F}_p$ 为任意;

b) 莱布尼茨, 即 $v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g)$, 其中 $f, g \in \mathscr{F}_p$ 为任意.

M 在点 p 的邻域中固定一个局部坐标 $x = \varphi$ 下, 在空间 $T_p(M)$ 中可给出一些特殊的切向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, \cdots, n = \dim M)$, 它按规则

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}(f) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} f \circ \varphi^{-1}\Big|_{\varphi(p)} \tag{3}$$

作用于芽 $f \in \mathscr{F}_p$ 上 (像以前那样, 我们有 $x = \varphi(p)$, 而 x_ν 为 x 的坐标).

定理 1. 向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}(\nu = 1, \cdots, n)$ 构成线性空间 $T_p(M)$ 的基.

证明. a) 任意向量 $v \in T_p(M)$ 具有形式

$$v = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu} \tag{4}$$

其中 α_ν 为某些常数. 为了证明它, 我们以 p_0 替代 p, 并且不悖一般性, 假定 $\varphi(p_0) = 0$.

我们将利用如下论断, 即对任意在球 $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ 中的光滑函数 F, 存在在 B 中的光滑函数 g, 使得 $g_\nu(0) = \dfrac{\partial F}{\partial x_\nu}(0)$, 并对所有 $x \in B$ 有

$$F(x) - F(0) = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu g_\nu(x). \tag{5}$$

事实上, 由复合函数微分法则有

$$F(x) - F(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(tx) dt = \sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \int_0^1 \frac{\partial F(tx)}{\partial x_\nu} dt,$$

从而可以令 $g_\nu(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial F(tx)}{\partial x_\nu} dt.$

将 (5) 用于函数 $F(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$, 我们得到 $f \circ \varphi^{-1}(x) - f \circ \varphi^{-1}(0) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} x_\nu g_\nu(x)$, 或者

$$f(p) - f(p_0) = \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(p) g_\nu \circ \varphi(p), \tag{6}$$

其中 $g_\nu(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu} f \circ \varphi^{-1}(0) = \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}(f)$. 根据切向量的性质 a) 和 b), 由 (6) 得到

$$v(f) - v(f(p_0)) = \sum_{\nu=1}^{n} v(\varphi_\nu) g_\nu(0) + \sum_{\nu=1}^{n} \varphi_\nu(p_0) v(g_\nu \circ \varphi),$$

于是因为切向量在常量的值等于零, 故 $v(f(p_0)) = 0$, 并且除此之外, 因为 $\varphi(p_0) = 0$, 故所有 $\varphi_\nu(p_0) = 0$. 于是

$$v(f) = \sum_{\nu=1}^{n} v(\varphi_\nu) \frac{\partial}{\partial x_\nu}(f) \tag{7}$$

对所有 $f \in \mathscr{F}_p$ 成立, 我们便得到了 (4), 其中常数 $\alpha_\nu = v(\varphi_\nu)$.

b) 向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}(\nu = 1, \cdots, n)$ 为线性无关. 事实上, 由 (3) 得出 $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}(\varphi_\mu) = \delta_{\mu\nu}$ (克罗内克符号, $\mu \neq \nu$ 时为 0, 而 $\mu = \nu$ 时为 1). 故而如果 $\sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu \dfrac{\partial}{\partial x_\nu}(f) = 0$ 对所有 $f \in \mathscr{F}_p$ 成立, 则特别地设 $f = \varphi_\mu$ 时我们得到 $c_\mu = 0$ $(\mu = 1, \cdots, n)$. □

推论. $\dim T_p(M) = \dim M$.

称 $T_p(M)$ 的对偶空间 $T_p^*(M)$ 为流形 M 在点 p 的余切空间, 即 $T_p(M)$ 上所有线性函数的集合. 由 (2) 可清楚地看出, 当固定芽 f 时, $v(f)$ 是 v 的 $\mathbb{R}$– 线性函数. 称这个函数

$$v(f) = df(v) \tag{8}$$

为芽 $f \in \mathscr{F}_p$ 的微分, 余切空间 $T_p^*(M)$ 便由这些微分组成. 在新的记号下公式 (7) 可重写为

$$df(v) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\nu}(f)dx_\nu(v), \tag{9}$$

由此清楚看出, 对于固定局部坐标函数, dx_ν $(\nu = 1, \cdots, n)$ 组成了 $T_p^*(M)$ 的基; 因为 $dx_\mu\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}\right) = \delta_{\mu\nu}$, 故这组基对偶于基 (3). 显然, $\dim T_p^*(M) = \dim T_p(M)$.

现在考虑复 n 维流形 M 的情形. 把它考虑成 $2n$ 维的实流形, 并考虑在其上的实函数芽, 我们可以形式地把基向量 $\dfrac{\partial}{\partial x_\nu}, \dfrac{\partial}{\partial y_\nu}$ 变换成它们的线性组合 $\dfrac{\partial}{\partial z_\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} - i\dfrac{\partial}{\partial y_\nu}\right), \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x_\nu} + i\dfrac{\partial}{\partial y_\nu}\right)$, $\nu = 1, \cdots, n$. 于是每个切向量 $v \in T_p\ (M)$ 可以表示为形式

$$v = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\alpha_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \beta_\nu \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\right), \tag{10}$$

其中所有 $\beta_\nu = \overline{\alpha}_\nu; T_p(M)$ 的实维数等于 $2n$.

如果在该 M 上考虑光滑的复函数的芽 f, 并对它们仍用同样的公式 (1) 来定义切向量, 则代替 $T_p(M)$ 我们所得到的是在域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 $\mathfrak{T}_p(M)$, 它的复维数等于 $2n$. $\mathfrak{T}_p(M)$ 的基为切向量 $\dfrac{\partial}{\partial z_\nu}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}$ $(\nu = 1, \cdots, n)$, 而在公式 (10) 中, α_ν 和 β_ν 为任意复数, 与 $\mathfrak{T}_p(M)$ 对偶的空间 $\mathfrak{T}_p^*(M)$ 由在 $\mathfrak{T}_p(M)$ 上的复函数

$$df = \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial z_\nu} dz_\nu + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} d\overline{z}_\nu\right) \tag{11}$$

组成, 其基 $dz_\nu, d\overline{z}_\nu$ 为基 $\dfrac{\partial}{\partial z_\nu}, \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}$ 的对偶.

在复流形 M 上可自然地考虑全纯函数芽 $f \in \mathscr{O}_p$; 于是这个我们记为 $T_p^c(M)$ 的切空间的基为向量 $\dfrac{\partial}{\partial z_\nu}$ $(\nu = 1, \cdots, n)$, 而其对偶空间 (由 $\mathbb{C}-$ 线性函数组成) 的基为微分 dz_ν. 这两个空间的复维数都等于 $\dim_{\mathbb{C}} M = n$.

我们仍回到 M 为 $\mathbb{C}^n$ 的实子流形的情形, 其维数为 m, 并在点 a 的邻域 U 局部地由 $k = 2n - m$ 个方程 $\varphi_\mu(z) = 0$ 给出, 其中 $\varphi_\mu \in C^1(U)$ 为实函数, 且 $\operatorname{rank}\left(\dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial z_\nu}, \dfrac{\partial \varphi_\mu}{\partial \overline{z}_\nu}\right) = k$ (其中 $\mu = 1, \cdots, k$, 而 $\nu = 1, \cdots, n$). M 在点 a 的**实切空间**由满足 $v(\varphi_\mu) = 0$ 的向量 $v \in \mathfrak{T}_a(M)$ 组成;

$$T_a(M) = \left\{v = \sum_{\nu=1}^{n} \left(a_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \overline{a}_\nu \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\right) : v(\varphi_1) = \cdots = v(\varphi_k) = 0\right\} \tag{12}$$

(导数取在点 a). 对每个 $v \in T_a(M)$ 我们指定一个向量 $u = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu}$, 使得 $v(\varphi) = 2\mathrm{Re}\, u(\varphi)$ 对任意实函数 φ 成立, 如果容忍滥用符号, 我们则可理解实切空间为

$$T_a(M) = \left\{ u = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} : \mathrm{Re}\, u(\varphi_1) = \cdots = \mathrm{Re}\, u(\varphi_k) = 0 \right\}. \tag{13}$$

称向量 $u \in T_a(M)$ 为**复切向量**是说, 如果向量 $iu \in T_a(M)$: 在这种情形下同时有 $\mathrm{Re}\, u(\varphi_\mu) = 0$ 和 $\mathrm{Re}\, iu(\varphi_\mu) = 0$, 即 $u(\varphi_\mu) = 0, \mu = 1, \cdots, k$. 这些向量的集合

$$T_a^c(M) = \left\{ u = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial}{\partial z_\nu} : u(\varphi_1) = \cdots = u(\varphi_k) = 0 \right\} \tag{14}$$

是 M 在点 a**复切空间**.

特别地, 对于实超曲面 S, 它局部地由方程 $\varphi(z) = 0$ 给出, 其中 $\varphi \in C^1(U)$ 并且 (为了确定起见) $\frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \neq 0$, 那么空间 $T_a^c(S)$ 的基为向量

$$u_\nu = \frac{\partial \varphi}{\partial z_n}\Big|_a \frac{\partial}{\partial z_\nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\Big|_a \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \nu = 1, \cdots, n-1. \tag{15}$$

事实上, 显然 $u_\nu(\varphi) = 0$, 同时这些向量为 $\mathbb{C}-$ 线性无关, 它们的个数等于 $T_a^c(S)$ 的复维数.

迄今为止, 我们考虑了流形 M 在固定点的切空间和余切空间. 现在我们转向纤维丛, 并且为了确定起见, 局限于实流形.

定义 2. 流形 M 的**切丛**是一个向量丛, 它的空间是对所有点 $p \in M$ 的切空间的不交并

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M), \tag{16}$$

投射 $\pi : T(M) \to M$ 把每个切向量 $v \in T_p(M)$ 带到它的切点 p, 而其转移矩阵我们现定义如下:

如果对于 M 的总图表 $\{(U_\alpha, x^\alpha)\}$, 我们选取切向量 $\frac{\partial}{\partial x_\nu^\alpha}$ $(\nu = 1, \cdots, n, n = \dim M)$, 作为纤维 $T_p(M), p \in U_\alpha$ 的基, 于是在交集 $U_{\alpha\beta}$ 有

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu^\alpha} = \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial x_\mu^\beta}{\partial x_\nu^\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\mu^\beta}, \quad \nu = 1, \cdots, n$$

或者用矩阵记号为

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\beta}, \tag{17}$$

其中 $\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha} = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right)^t$, 类似地, $\dfrac{\partial}{\partial x^\beta}$ 为列向量 (t 代表转置), 而 $g_{\alpha\beta} = \left(\dfrac{\partial x_\mu^\beta}{\partial x_\nu^\alpha}\right)$ 为坐标变换 $x^\alpha \mapsto x^\beta$ 的雅可比矩阵. 矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 还是一切丛 $T(M)$ 的转移矩阵.

称在区域 $D \subset M$ 上切丛 $T(M)$ 的截影为一个*向量场*; 这是一个连续函数, 它把每个点 $p \in D$ 对应到某个切向量 $v \in T_p(M)$.

完全相似地, 可以定义*余切丛*$T^*(M)$. 它的在对偶基下的转移矩阵是雅可比矩阵 $g_{\alpha\beta}$ 的转置, 这是因为

$$dx_\nu^\alpha = \sum_{\mu=1}^n \frac{\partial x_\nu^\alpha}{\partial x_\mu^\beta} dx_\mu^\beta, \quad \nu = 1, \cdots, n. \tag{18}$$

$T^*(M)$ 的一个光滑截影是一个*一阶微分形式*, 局部地, 在坐标邻域 U_α 中它具有形式 $\omega = \sum\limits_{\nu=1}^n f_\nu^\alpha dx_\nu^\alpha$, 其中 f_ν^α 为在点 $p \in U_\alpha$ 的光滑函数. 在坐标邻域相交的连接处中截影的光滑性, 显然导出了坐标变换时微分形式的通常的变化规则.

28. 层的概念[1)]

这个概念是在纤维中引进了某种代数结构的覆叠概念的一种代数的变形; 这里所说的纤维的代数结构包括群, 环或域. 为了确定起见, 我们考虑群的情形.

定义 1. 称在拓扑空间 M (*底*) 上给出了一个*群层*是说, 如果还给出了另一个拓扑空间 $\mathscr{S}$ (*层空间*) 和一个局部同胚 $\sigma: \mathscr{S} \to M$ (*投射*), 其中每个纤维 $\mathscr{S}_p = \sigma^{-1}(P), p \in M$, 是一个群, 并且其群运算在 $\mathscr{S}$ 的拓扑下*连续*. 最后这个条件的意义是: 设 $f, g, h \in \mathscr{S}_p$, 且 $h = f + g$; 于是对点 h 的任意邻域 $\widetilde{U}_h \subset \mathscr{S}$ 在 $\mathscr{S}$ 上存在点 f 和 g 的邻域 $\widetilde{V}_f$ 和 $\widetilde{V}_g$, 它们同胚地投射到点 $p \in M$ 的同一个邻域 V_p, 使得对任意的 $q \in V_p$ 和 $f_q \in \mathscr{S}_q \bigcap \widetilde{V}_f, g_q \in \mathscr{S}_q \bigcap \widetilde{V}_g$, 有和 $f_q + g_q \in \widetilde{U}_h$.

定义 2. 层 $\sigma: \mathscr{S} \to M$ 在区域 $D \subset M$ 上的*截影*是指一个连续映射 $f: D \to \mathscr{S}$ 使得复合映射 $\sigma \circ f$ 为 D 上的恒同映射. 记层 $\mathscr{S}$ 在区域 D 上所有截影的集合为 $\Gamma(D, \mathscr{S})$ 或简单地记为 $\mathscr{S}(D)$.

由投射的局部同胚性, 在每点 $p \in M$ 的充分小的邻域中总存在截影. 另外, 如果 $\mathscr{S}(D)$ 中两个截影 f 和 g 在某个点 $p \in D$ 上重合, 则它们恒相等 (事实上, 集合 $E = \{p \in D : f(p) = g(p)\}$ 因 f 和 g 的连续性为闭, 但又因为局部地 f 和 g 是投射 σ 的逆, 它也是开的; 由于区域 D 的连通性, 故 E 或者空或者等于 D). 这个性质连

---

1) 这里的"层"与第 24 目解析集的 (分) 层的"层", 尽管中文的习惯译名相同, 但意义完全不同; 俄文和英文名词也不同. —— 译注

同定义中给出的 $\mathscr{S}$ 的拓扑下代数运算的连续性性质, 让我们把定义在纤维中的运算推广到在所给区域上的截影中[1].

我们举几个例子.

(1) 最重要的环层的例子是复流形 M 上的*全纯函数芽层* $\mathscr{O}(M)$. 这个层的空间是芽的并集

$$\mathscr{O}(M)=\bigcup_{p\in M}\mathscr{O}_p, \tag{1}$$

而其上的拓扑的定义如下: 固定任意一个芽 $\mathbf{f}_p\in\mathscr{O}(M)$ 并选取其某个代表元 (U,f). 对于每个点 $q\in U$ 以 $\mathbf{f}_q$ 表示所选取的函数 f 在点 q 的芽 $\mathbf{f}_q$, 并设点 $\mathbf{f}_p$ 的邻域为 $\widetilde{U}=\bigcup\limits_{q\in U}\mathbf{f}_q$. 像前面那样 (参看卷 I, 第 33 目的例子) 可以验证所定义的这个拓扑是豪斯多夫的; 而此空间自然是不连通的.

投射被定义为映射 $\pi:\mathscr{O}(M)\to M$, 它的每个点 $\mathbf{f}\in\mathscr{O}_p$ 对应于点 p. 由于我们在 $\mathscr{O}(M)$ 中所选取的拓扑, 这个映射在每点 $\mathbf{f}\in\mathscr{O}(M)$ 为局部同胚. 最后, 不难看出, 芽的加法和乘法运算在 $\mathscr{O}(M)$ 的拓扑中为连续. 层 $\mathscr{O}(M)$ 在区域 $D\subset M$ 上的截影是在 D 上的全纯函数. 它们的集合被记以符号 $\Gamma(D,\mathscr{O})$, 或简单地记为 $\mathscr{O}(D)$, 但只要不会出现把层的截影集合与层本身混淆的危险即可.

特别, 在空间 $\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数芽层被记为 $\mathfrak{O}^n$. 它的开的连通分支显然是 $\mathbb{C}^n$ 上的黎曼区域, 这个我们在第 22 目中谈到过的对象.

(2) 复流形 M 上的*光滑的 $(r,s)-$ 形式芽层* $\mathscr{F}^{(r,s)}(M)$, 它的定义是相似的. 称按下面关系给出的等价类为在点 $p\in M$ 的这种形式的芽: $\omega\sim\omega'$ 表示这些形式的相对应的系数在点 p 的某个邻域相等. 在所给点 p 的芽的集合 $\mathscr{F}_p^{(r,s)}$ 构成一个阿贝尔群, 其运算是按形式的系数相加. 该层空间定义为

$$\mathscr{F}^{(r,s)}(M)=\bigcup_{p\in M}\mathscr{F}_p^{(r,s)}, \tag{2}$$

其拓扑和投射完全像在层 $\mathscr{O}$ 时那样引进. 在区域 $D\subset M$ 上层 $\mathscr{F}^{(r,s)}(M)$ 的截影是双阶为 r,s 的在 D 中具光滑系数的形式. 当 $r=s=0$ 我们特别得到了 M 上的光滑函数芽层 $\mathscr{F}(M)$.

我们发现, 与 $\mathscr{O}$ 不同, 空间 $\mathscr{F}^{(r,s)}$ 的拓扑不是*豪斯多夫的*. 事实上, 例如我们取 M 上的具紧支集的光滑函数 f 并考虑在此支集的边界点上的芽 $\mathbf{f}_p$. 芽 $\mathbf{f}_p$ 与恒等于 0 的函数的芽 $\mathbf{O}_p$ 不相等, 然而它们的邻域必相交: 在 $\mathbf{f}_p$ 的任意邻域存在恒等于零的函数芽.

(3) *常值层* $\mathbb{Z},\mathbb{R},\mathbb{C}$. 设每个点 $p\in M$ 都对应于同一个对象, 譬如, 整数环 $\mathbb{Z}$. 于是我们可以说, 在 M 上给出了一个常数层并记其以同一个对象的符号 (在我们的情

[1] 设给出两个截影 $f,g\in\mathscr{S}(D)$. 我们固定一个点 $p\in D$ 并发现 $f(p)+g(p)\in\mathscr{S}_p$. 在点 $f(p)+g(p)$ 的邻域 $\widetilde{U}$ 中投射 σ 的逆是在 $\sigma(\widetilde{U})$ 中 $\mathscr{S}$ 的截影, 不难看出它被延拓为截影 $h\in\mathscr{S}(D)$. 我们令 $f+g=h$; 可以证明, 这个定义是合理的, 即不依赖于 p 点的选取.

形为 $\mathbb{Z}$). 在区域 $D \subset M$ 上这个层的截影是常值 (在我们的情形为整数).

全纯函数芽层像在分析中所考虑的其他层那样, 它在从所谓的预层的取极限的过程中自然地出现.

定义 3. 称在一个拓扑空间 M 上给出了某个代数结构的*预层*是说, 如果给出了 M 的开子集基 $\{U\}$ (即 M 中任一个开集是该基中集合的并集), 而在基的每个开集 U 上定义了一个结构 $\mathscr{S}_U$ (群, 环或域), 且对基中每对满足 $V \subset U$ 的集合 U, V, 有相伴的同态

$$\rho_{UV} : \mathscr{S}_U \to \mathscr{S}_V. \tag{3}$$

进而, 如果 $W \subset V \subset U$, 则满足可迁性条件

$$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}. \tag{4}$$

环预层的基本例子是复流形的开子集中全纯的函数组. 在这里的同态 ρ_{UV} 是环 $\mathscr{O}(U)$ 在 $\mathscr{O}(V)$ 中的嵌入同态, 它把每个函数 $f \in \mathscr{O}(U)$ 带到在集合 $V \subset U$ 上的限制.

由预层到层的极限过程在一般情形可理解为从全纯函数到它们的芽以及层 $\mathscr{O}(M)$ 的构造. 设在拓扑空间 M 上给出了某个代数结构的预层 $\{\mathscr{S}_U\}$, 固定一个点 $p \in M$ 并考虑点 p 的邻域基 $\mathscr{U}_p$. 我们取元素 $f_U \in \mathscr{S}_U$ 和 $g_V \in \mathscr{S}_V$, 其中 $U, V \in \mathscr{U}_p$, 说它们在点 p 等价是指, 如果存在点 p 的邻域 $W \subset U \bigcap V$ 使得

$$\rho_{UW}(f_U) = \rho_{VW}(g_V). \tag{5}$$

称按此关系得到的等价类的集合为 $\{\mathscr{S}_U\}$ 的*方向极限*, 并以符号

$$\mathscr{S}_p = \lim_{U \in \mathscr{U}_p} \mathscr{S}_U \tag{6}$$

记之. 在集合 $\mathscr{S}_p$ 中可自然地引进由 $\mathscr{S}_U$ 提供的代数结构 (比较在卷 I 29 目中对全纯函数芽上作用的定义).

现在令

$$\mathscr{S} = \bigcup_{p \in M} \mathscr{S}_p \tag{7}$$

可将其看成在空间 M 上的层. 为了在 $\mathscr{S}$ 中引进拓扑, 我们注意到, 对每个邻域 $U \in \mathscr{U}_p$ 可以构造映射 $\rho_{U_p} : \mathscr{S}_U \to \mathscr{S}_p$, 它把元素 $f \in \mathscr{S}_U$ 相伴于包含它的等价类 $\mathbf{f}_p \in \mathscr{S}_p$ (不难看出, ρ_{U_p} 是所考虑的代数结构的同态). 现在对每个元 $\mathbf{f} \in \mathscr{S}_p$ 及邻域 $U \in \mathscr{U}_p$ 定义集合

$$\widetilde{U}_{\mathbf{f}} = \bigcup_{q \in U} \rho_{U_q}(f) \subset \mathscr{S}.$$

对所有 $\mathbf{f}\in\mathscr{S}$ 和空间 M 的开集基的所有 U 的这种集合的全体 $\widetilde{U}_\mathbf{f}$ 可以被取作 $\mathscr{S}$ 的拓扑开集基. 为了确信这个论断: 只需证明对任意的 $\widetilde{U},\widetilde{V}\in\widetilde{\mathscr{U}}$ 在具非空交时, 对任意元素 $\mathbf{h}_p\in\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V}$, 则在 $\widetilde{\mathscr{U}}$ 中存在 $\widetilde{W}_{\mathbf{h}_p}\subset\widetilde{U}\bigcap\widetilde{V}$ 即可. 由构造知, $p\in U\bigcap V$ 和 $\mathbf{h}_p=\rho_{U_p}(f)=\rho_{V_p}(g)$, 其中各有 $f\in\mathscr{S}_U, g\in\mathscr{S}_V$. 由方向极限的定义知道, 存在开集 $W\subset U\bigcap V$, 它包含了 p 并且使得 $\rho_{UW}(f)=\rho_{VW}(g)$; 令 $h=\rho_{UW}(f)$, 我们便得到了 $\mathscr{S}_W$ 中的元素, 从而想要得到的邻域为 $\widetilde{W}_{\mathbf{h}_p}=\bigcup\limits_{q\in W}\rho_{W_q}(h)$.

最后, 投射 $\sigma:\mathscr{S}\to M$ 被定义为一个映射, 它把每个元 $\mathbf{f}\in\mathscr{S}_p$ 对应到点 p. 显然, 在所构造的 $\mathscr{S}$ 的拓扑中投射是一个局部同胚, 而代数运算是连续的.

问题

1. 对于球面 $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x|=1\}$ 构造一个由两个分图表构成的总图表. [提示: 利用球极投射 $x\mapsto\dfrac{'x}{1\pm x_n}$.]

2. 设 $a^1,\cdots,a^{2n}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的 (实) 线性无关向量, 以及 Γ 为形如 $z\mapsto z+\sum\limits_{\nu=1}^{2n}N_\nu a^\nu$ 的变换群, 其中 N_ν 为整数. 两个点 $z,z'\in\mathbb{C}^n$ 为等价是指存在变换 $\lambda\in\Gamma$ 使得 $\lambda(z)=z'$. 证明在此关系的等价类集合 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ 中可以引进 n 维复流形结构 ($\mathbb{C}^n/\Gamma$ 被称为 n 维复环面).

3. 证明, (a) 在 $\mathbb{C}^2=\mathbb{R}^4$ 中所有通过原点的实二维平面的格拉斯曼流形 G 同胚于两个二维球面的积 $S^2\times S^2$;

(b) $\mathbb{C}^2$ 中的过原点的复直线构成 G 中的球面 $S^2=\mathbb{CP}^1$.

4. 给出具双阶 (1,0) 的微分形式 $\omega'=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k dz_k$ 和 $\omega''=\sum\limits_{k=1}^{n}b_k dz_k$ 使得对应它们的向量 $a=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $b=(b_1,\cdots,b_n)$ 在欧几里得内积的意义下正交. 证明 $\omega'\wedge\omega''=0$ 仅在 $\omega'=0$ 或 $\omega''=0$ 时成立.

5. 证明, 在 $\mathbb{P}^3$ 中那些在彭罗斯变换 (第 13 目的 (12)) 下对应于 M 上一条光线上点的复直线位于 N 在对应于此光线的点上的复切平面内.

6. 证明, 在将闵可夫斯基复空间以克莱因二次曲面 (第 13 目) 表示时, 顶点为 Z^0 的复光锥变换为一个曲面, 它位于这个二次曲面和在对应于 Z^0 的点处其复切平面的交集中, 而 $\alpha-$ 和 $\beta-$ 平面变到二次曲面上的平面, 另外复光线变到复直线. [提示: 由第 13 目中的群 Γ_0 的可迁性可假定 $Z^0=0$.]

7. 用类似于第 16 目的方式以彭罗斯的方法在区域 $M^c_\pm$ 中构造已延拓到这些区域的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_0^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$$

的解.

8. 设 $'U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 为中心在 $'0$ 的多圆柱, 和 $U_n = \{|z_n| < 1\}$. 证明, 如果对任意 $'z \in 'U, f \in \mathscr{O}('U \times U_n)$ 在 U_n 中有唯一的零点 $z_n = g('z)$, 则 $g \in \mathscr{O}('U)$.

9. (a) 证明, $\mathbb{C}^n$ 中通过原点的任意 m 维复平面可以用酉变换变成变量为 $(z_1, \cdots, z_n)$ 的平面.

(b) 在标准变换 $\rho : \mathbb{C}^{n+1} \backslash \{0\} \to \mathbb{P}^n$ 下, 对应于 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中的酉变换的 $\mathbb{P}^n$ 的变换也被称做酉变换. 证明它保持富比尼 – 施图迪度量不变, 并且用这种变换可以把 $\mathbb{P}^n$ 中的超曲面变到无穷远处.

10. 证明区域 $D = \overline{\mathbb{C}} \backslash \{z_1, \cdots, z_p\}$ 的万有覆叠空间共形等价于单位圆盘, 其中 $p \geqslant 3, z_\nu$ 为任意点.

11. 证明拓扑乘积空间 $M_1 \times M_2$ 的万有覆叠同胚于这两个空间的万有覆叠的乘积 $\widetilde{M}_1 \times \widetilde{M}_2$.

12. 证明下面对第 17 目定理 1 的复类比: 如果 $\pi : \widetilde{M} \to M$ 为一个全纯覆叠, 而 $f : D \to M$ 为一全纯曲面 (平面区域 D 到 M 的映射), 则 f 可提升为全纯曲面 $\tilde{f} : D \to \widetilde{M}$, 并且在给定 $\tilde{f}(\zeta_0) \in \widetilde{M}$ 时此提升唯一.

13. 设 $l_1, \cdots, l_4$ 为 $\mathbb{CP}^2$ 中的复直线. 它们处在一般位置, l_5 为经过点 $l_1 \bigcap l_2$ 和 $l_3 \bigcap l_4$ 的一条复直线, 而 $M = \mathbb{CP}^2 \backslash \bigcup\limits_{j=1}^{5} l_j$. 证明:

(a) M 的万有覆叠双全纯等价于有界区域;

(b) 任意全纯映射 $f : \mathbb{C} \to M$ 为常值.

14. 计算解析集 $M = \{z \in \mathbb{C}^2 : e^{z_2} = (z_1 - a)(z_1 - b)\}$ 的基本群. [提示: 考虑到第一个坐标的投射.]

15. 证明, 圆锥 $\{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\} \subset \mathbb{C}^3$ 在到 $\mathbb{P}^2$ 的标准投射下对应于同胚于环面的一条复曲线.

16. 证明, "半三次抛物线" $\{z_1^2 = z_2^3\} \subset \mathbb{C}^2$ 在原点的邻域中是个拓扑流形但不是个复流形.

17. 证明, $\mathbb{C}^3$ 中的不可约解析集 $M : z_3^3 = z_1^2 + z_2^2$ 不是个复流形; 更准确地说, 不存在全纯的相互一一的映射 $f : B \to M \bigcap U$, 其中 B 为 $\mathbb{C}^2$ 中的单位球, U 为 $\mathbb{C}^3$ 中 0 的邻域.

18. $\mathbb{C}^n$ 中在 0 不可约的一维解析集, 在准确到一个坐标线性变换下, 局部地由方程组

$$z_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{(\nu)} z_1^{k/m}, \quad \nu = 2, \cdots, n$$

给出, 其中 m 为某个正整数.

19. (W. Rudin) 设 $f \in \mathscr{O}(\mathbb{C}^n)$ 为整函数, 并且对解析集 $A = \{f(z) = 0\}$ 的所有点 $z = ('z, z_n)$ 成立不等式 $|z_n| < c(1 + |'z|^m)$, 其中 c 和 m 为常数. 证明, A 是某个

多项式的零点集. [提示: 考虑积分

$$\sigma_\mu('z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r('z)} \zeta^\mu \frac{\dfrac{\partial f}{\partial z_r}('z,\zeta)}{f('z,\zeta)} d\zeta,$$

其中 $r('z) = c(1+|'z|^m), \mu = 0,1,2,\cdots$, 并利用魏尔斯特拉斯预备定理的证明方法.]

20. (V. Ya. Lin) 考虑在去掉一点的平面 $\mathbb{C}_* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$ 上的纤维丛, 其纤维空间 $E = \{(u,v) \in \mathbb{C}^2 : e^u - e^v \neq 0\}$, 而投射为 $\pi(u,v) = e^u - e^v$. 证明这个纤维丛具有连续的整体截影但没有全纯的整体截影. [提示: 用皮卡定理证明不可能有 $\mathbb{C}_*$ 中的恒等式 $e^{u(z)} - e^{v(z)} \equiv z$, 其中的 u 和 v 为全纯函数.]

21. 如果对向量丛 $\pi : x \to M$, 其纤维维数 $\dim E = m$, 存在 m 个在每点 $p \in M$ 线性无关的整体截影, 则此向量丛为平凡.

22. 设 M 为 C^k 类实流形, 其维数为 n; 证明切丛 $T(M)$ 为 $2n$ 维的 C^{k-1} 类流形.

第 III 章
解析延拓

任意的平面区域 D 都可作为全纯函数的存在性的自然区域: 总存在在 D 中全纯而不能解析延拓到区域之外的函数 (参看卷 I, 第 46 目). 与此不同, 在 $\mathbb{C}^n(n>1)$ 空间中存在有区域, 在它上的任意全纯函数必定都可以延拓到比它更大的区域中. 非对数凸的赖因哈特区域 (参看第 7 目) 可作为这种区域的例子.

本章主要致力于解析延拓问题, 特别是描述在 $\mathbb{C}^n$ 的区域的延拓, 其中的这些区域是全纯函数的存在区域. 解析延拓的主要方法是全纯函数的积分表示, 我们就从它开始.

§10. 积分表示

29. 马丁内利 – 博赫纳 (Martinelli-Bochner) 公式和勒雷 (Leray) 公式

在第 I 章中我们已知道了柯西公式

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}, \tag{1}$$

它表示了在多圆盘 $U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu|<r_\nu\}$ 全纯, 并在其闭包连续的函数 (在这里 $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}^n:|z_\nu|=r_\nu\}$ 为多圆盘的骨架, 而 $\dfrac{d\zeta}{\zeta-z}=\dfrac{d\zeta_1\wedge\cdots\wedge d\zeta_n}{(\zeta_1-z_1)\cdots(\zeta_n-z_n)}$). 这个表示非常方便, 但是只能运用到一个较窄的区域类型 (它可用显见的方式推广到平面区域的乘积上) 并且非常特殊: 公式 (1) 的积分并不是沿整个区域的边界而仅仅是

它的骨架, 即谢洛夫边界. 在这里, 我们将得到的表示是对任意具光滑边界或逐段光滑边界的有界区域成立的, 而积分是沿整个边界进行的.

为了得到它们中的第一个表示, 我们考虑在 $\mathbb{C}^n$ 中的一个双阶为 $(n, n-1)$ 的微分形式, 它在点 $z=0$ 为奇异:

$$\omega(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^{\nu-1}\overline{z}_\nu}{|z|^{2n}} d\overline{z}[\nu] \wedge dz, \tag{2}$$

其中 $d\overline{z}[\nu] = d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{\nu-1} \wedge d\overline{z}_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n$, 和通常的 $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$. 因为 $d(\overline{z}_\nu d\overline{z}[\nu]) = d\overline{z}_\nu \wedge d\overline{z}[\nu] = (-1)^{\nu-1} d\overline{z}$, 故当 $z \neq 0$ 时

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_\nu}\left(\frac{\overline{z}_\nu}{|z|^{2n}}\right) d\overline{z} \wedge dz \\ &= \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{1}{|z|^{2n}} - \frac{n\overline{z}_\nu z_\nu}{|z|^{2n+2}}\right) d\overline{z} \wedge dz = 0 \end{aligned} \tag{3}$$

(这里应用到 $\sum z_\nu \overline{z}_\nu = |z|^2$), 即这个形式在 $\mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 中为闭.

另外, 对任意球面 $S_r = \{|z| = r\}$

$$\int_{S_r} \omega = \frac{1}{r^{2n}} \int_{S_r} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \overline{z}_\nu d\overline{z}[\nu] \wedge dz,$$

而由于右端积分内的形式已经不再有奇点, 故可以应用斯托克斯公式:

$$\int_{S_r} \omega = \frac{n}{r^{2n}} \int_{B_r} d\overline{z} \wedge dz,$$

其中 $B_r = \{|z| < r\}$ 为球. 然而如果 $z_\nu = x_\nu + i x_{n+\nu}$ 则 $d\overline{z}_\nu \wedge dz_\nu = 2i dx_\nu \wedge dx_{n+\nu}$, 故 $d\overline{z} \wedge dz = (2i)^n dx$[1], 其中的 $dx = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$ 是 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的体积元. 所以可以把前面的公式重写为

$$\int_{S_r} \omega = \frac{n}{r^{2n}} (2i)^n \int_{B_r} dx = \frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} \tag{4}$$

(在这里利用了右端积分等于 $\operatorname{Vol} B_r = \pi^n r^{2n}/n!$ 的事实).

设给出了一个有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 其具分段光滑的边界 ∂D, 以及函数 $f \in \mathscr{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$; 假设 $0 \in D$. 由熟知的公式, 在点 $z \in D \backslash \{0\}$ 我们有 $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \wedge d\omega$. 然而 $df \wedge \omega = 0$, 这是因为由全纯性质知, df 只通过微分 dz_ν 表达, 而 ω 包含了全部这些微分的乘积, 由于 (3) 第二项也有 $f d\omega = 0$. 因此, 形式

[1] 为了得到这个公式, 需要在左端和右端的因子中进行对换. 我们还注意到, 在这里假设 $\mathbb{R}^{2n}$ 的正定向是使它对应于有序的 $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, 而在第 19 目中则是有序的 $dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ $(y_\nu = x_{n+\nu})$; 当 n 为奇数时这两个方向相同, 在偶数时相异.

$f\omega$ 闭于 $D\backslash\{0\}$ 并且按斯托克斯定理, 它沿 ∂D 的积分等于沿具充分小半径的球面 S_r 的积分. 再利用函数连续性以及公式 (4), 我们得到了

$$\int_{\partial D} f\omega = \int_{S_r} f\omega = f(0)\frac{(2\pi i)^n}{(n-1)!} + \alpha(r),$$

其中当 $r \to 0$ 时 $\alpha(r) \to 0$. 因为这里的左端并不依赖于 r, 故 $\alpha(r) \equiv 0$, 从而

$$f(0) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f\omega. \tag{5}$$

还要取任意点 $z \in D$ 以代替 0, 以 ζ 表示被积分的变元并替换 $\omega(z)$ 为只与 $\omega(\zeta - z)$ 相差一个数量因子的形式, 这就是所谓的马丁内利 – 博赫纳形式:

$$\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}(\overline{\zeta}_\nu - \overline{z}_\nu)}{|\zeta - z|^{2n}} d\overline{\zeta}[\nu] \wedge d\zeta. \tag{6}$$

于是公式 (5) 给出了下面的结果:

定理 1. 对任意具分段光滑边界 ∂D 的有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 和任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)\bigcap C(\overline{D})$, 则在所有点 $z \in D$ 有

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) \tag{7}$$

(马丁内利 – 博赫纳积分公式)[1)]

我们发现, 当 $n = 1$ 时形式 $\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \dfrac{\overline{\zeta} - \overline{z}}{|\zeta - z|^2} d\zeta = \dfrac{d\zeta}{\zeta - z}$, 从而马丁内利 – 博赫纳积分被约化为柯西公式. 与其相类似, 对于函数 $f \in \mathscr{O}(D)\bigcap C(\overline{D})$, 积分 (7) 在 $\overline{D}$ 外为零, 这是因为当 $z \in \mathbb{C}^n\backslash\overline{D}$, 形式 $\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z)$ 在 D 中为闭和非异, 从而由斯托克斯公式得到. 特别地, 令 $f(z) \equiv 1$, 我们得到

$$\int_{\partial D}\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \chi(z), \tag{8}$$

其中 χ 为区域 D 的特征函数, 其在 $z \in D$ 时等于 1 而在 $\overline{D}$ 外为 0. 但是与柯西核不同, 马丁内利 – 博赫纳核在 $n > 1$ 时非全纯地依赖于参数 z.

* 证明:

(1) 当 $n > 1$,

$$\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\frac{\partial g}{\partial \zeta_\nu} d\overline{\zeta}[\nu] \wedge d\zeta,$$

其中 $g(z,\zeta) = -\dfrac{1}{n-1}|\zeta - z|^{2(n-1)}$ 调和地依赖于 z, 其中 $z \neq \zeta$.

---

1)这个公式以不同方法由马丁内利在 1938 年和博赫纳于 1943 年得到.

(2) 对任意在 ∂D 上连续的函数 f, 马丁内利 – 博赫纳积分在 ∂D 外为 z 的调和函数.

(3) 对于函数 $f \in C^1(\overline{D})$ 成立下面的柯西 – 格林公式 (卷 I, 第 19 目) 的推广:

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z) - \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D}(\overline{\zeta}_\nu - \overline{z}_\nu)\frac{\partial f}{\partial\overline{\zeta}_\nu}\frac{d\overline{\zeta}\wedge d\zeta}{|\zeta - z|^{2n}}. *$$

最后, 我们指出, 马丁内利 – 博赫纳微分形式 (6) 具有 δ– 函数的性质. 事实上, 当 $z = 0$ 时 $d\omega(z) \neq 0$, 并且形式地将斯托克斯定理用于 (8) 和任意的区域 $D \ni 0$, 我们得到

$$\int_{\partial D}\omega = \int_D d\omega = 1;$$

因为当 $z \neq 0$ 时 $d\omega = 0$, 故 D 在此可以换为 $\mathbb{C}^n$. 当 $z = 0$ 时马丁内利 – 博赫纳公式也可以形式地写为

$$f(0) = \int_D d(f\omega) = \int_{\mathbb{C}^n} f d\omega$$

(我们利用了由 f 的全纯性得到 $d(f\omega) = fd\omega$). 因此, 马丁内利 – 博赫纳公式重新表现出了 δ– 函数的性质 [1]; 当 $n = 1$ 时对于柯西积分公式也同样如此.

我们转而推导出更一般的积分公式, 它是由勒雷在 1956 年发现的, 并称其为**柯西 – 凡塔皮耶 (Cauchy-Fantappiè) 公式**. 为此, 我们考虑形式

$$\delta(w) = \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}w_\nu dw[\nu],$$

$$\Omega(z, w) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\delta(w)\wedge dz}{\langle z, w\rangle^n}, \tag{9}$$

其中 $dw[\nu] = dw_1 \wedge \cdots \wedge dw_{\nu-1} \wedge dw_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge dw_n, dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ 以及

$$\langle z, w\rangle = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu = (z, \overline{w}). \tag{10}$$

当 $w = \overline{z}$ 时, 公式 Ω 显然等同于马丁内利 – 博赫纳形式:$\Omega(z, \overline{z}) = \omega_{\mathrm{MB}}(z)$. 这个形式在圆锥 $Q_0 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^{2n} : \langle z, w\rangle = 0\}$ 具有奇异性, 而在 $\mathbb{C}^{2n}\backslash Q_0$ 的点上为闭形式, 这是因为

$$d\Omega = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\left\{n\frac{dw\wedge dz}{\langle z, w\rangle^n} - \frac{n}{\langle z, w\rangle^{n+1}}\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu w_\nu dw\wedge dz\right\} = 0.$$

可直接验证: $\delta(w) = w_1^n d\left(\frac{w_2}{w_1}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{w_n}{w_1}\right)$, 一般地, 有

$$\delta(w) = (-1)^{\nu-1}w_\nu^n d\left(\frac{w_1}{w_\nu}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{w_{\nu-1}}{w_\nu}\right)\wedge d\left(\frac{w_{\nu+1}}{w_\nu}\right)\wedge\cdots\wedge d\left(\frac{w_n}{w_\nu}\right),$$

---

[1] 对任意点 z 的情形以 $\omega(\zeta - z)$ 替换 $\omega(z)$.

而由于 $\langle z,w\rangle^n = w_\nu^n\langle z,w/w_\nu\rangle^n$, 故形式 Ω 实际上并不是依赖于 w 而是依赖于 w 与它的一个坐标的比值, 即在 $\mathbb{C}^n(w)$ 中经过原点的复直线上为常值.

设函数 f 和区域 D 如上所设. 如果 $0\in D$, 则由马丁内利 – 博赫纳公式有

$$f(0)=\int_{\partial D} f(z)\Omega(z,\overline{z}). \tag{11}$$

在这里, 我们可以假定对形式 $f(z)\Omega(z,\overline{z})$ 的积分是沿着 $(2n-1)$ 维闭链 $\gamma_0=\{(z,w)\in\mathbb{C}^{2n}: z\in\partial D, w=\overline{z}\}$ 进行的, 由于当 $z\in\partial D$ 时 $\langle z,\overline{z}\rangle=|z|^2\neq 0$, 故 γ_0 与锥 Q_0 不相交. 我们的这个证明方法 [1] 基于如下命题: 在这个公式中, γ_0 可以被换为任意其他的闭链 $\gamma_1=\{(z,w)\in\mathbb{C}^{2n}: z\in\partial D, w=\lambda(z)\}$, 其中的 $\lambda:\partial D\to\mathbb{C}^n$ 是一个光滑的向量值函数, 使得 $\langle z,\lambda(z)\rangle\neq 0$ 对所有 $z\in\partial D$ 成立 (即 γ_1 与 Q_0 不相交).

为了证明此命题, 我们首先利用在上面提及的那个形式 Ω 对 w 依赖性的特点; 由这个特点知, 在不改变积分值的情形下, 闭链 γ_0 和 γ_1 可以分别换作闭链 $\gamma_0'=\{z\in\partial D, w=\overline{z}/|z|^2\}$ 和 $\gamma_1'=\{z\in\partial D, w=\lambda(z)/\langle z,\lambda(z)\rangle\}$, 它们均位于二次曲面 $Q_1=\{(z,w)\in\mathbb{C}^{2n}:\langle z,w\rangle=1\}$ 上. 在闭链 γ_0',γ_1' 上张有一个 $(2n)$ 维的膜

$$\sigma=\left\{(z,w,t)\in\mathbb{C}^{2n}\times[0,1]: w=t\frac{\lambda(z)}{\langle z,\lambda(z)\rangle}+(1-t)\frac{\overline{z}}{|z|}\right\}.$$

其中的所有点满足 $\langle z,w\rangle=1$, 故 $\sigma\in Q_1$, 从而不包含形式 Ω 的奇点; 这个膜的定向边缘是 $\gamma_1'-\gamma_0'$. 由斯托克斯公式有

$$\int_{\gamma_1'} f\Omega-\int_{\gamma_0'} f\Omega=\int_\sigma d(f\Omega)=0,$$

这是因为形式 Ω 在 Q_0 外面的闭性质以及 df 只由微分 dz_ν 表达, 而 Ω 包含了它们的乘积, 故在 σ 上 $d(f\Omega)=df\wedge\Omega+fd\Omega=0$. 因此, 在改写过的公式 (11)

$$f(0)=\int_{\gamma_0'} f(z)\Omega(z,w)$$

中, 闭链 γ_0' 可以换为 γ_1' 或者 γ_1, 从而我们得到了

$$f(0)=\int_{\partial D} f(z)\Omega(z,\lambda(z)). \tag{12}$$

就像在对马丁内利 – 博赫纳公式的推导那样, 我们在这里改变记号, 便得到了下面的结果.

---

[1]这个方法是辛钦 (G. M. Khenkin) 告诉我们的.

定理 2. 对具有逐段光滑边界的任意有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 和任意函数 $f \in \mathscr{O}(D) \bigcap C(\overline{D})$ 成立勒雷公式

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \int_{\partial D} f(\zeta)\Omega(\zeta - z, \lambda(\zeta)) \\
&= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial D} f(\zeta)\frac{\delta(\lambda(\zeta))\wedge d\zeta}{\langle \zeta - z, \lambda(\zeta)\rangle^n}.
\end{aligned} \tag{13}
$$

这里的 λ 是在 ∂D 上任意光滑的向量值函数, 使得 $\langle \zeta - z, \lambda(\zeta)\rangle \neq 0$ 对所有 $z \in D$ 和 $\zeta \in \partial D$ 成立.

这个函数各种不同选取的可能性, 即它也可以依赖于点 z, 赋予了勒雷公式特别广泛的特征. 本质上说, 这个公式包含了所有最常使用的全纯函数的积分表示.

我们来考察几个例子.

(1) 对于球 $B^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$ 可以取 $\lambda(\zeta) = \overline{\zeta}$, 这是由于 $\langle \zeta - z, \overline{\zeta}\rangle = |\zeta|^2 - \langle z, \overline{\zeta}\rangle = 1 - (z, \zeta) \neq 0$ 对于 $z \in B^n$ 和 $\zeta \in \partial B^n$ 成立 (由施瓦茨不等式 $|(z,\zeta)| \leqslant |z||\zeta| = |z| < 1$). 于是勒雷公式有形式

$$
f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int_{\partial B^n} f(\zeta)\frac{\delta(\overline{\zeta})\wedge d\zeta}{(1-(z,\zeta))^n}. \tag{14}
$$

(2) 设区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < 0\}$, 其中 $\varphi \in C^1(\overline{D})$ 及 $\nabla\varphi|_{\partial D} \neq 0$ 使得在每点 $\zeta \in \partial D$, 复切平面 $T_\zeta^c(\partial D)$ 位于 D 之外, 特别地, 这个条件为所有具光滑边缘的凸区域所满足. 在这里取 $\lambda(\zeta) = \nabla_\zeta\varphi$, 这是因为 $\langle \zeta - z, \nabla_\zeta\varphi\rangle = -(z - \zeta, \overline{\nabla_\zeta\varphi})$ 只在 $T_\zeta^c(\partial D)$ 取零值 (参看第 17 目) 从而对所有 $z \in D$ 和 $\zeta \in \partial D$ 不为零.

如果记 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_j} = \varphi_j$, 则 $\lambda = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$, 从而由公式 (9) 有

$$
\delta(\lambda) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\varphi_j d\varphi[j],
$$

而由于 $d\zeta$ 包含了全部微分 $d\zeta_\nu$ 的乘积, 于是在乘积 $\delta(\lambda)\wedge d\zeta$ 中可将所有 $d\varphi_\nu$ 换为 $\overline{\partial}\varphi_\nu$. 然而由外积的性质知

$$
\overline{\partial}\varphi[j] = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \cdots, \varphi_n)}{\partial(\overline{\zeta}_1, \cdots, \overline{\zeta}_{\nu-1}, \overline{\zeta}_{\nu+1}, \cdots, \overline{\zeta}_n)} d\overline{\zeta}[\nu]
$$

从而 $d\overline{\zeta}[\nu]\wedge d\zeta$ 在乘积 $\delta(\lambda)\wedge d\zeta$ 中的系数等于

$$
\Phi_\nu = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\varphi_j \frac{\partial(\varphi_1, \cdots, \varphi_{j-1}, \varphi_{j+1}, \cdots, \varphi_n)}{\partial(\overline{\zeta}_1, \cdots, \overline{\zeta}_{\nu-1}, \overline{\zeta}_{\nu+1}, \cdots, \overline{\zeta}_n)}.
$$

显然, 这个表达式可改写为行列式的形式

$$\Phi_\nu = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\zeta}_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{\zeta}_1} \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{\zeta}_n} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_n}{\partial \bar{\zeta}_n} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

其中对 $\bar{\zeta}_\nu$ 的导数的行被略去.

于是, 对于所考虑类型的区域 (特别地, 凸区域), 勒雷公式可写成

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\langle \nabla_\zeta \varphi, \zeta - z \rangle^n} \sum_{\nu=1}^n \Phi_\nu d\bar{\zeta}[\nu] \wedge d\zeta. \tag{16}$$

这个公式的有用的特点是它的核对 z 的全纯依赖性, 在马丁内利 – 博赫纳公式则不是如此的[1)].

* 证明, 对凸的有界区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) < 0\}$ 成立勒雷 – 格林公式, 它与 (16) 在右端的项上有所不同:

$$-\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_D \sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1} \Phi_\nu \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_\nu} \frac{d\bar{\zeta} \wedge d\zeta}{\langle \nabla_\zeta \varphi, \zeta - z \rangle^n}. \quad *$$

30. 韦伊 (Weil) 公式.

在这里我们还要推导一个公式, 其核全纯地依赖于可应用于某些特殊类型区域的参数.

定义 1. 设给出了区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 以及还有有限个函数 $W_i \in \mathscr{O}(D)$ 和平面区域 $D_i \Subset W_i(D), i = 1, \cdots, N$. 如果集合

$$\Pi = \{z \in D : W_i(z) \in D_i, \quad i = 1, \cdots, N\} \tag{1}$$

在 D 中为紧, 则称该集合为*多面体集合*.

这种集合不必是连通的; 称连通的形如 (1) 的集合为*多面体区域*. 常常考虑所有区域 D_i 为圆盘的情形; 对应的集合

$$\Pi = \{z \in D : |W_i(z)| < r_i, \quad i = 1, \cdots, N\} \tag{2}$$

被称为*解析多面体*. 如果所有函数 W_i 为多项式, 则称 (2) 为*多项式多面体*.

在 $N = n$ 和所有 $W_i(z) = z_i$ 的特殊情形, 多面体区域是多圆形, 而多面体则为多圆盘.

1) 我们注意到, 不管向量值函数 λ 依赖还是不全纯依赖于 z, 公式 (13) 中的核都全纯依赖于 z.

定义 2. 称多面体集合 (1) 为韦伊集是说, 如果 $N \geqslant n$, 并且

1) 所有它的面

$$\sigma_i = \{z \in D : W_i(z) \in \partial D_i, W_j(z) \in \overline{D}_j, j \neq i\} \tag{3}$$

是 $(2n-1)$ 维流形;

2) 任意 k 个不同的面 $(2 \leqslant k \leqslant n)$ 的交, 即韦伊集的边, 其维数不大于 $2n-k$.

称韦伊集的 n 维边

$$\sigma_{i_1\cdots i_n} = \sigma_{i_1} \bigcap \cdots \bigcap \sigma_{i_n} \tag{4}$$

的集合为其骨架. 称连通的韦伊集为韦伊区域.

为了得到在韦伊区域中全纯函数的积分表示, 我们需要定义在这些区域中函数 W_i 的一个特殊展开式. 这个展式的可能性由下面的定理得以保证.

赫费尔 (Hefer) 定理. 对任意函数 $W_i \subset \mathscr{O}(D)$, 其中 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯区域, 则存在 n 个函数 $P_\nu^i(\zeta, z) \in \mathscr{O}(D \times D)$ $(\nu = 1, \cdots, n)$ 使得对所有点 $\zeta, z \in D$ 成立等式

$$W_i(\zeta) - W_i(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu) P_\nu^i(\zeta, z). \tag{5}$$

在一般情形下赫费尔定理不是个初等的定理 [1], 我们将在第 50 目中证明它. 在这里我们只需注意到, 对于多项式, 恒等式 (5) 可以经过简单的重新安排函数 W_i 在点 z 的泰勒展式得到, 在这里的赫费尔展式的系数 P_ν^i 也是多项式.

定理 1 (A. 韦伊). 设 Π 为韦伊区域 (1), 它由具光滑边界的区域 D_i 定义. 于是任意函数 $f \in \mathscr{O}(\Pi) \bigcap C(\overline{\Pi})$ 在任意点 $z \in \Pi$ 可以用下面公式表示:

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1\cdots i_n}{}' \int_{\sigma_{i_1\cdots i_n}} \frac{f(\zeta)}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} \{W_{i_\nu}(\zeta) - W_{i_\nu}(z)\}} \begin{vmatrix} P_1^{i_1} & \cdots & P_n^{i_1} \\ & \cdots\cdots & \\ P_1^{i_n} & \cdots & P_n^{i_n} \end{vmatrix} d\zeta, \tag{6}$$

其中的和取遍所有有序指标组 $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant N)$, 它定义了区域的骨架的边, P_ν^i 为对 W_i 的赫费尔系数, 并且 $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n$; 这些边由使所有 ∂D_i 以正向通过的方式定义.

在 Π 为多圆形区域 $(N = n, W_i \equiv z_i, i = 1, \cdots, N)$ 情形, 骨架 Γ 由一条边 $\sigma_{1\cdots n}$ 组成 (它与第 2 目中的骨架的意思一致) 并且 (6) 中的和也只有一项. 赫费尔系数 P_ν^i 在这种情形下, 当 $i = \nu$ 时等于 1, 当 $i \neq \nu$ 时等于 0, 即在韦伊公式中的行列式等于 1, 从而此公式为

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(\zeta) d\zeta}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu)}. \tag{7}$$

---

[1] 赫费尔定理被证于 1942 年, 而韦伊公式 (6) 则是在他 1935 年的著作中被推导出的.

这样一来, 韦伊公式推广了对于在多圆形区域上的柯西积分式到韦伊区域上. 像柯西公式那样, 它的核对变量 ζ 和 z 为全纯.

为了缩短形式的计算, 我们将在 $n=2$ 和 $f \in \mathscr{O}(\overline{\Pi})$ 的情形下进行韦伊定理的证明 [1].

证明. 我们从马丁内利 – 博赫纳公式在 $\mathbb{C}^2$ 中韦伊区域上的情形开始着手, 这时它的形式为

$$f(z)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{i=1}^{N}\int_{\sigma_i} f(\zeta)\frac{(\overline{\zeta}_1-\overline{z}_1)d\overline{\zeta}_2-(\overline{\zeta}_2-\overline{z}_2)d\overline{\zeta}_1}{|\zeta-z|^4}\wedge d\zeta, \tag{8}$$

其中 σ_i 为区域 Π 的面. 得出韦伊公式的想法在于: 我们试图将斯托克斯公式应用于 (8) 使得非全纯微分 $d\overline{\zeta}_\nu$ 化零, 而替代在面 σ_i 的是沿骨架的边 σ_{ij} 的积分; 这时支现核的非全纯部分 (变量 $\overline{\zeta}_\nu-\overline{z}_\nu$ 和 $|\zeta-z|$) 也消去. 赫费尔展式 (5) 在此变换中起着至关重要的作用.

首先我们注意到 (8) 中的被积形式 $\omega(\zeta,z)$ 为恰当形式; 它是下面 N 个形式中任一个的微分:

$$\Omega_i(\zeta,z)=\frac{1}{|\zeta-z|^2\{W_i(\zeta)-W_i(z)\}}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i \\ \overline{\zeta}_1-\overline{z}_1 & \overline{\zeta}_2-\overline{z}_2\end{vmatrix} d\zeta. \tag{9}$$

我们通过直接计算验证这个论断; 为简单起见, 记 $z=0, W_i=W_i(\zeta)-W_i(0)$:

$$\begin{aligned}
d\Omega_i &= \frac{1}{W_i}\left\{-\frac{\zeta_1 d\overline{\zeta}_1+\zeta_2 d\overline{\zeta}_2}{|\zeta|^4}(P_1^i\overline{\zeta}_2-P_2^i\overline{\zeta}_1)+\frac{1}{|\zeta|^2}(P_1^i d\overline{\zeta}_2-P_2^i d\overline{\zeta}_1)\right\}\wedge d\zeta\\
&= \frac{1}{W_i|\zeta|^4}\{-(\zeta_1 d\overline{\zeta}_1+\zeta_2 d\overline{\zeta}_2)(P_1^i\overline{\zeta}_2-P_2^i\overline{\zeta}_1)+\\
&\quad (\zeta_1\overline{\zeta}_1+\zeta_2\overline{\zeta}_2)(P_1^i d\overline{\zeta}_2-P_2^i d\overline{\zeta}_1)\}\wedge d\zeta\\
&= \frac{1}{W_i|\zeta|^4}(\overline{\zeta}_1 d\overline{\zeta}_2-\overline{\zeta}_2 d\overline{\zeta}_1)(\zeta_1 P_1^i+\zeta_2 P_2^i)\wedge d\zeta\\
&= \frac{1}{|\zeta|^4}(\overline{\zeta}_1 d\overline{\zeta}_2-\overline{\zeta}_2 d\overline{\zeta}_1)\wedge d\zeta,
\end{aligned}$$

论断得证.

我们还注意到当 $z\in\Pi, \zeta\in\sigma_i$ 时只有差 $W_i(\zeta)-W_i(z)$ 不为零 (因为 $W_i(\zeta)\in \partial D_i, W_i(z)\in D_i$), 而所有其他的差则在某些点化零. 故而当 $z\in\Pi, \zeta\in\sigma_i$ 时只有形式 Ω_i 非异, 而所有其他的形式 $\Omega_j, j\neq i$ 为奇异, 从而在沿面 σ_i 取积分时, 只能这样

[1]完全的论证可参看弗拉基米尔 (V. S. Vladimirov) 的《多复变函数论》(M.: Наука, 1964, 248—252)

地应用斯托克斯公式:

$$\int_{\sigma_i} f(\zeta)\omega(\zeta,z) = \int_{\sigma_i} d\{f(\zeta)\Omega_i(\zeta,z)\} = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\int_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\Omega_i(\zeta,z)$$

(我们在那里利用了全纯函数 f 可以放在形式 Ω_i 的微分符号之内).

如果像公式 (8) 所要求的那样, 把这些积分加在一起, 则每条边 σ_{ij} 会出现两次但具有相反的定向 (由边缘 σ_i 和 σ_j 的面得到). 所以我们有

$$\sum_{i=1}^{N}\int_{\sigma_i} f(\zeta)\omega(\zeta,z) = \sum_{i,j=1}^{N}{}'\int_{\sigma_{ij}} f(\zeta)\{\Omega_i(\zeta,z)-\Omega_j(\zeta,z)\},$$

其中取和是按有序偶对指标进行的 $(1\leqslant i<j\leqslant N)$.

还要注意, 在相减时, 核 (9) 的非解析部分已消去:

$$\Omega_i-\Omega_j = \frac{1}{|\zeta|^2}\frac{|\zeta_1|^2+|\zeta_2|^2}{W_iW_j}(P_1^iP_2^i-P_1^jP_2^j)d\zeta = \frac{1}{W_iW_j}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i\\ P_1^j & P_2^j\end{vmatrix}d\zeta$$

(我们再次使用到上面提到的记号的简化以及赫费尔展式). 于是我们得到了公式

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^2}\sum_{i,j=1}^{N}{}'\frac{f(\zeta)}{\{W_i(\zeta)-W_i(z)\}\{W_j(\zeta)-W_j(z)\}}\begin{vmatrix} P_1^i & P_2^i\\ P_1^j & P_2^j\end{vmatrix}d\zeta, \tag{10}$$

它即等于 $n=2$ 时的韦伊公式. □

注. 如果韦伊集 (1) 不连通, 则它被分解为最多可数个连通分支 (韦伊区域). 显然定理 1 在 Π 为不连通的韦伊集的情况下仍然有效. 在这种情形下, 对于属于某个分支的 z, 在韦伊公式 (6) 中不为零的只有沿此分支的骨架的积分, 而沿其他分支的骨架的积分则化为零. 这来自那样的事实, 即那个推导出韦伊积分的马丁内利 – 博赫纳积分在该区域外为零.

韦伊公式的核的全纯性被应用到, 例如, 由某类全纯函数的逼近问题. 我们来推导与此相关的基本事实.

定理 2. 任意全纯于解析多面体 (2) 和在其闭包上连续的函数 f, 可以在此多面体内展开为级数

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty}\sum_{(i)}{}' A_k^i[W_i(z)]^k, \tag{11}$$

其中 $k=(k_1,\cdots,k_n), i=(i_1,\cdots,i_n)$ 为向量指标, $[W_i(z)]^k=[W_{i_1}(z)]^{k_1}\cdots[W_{i_n}(z)]^{k_n}$, 里层的和是按有序组 $1\leqslant i_1<\cdots<i_n\leqslant N$ 取的, 系数则由公式

$$A_k^i=\frac{1}{(2\pi i)^n}\int_{\sigma_{i_1}\cdots\sigma_{i_n}}\frac{f(\zeta)}{[W_{i_1}(\zeta)]^{k_1+1}\cdots[W_{i_n}(\zeta)]^{k_n+1}}\begin{vmatrix}P_1^{i_1} & \cdots & P_n^{i_1}\\ & \cdots\cdots & \\ P_1^{i_n} & \cdots & P_n^{i_n}\end{vmatrix}d\zeta \qquad (12)$$

且级数 (11) 在该多面体的任意紧子集上一致收敛.

证明. 由韦伊公式得出展式 (11) 的方式完全像从柯西积分公式得到泰勒展式那样. 对任意点 $z\in\Pi$ 及 Π 的骨架上任意点 ζ 可以写出下面按几何级数的展开式

$$\frac{1}{\prod\limits_{\nu=1}^{n}[W_{i_\nu}(\zeta)-W_{i_\nu}(z)]}=\sum_{k_1,\cdots,k_n=0}^{\infty}\frac{[W_{i_1}(z)]^{k_1}\cdots[W_{i_n}(z)]^{k_n}}{[W_{i_1}(\zeta)]^{k_1+1}\cdots[W_{i_n}(\zeta)]^{k_n+1}}$$

$$=\sum_{|k|=0}^{\infty}\frac{[W_i(z)]^k}{[W_i(z)]^{k+1}}.$$

在固定 $z\in\Pi$ 时, 这个展开式在 $\sigma_{i_1\cdots i_n}$ 上对 ζ 一致收敛, 并且将其代入韦伊公式 (6) 我们便得到了具系数 (12) 的展式 (11).

级数 (11) 在多面体 Π 的紧子集上的一致收敛性由通常的方式即可加以证明. □

推论 1. 任意在解析多面体 Π 中全纯的函数 f, 在任意集合 $K\Subset\Pi$ 上可以被在区域 D 上全纯的函数作任意精确的逼近, 其中的区域 D 是在多面体的定义中所涉及的那个.

这个推论简单地说可以叙述为: 函数族 $\mathscr{O}(D)$ 稠于族 $\mathscr{O}(\Pi)$.

证明. 级数 (11) 的部分显然属于 $\mathscr{O}(D)$, 它们逼近于函数 $f\in\mathscr{O}(\overline{\Pi})$. 为了避免 f 在 $\overline{\Pi}$ 上为连续这个条件. 以多面体 $\Pi'=\{z\in\Pi:|W_i(z)|<r_i'\}$ 代替 Π, 其中的 $r_i'<r_i$ 且充分靠近 r_i (i 为数值指标). □

特别, 当 Π 为多项式的多面体 (即所有函数 W_i 为多项式) 时, 级数 (11) 的部分和为多项式. 我们于是有

推论 2. 任意在多项式多面体 Π 中全纯的函数 f 在任意集合 $K\Subset\Pi$ 上可以被多项式以任意精确度逼近.

$\mathbb{C}^n$ 中的那种区域, 其紧子集上的任意全纯函数可被多项式以任意精确度逼近, 则称其为*龙格* (Runge) *区域* (比较卷 I 第 23 目的龙格定理). 推论 2 可叙述为: *任意多项式多面体是龙格区域.*

§11. 延拓定理

考虑几个关于函数的全纯延拓的定理, 它们反映了高维情形的特点.

31. 从边界的延拓

这些定理的第一个断言, 在 $n>1$ 的 $\mathbb{C}^n$ 中, 每个在一个区域的边界上按某种意义为全纯的函数必定可以全纯地延拓到整个区域. 在边界上全纯性的准确意思是说, 函数在它上面满足所谓的柯西 – 黎曼切方程. 这些方程在分析和应用中起着很大的作用, 故而我们将更仔细地关注它们.

考虑在 $\mathbb{C}^n$ 中的实超曲面 S, 它在邻域 $U\supset S$ 中由方程 $\varphi(z)=0$ 给出, 其中 $\varphi\in C^1(U)$, 并且在 U 中梯度 $\nabla\varphi\neq 0$. 设在 U 中给出了一个复函数 f, 其为 C^1 类. 它的微分 $\overline{\partial}f=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\dfrac{\partial f}{\partial\overline{z}_\nu}d\overline{z}_\nu$ 在点 $\zeta\in S$ 分成了两项, 其中一个为 $\overline{\partial}_N f=\lambda\overline{\partial}\varphi$ $(\lambda\in\mathbb{C})$, 指向 S 在该点的复法线, 而另一个 $\overline{\partial}_T f=\overline{\partial}f-\overline{\partial}_N f$, 指向与此法线复正交的方向 [1]. 分别称 $\overline{\partial}_N f$ 和 $\overline{\partial}_T f$ 为 $\overline{\partial}f$ 的*法分量*和*切分量*, 而称算子 $\overline{\partial}_T$ 为*柯西 – 黎曼切向算子*. 这个算子是由柯恩 (J. J. Kohn) 在 1965 年引进的.

定义. 设 S 为 $\mathbb{C}^n$ 中实超平面, U 为上面所说的那个邻域. 如果在每点 $\zeta\in S$ 有

$$\overline{\partial}_T f\equiv 0 \tag{1}$$

则称函数 $f\in C^1(U)$ 在 S 上满足*柯西 – 黎曼切条件*, 或者简单地说是 S 上的 CR – 函数.

我们将证明这个定义的合理性, 它的意思是说在函数 f 上的切向算子 $\overline{\partial}_T$ 只由其在 S 上的值决定而不依赖于它到邻域 U 中 C^1– 延拓的方式. 为了证明这点, 需要下面类似魏尔斯特拉斯除法定理的引理.

引理. 如果在区域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 中函数 $\varphi\in C^k, k\geqslant 1$, 以及 $\nabla\varphi=\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1},\cdots,\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$ $\neq 0$, 而函数 $\psi\in C^k(U)$ 在 $\varphi=0$ 处处处为零, 则存在函数 $h\in C^{k-1}(U)$ 使得 $\psi(x)=h(x)\varphi(x)$ 对所有 $x\in U$ 成立.

证明. 由于论断的局部性, 可以假定点 $0\in S$ 的邻域 U 为充分小的凸集. 因为在 U 上 $\nabla\varphi\neq 0$, 故不失一般性, 设在此处 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_n}\neq 0$ 且方程 $\varphi(x)=0$ 可解出为 $x_n=\varphi_1('x)$, 其中 $'x=(x_1,\cdots,x_{n-1})$. 在变量的同胚变换 $'x\mapsto' x, x_n\mapsto x_n-\varphi('x)$ 下将 C^k 的情形变到了 $\varphi(x)\equiv x_n$ 和 $\psi\in C^k(U)$ 使得 $\psi('x,0)=0$. 由显见的对所有

[1] 我们记得 (参看第 17 目), 复法线 $n_\zeta(S)$ 定义为复直线 $\{z-\zeta=\lambda\overline{\nabla_\zeta\varphi},\lambda\in\mathbb{C}\}$, 而与其复正交的方向构成复切平面 $T^c_\zeta=\{(z-\zeta,\overline{\nabla_\zeta\varphi})=0\}$; 这里我们将余向量 $\sum a_\nu d\overline{z}_\nu$ 与向量 $a=(a_\nu)$ 等同.

$x \in U$ 成立的等式

$$\psi(x) = x_n \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_n} \psi('x_1, tx_n) dt$$

可以看出, 可以取在这里出现的积分当作函数 h; 它显然属于 $C^{k-1}(U)$[1]. □

设 F 和 G 是函数 f 在区域 U 中的延拓, 其中的 f 只在 S 上给出. 因为 $F-G$ 在 S 上为零, 故由引理有 $F-G=h\varphi$, 其中 $h \in C^0(U)$. 那么在 S 的点上我们有 [2]

$$\overline{\partial} F - \overline{\partial} G = h \overline{\partial} \varphi,$$

而因为 $h\overline{\partial}\varphi$ 指向 S 的复法线, 故 $\overline{\partial}_T F - \overline{\partial}_T G = 0$. 故在 S 上必定有 $\overline{\partial}_T F = \overline{\partial}_T G$, 从而 $\overline{\partial}_T$ 对于函数 f 在 S 之外的延拓的无关性得证.

在应用中利用柯西 – 黎曼切条件的各种不同形式是方便的. 我们在这里推导出其中几个.

定理 1. 柯西 – 黎曼切条件(1) 等价于下列条件中的任一个: 在任意点 $\zeta \in S$

a) $\overline{\partial} f \wedge \overline{\partial} \varphi = 0$,

b) $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{u}} = 0$ 对任意复切方向 $u \in T_\zeta^c(S)$ 成立,

c) $df \wedge dz = 0$, 其中 $dz = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$.

证明. 由 (1) 知 $\overline{\partial} f = \lambda \overline{\partial} \varphi$, 而因为 $\lambda \overline{\partial}\varphi \wedge \overline{\partial}\varphi = 0$ 故 a) 成立. 反之, 如果 a) 成立, 则

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_\nu} - \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_\mu} = 0$$

对所有 $\mu, \nu = 1, \cdots, n$ 成立, 从而 $\overline{\partial} f = \lambda \overline{\partial} \varphi$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为某个复数, 即满足 (1).

为了证明第二个等价关系, 我们设 $\zeta = 0$. 如果选取坐标使得 $T_0^c(S) = \{z_n = 0\}$, 则法分量 $\overline{\partial}_N f = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}_n} d\overline{z}_n$, 而切分量

$$\overline{\partial}_T f = \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} d\overline{z}_\nu. \tag{2}$$

因为向量 $\dfrac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial z_{n-1}}$ 构成 $T_0^c(S)$ 的基, 故考虑到 (2) 方程 (1) 等价于方程组

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu} = 0, \quad \nu = 1, \cdots, n-1, \tag{3}$$

---

[1] 显然, 在 $\varphi(x) \neq 0$ 的地方函数 $h(x) = \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)} \in C^k$; 故在集合 $\{\varphi(x) = 0\}$ 上 h 的光滑性可能降低 1, 这可由下面的函数表明: $\varphi(x) = x_n, \psi(x) = x_n + x_n^2 \sin \dfrac{1}{x_n}$.

[2] 这不是从乘积的微分公式得到的 (因为只有 $h \in C^0$, 故不能应用), 而是直接由 $h\varphi$ 在 S 上的偏导数的定义得到.

而这个方程组就是条件 b).

最后, 如果选取坐标使得实切平面为 $T_0(S)=\{\operatorname{Im} z_n=0\}$, 故在其上有 $dz_n=d\overline{z}_n$. 如前面知 $T_0^c(S)=\{z_n=0\}$, 故而 $\overline{\partial}_T f$ 由公式 (2) 表达. 因为 dz 是所有 dz_ν 的乘积, 故在条件 c) 中形式 df 可以换作 $\overline{\partial} f$, 另外由于 $dz_n=d\overline{z}_n$, 在 $\overline{\partial} f$ 的表达式中最后一项, 即 $\overline{\partial}_n f$ 可以舍去:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}d\overline{z}_\nu\wedge dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n=0.$$

因为微分 $d\overline{z}_1,\cdots,d\overline{z}_{n-1},dz_1,\cdots,dz_n$ 在 $T_0(S)$ 上的无关性, 这个等式等价于方程组 (3), 即条件 b). □

对于应用而言, 形式 b) 特别方便. 如果超曲面 S 由方程 $\varphi(z)=0$ 给出, 则在它的 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_n}\neq 0$ 的点上, 复切平面的基可以取作向量

$$u_\nu=\frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\frac{\partial}{\partial z_\nu}-\frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\frac{\partial}{\partial z_\nu},\quad \nu=1,\cdots,n-1 \tag{4}$$

(参看第 27 目), 故在这种情形 S 上的柯西 – 黎曼切条件可改写为

$$\overline{u}_\nu(f)=\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}_n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}-\frac{\partial\varphi}{\partial \overline{z}_\nu}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_n}=0,\quad \nu=1,\cdots,n-1. \tag{5}$$

例题.

(1) 对于球面 $\{z\in\mathbb{C}^n:|z|=1\}$, 函数 $\varphi(z)=\sum z_\nu\overline{z}_\nu-1$, 故而在 $z_n\neq 0$ 的点柯西 – 黎曼切向方程为

$$z_n\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}=z_\nu\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_n},\quad \nu=1,\cdots,n-1.$$

(2) 对于庞加莱球面 $\{z\in\mathbb{C}^n: y_n=|'z|^2\}$(参看卷 I 的问题 18), 函数 $\varphi(z)=\dfrac{z_n-\overline{z}_n}{2i}-\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}z_\nu\overline{z}_\nu$, 故在其所有点柯西 – 黎曼切条件可写成

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_\nu}=2iz_\nu\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_n},\quad \nu=1,\cdots,n-1.$$

我们特别留意 $n=2$ 的情形; 如果此时令 $z_1=z, z_2=t+i\tau$, 则此球面的方程为 $\tau=|z|^2$.τ 的值由量 z 确定, 故而在球面上的独立坐标为 z 和 t. 因为

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+i\frac{\partial}{\partial \tau}\right),$$

而当 $z_1=z$ 固定及 $\tau=$ 常数时, 则有 $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}_2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial t}$ 以及唯一的柯西 – 黎曼切向方程有形式

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=iz\frac{\partial f}{\partial t}.$$

这是在偏微分方程论中著名的卢伊 (H. Lewy) 方程 (1956 年).

当 $n=1$ 时, 不存在复切方向从而柯西 – 黎曼切向方程的概念失去了意义. 因此现在这目所致力的下面定理具有高维情形的特点. 它被博赫纳和塞韦里 (Severi) 在 1943 年分别独立证明.

定理 2. 设在 $\mathbb{C}^n, n>1$ 中给出了一个有界区域 D, 其边界 $S=\partial D$ 光滑并且其补集为连通. 如果函数 $f\in C^1(S)$ 在 S 的所有点上满足柯西 – 黎曼切向方程, 则它可以延拓到区域 D 里, 为 D 中的全纯函数并在 $\overline{D}$ 上连续.

证明. 在所采取的假设下这个延拓可以由马丁内利 – 博赫纳积分实现:

$$\widetilde{f}(z)=\int_S f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z), \tag{6}$$

并且它完全被 f 在 S 上的值所决定. 为了证明此论断我们还需要形式 ω_{MB} 的某些性质.

首先我们注意到, 当 z 固定, 而点 ζ 满足 $\zeta_1\neq z_1$ 时形式 $\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z)$ 为微分形式 (对于变量 ζ 的)

$$\Omega_1(\zeta-z)=\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^\nu}{|\zeta-z|^{2n-2}}\frac{\overline{\zeta}_\nu-\overline{z}_\nu}{\zeta_1-z_1}d\overline{\zeta}[1,\nu]\wedge d\zeta, \tag{7}$$

其中 $d\overline{\zeta}[1,\nu]=d\overline{\zeta}_2\wedge\cdots\wedge d\zeta_{\nu-1}\wedge d\zeta_{\nu+1}\wedge\cdots\wedge d\overline{\zeta}_n$. 这可经简单计算验证.[1)]

另外, 当形式 Ω_1 在复平面 $\zeta_1=z_1$ 上具奇异性的同时, 它的对参数 $\overline{z}_1$ 的偏导数仅在 $\zeta=z$ 上具奇异性:

$$\frac{\partial\Omega_1(\zeta-z)}{\partial\overline{z}_1}=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^\nu}{|\zeta-z|^{2n}}(\overline{\zeta}_\nu-\overline{z}_\nu)d\overline{\zeta}[1,\nu]\wedge d\zeta.$$

最后, 由于函数 f 在 S 上满足柯西 – 黎曼切向方程, 且可以被写成定理 1 中 c) 的形式 (即 $df\wedge d\zeta=0$), 而形式 Ω 包含了因子 $d\zeta$, 故在 S 上当 $\zeta_1\neq z_1$ 时我们有

[1)] 为简单起见设 $z=0$; 我们来进行这个计算:

$$\begin{aligned}d\Omega_1(\zeta)=&\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{|\zeta|^{2n}}\overline{\zeta}_\nu d\overline{\zeta}[1]+\\&\frac{(n-2)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=2}^{n}\frac{(-1)^\nu}{\zeta_1}\left(-\frac{n-1}{|\zeta|^{2n}}|\zeta_\nu|^2+\frac{1}{|\zeta|^{2n-2}}\right)d\overline{\zeta}_\nu\wedge d\overline{\zeta}[2,\nu]\wedge d\zeta\\=&\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{|\zeta|^{2n}}\overline{\zeta}_\nu d\overline{\zeta}[\nu]\wedge d\zeta\\=&\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta).\end{aligned}$$

$df \wedge \Omega_1 = 0$. 因此, 当 $\zeta \in S$ 且 $\zeta_1 \neq z_1$ 时

$$d(f(\zeta)\Omega_1(\zeta - z)) = f(\zeta)d\Omega_1(\zeta - z) = f(\zeta)\omega_{\text{MB}}(\zeta - z), \tag{8}$$

而当 $\zeta \in S, \zeta \neq z$ 时

$$d\left(f(\zeta)\frac{\partial\Omega_1(\zeta - z)}{\partial\overline{z}_1}\right) = f(\zeta)\frac{\partial\omega_{\text{MB}}(\zeta - z)}{\partial\overline{z}_1} \tag{9}$$

(微分是对变量 ζ 取的, 偏导数是对 $\overline{z}_1$ 的, 可与其进行置换).

我们开始直接进行证明.

a) 由积分 (6) 定义的函数在 S 外处处全纯. 事实上, 如果 $z \notin S$, 则可应用公式 (9) 从而由斯托克斯公式,

$$\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial\overline{z}_1} = \int_S f(\zeta)\frac{\partial\omega_{\text{MB}}(\zeta - z)}{\partial\overline{z}_1} = \int_S d\left(f(\zeta)\frac{\partial\Omega_1(\zeta - z)}{\partial\overline{z}_1}\right) = 0,$$

这是因为 $\partial S = 0$ (边缘 S 是个闭链). 挑出其他变量 $z_2, \cdots, z_n$ 以替代 z_1, 我们便构造了类似的形式 $\Omega_2, \cdots, \Omega_n$ 并可利用它们证明 $\dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\overline{z}_2}, \cdots, \dfrac{\partial\widetilde{f}}{\partial\overline{z}_n}$ 在 S 外等于 0.

b) 函数 $\widetilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 外处处为 0. 事实上, 在 $\mathbb{C}^n \backslash \overline{D}$ 中 $|z_1| > \max\limits_{\zeta \in S}|\zeta_1|$ 的部分, 形式 (7) 非异, 故而可以利用等式 (8). 对于属于这个部分的 z, 我们有

$$\widetilde{f}(z) = \int_S f\omega_{\text{MB}} = \int_S d(f\Omega_1) = 0$$

(我们再次利用斯托克斯公式, 并且 S 为闭链). 然而所提到的 $\overline{D}$ 的补集部分包含了内点, 而又因为由条件知此补集连通, 故由唯一性定理在整个补集上 $\widetilde{f} \equiv 0$.

c) 我们最后将证明函数 $\widetilde{f}$ 的边界值等于所给出的 f 的边界值. 考虑到马丁内利 – 博赫纳核的性质 (第 29 目的公式 (8)), 我们可以对任意 $\zeta^0 \in S$ 和任意 $z \notin S$ 写出

$$\widetilde{f}(z) - \chi(z)f(\zeta^0) = \int_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\omega_{\text{MB}}(\zeta - z), \tag{10}$$

其中 χ 为区域 D 的特征函数.

如果证明了 (10) 式右端在点 ζ^0 为连续, 则此断言得证: 事实上, 从 D 外 $z \to \zeta^0$ 时右端的极限值显然为零; 由于连续性从 D 内 $z \to \zeta^0$ 时极限值等于零, 即当 $z \to \zeta^0, z \in D$ 时 $f(z) \to f(\zeta^0)$.

因此, 还需证明在点 ζ^0 函数

$$g(z) = \int_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\omega_{\text{MB}}(\zeta - z)$$

的连续性. 为此, 我们首先注意存在有积分

$$g(\zeta^0) = \int_S [f(\zeta) - f(\zeta^0)]\omega_{\text{MB}}(\zeta - \zeta^0). \tag{11}$$

事实上, 这个积分是沿 $(2n-1)$ 维曲面对出现在形式 ω_{MB} 中微分形式的乘积 $d\bar{\zeta}[\nu]\wedge d\zeta$ 取的, 它具有 $(2n-1)$ 维体积元的大小. 这些乘积的因子

$$\frac{|f(\zeta)-f(\zeta^0)|}{|\zeta-\zeta^0|^{2n}}(\bar{\zeta}_\nu-\bar{\zeta}_\nu^0)$$

的阶不大于 $1/|\zeta-\zeta^0|^{2n-2}$, 这是因为 $f\in C^1(S)$, 从而 $f(\zeta)-f(\zeta^0)$ 作为 $\zeta_\nu-\zeta_\nu^0$ 具有的阶不小于 $|\zeta-\zeta^0|$. 所以 (11) 中被积函数趋向无穷的阶至少比维数少 1, 从而积分 (11) 收敛 [1].

进一步的证明按分析的常规方法进行, 我们仅点到为止. 差

$$g(z)-g(\zeta^0)=\int_S |f(\zeta)-f(\zeta^0)|[\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z)-\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-\zeta^0)]$$

可被分成两部分, 分别是沿 ζ^0 的充分小 (相对而言) 邻域 σ 上的积分和这个边界的剩余部分 $S\backslash\sigma$ 上的积分. 由于已证明的积分 (11) 的收敛性, 第一部分可以认为很小, 而在 $S\backslash\sigma$ 上的积分中的核是连续的, 从而如果点 z 充分靠近 ζ^0, 则此积分可以任意小. □

注. 所给出的这个证明在 $n=1$ 时却不能进行, 这是因为与马丁内利 – 博赫纳形式不同, 柯西形式 $d\zeta/(\zeta-z)$ 当 $z\in D$ 时不是 ∂D 上的恰当形式 (故不能在 $n=1$ 时按公式 (7) 构造 Ω_1). 积分

$$\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

当然在 $z\notin\partial D$ 时为全纯, 然而 $\tilde{f}$ 在 $\overline{D}$ 外却不必为零 [2].

作为博赫纳 – 塞韦里定理的应用例题, 我们来证明高维复分析的一个基本定理, 即关于紧奇点集的消去定理.

定理 3. 如果函数 f 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中处处全纯但可能要除去一个不分离该区域的一个集合 $K\Subset D$ (就是使 $D\backslash K$ 连通), 则 f 可延拓到整个区域 D.

证明. 在 $D\backslash K$ 中选取两个 $(2n-1)$ 维的超曲面 S_1 和 S_2, 使得它们分别为区域 G_1 和 G_2 的边界, 而这些区域的补集为连通并使 $K\Subset G_1\Subset G_2$, 以及夹层 $G=G_2\backslash G_1\Subset D$ (图 31). 因为 f 在 $\overline{G}$ 中全纯, 故由马丁内利 – 博赫纳公式, 对 $z\in G$ 有

$$f(z)=\int_{S_2} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z)-\int_{S_1} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta-z). \tag{12}$$

---

[1] 转到在 S 上以 ζ^0 为极点的极坐标上可以更容易相信这一点.

[2] 参看卷 I 第 II 章的问题 1 和 3.

按同一个理由, 在 S_1 和 S_2 上满足了柯西 – 黎曼切向方程

$$df \wedge d\zeta|_{S_1} = df \wedge d\zeta|_{S_2} = 0.$$

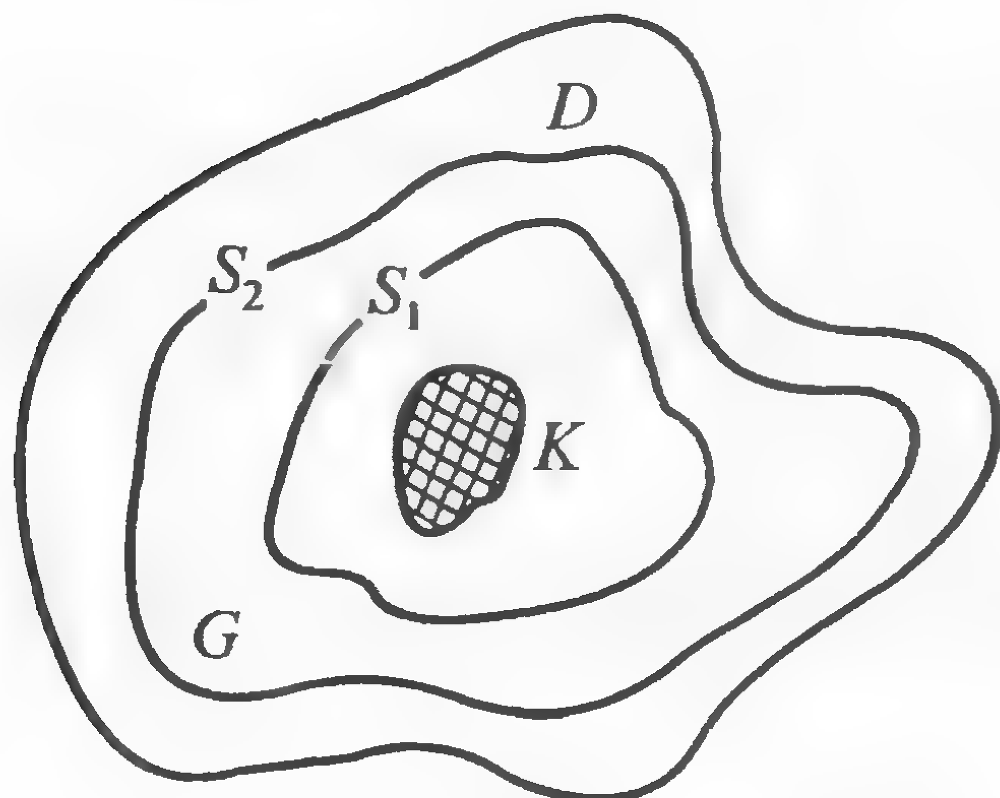


图 31

因为 z 位于曲面 S_1 之外, 故由定理 2 知公式 (12) 中的第二个积分等于零, 从而对所有 $z \in G$ 有

$$f(z) = \int_{S_2} f(\zeta)\omega_{\mathrm{MB}}(\zeta - z). \tag{13}$$

然而由同一个定理, 在 (13) 右端的积分代表了一个在 G_2 中处处全纯并在 $G_2 \backslash K$ 中等于 f 的一个函数. 因为按所设条件 $D \backslash K$ 为连通, 故此函数给出了 f 在整个区域 D 上的延拓. □

注. 在定理 3 中 K 不分离区域的条件是不可或缺的: 设 $K = \left\{|z| = \frac{1}{2}\right\}$ 为球面, 而 $D = \{|z| < 1\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的球, $n > 1$; 于是函数 f, 它在 $\left\{|z| < \frac{1}{2}\right\}$ 为 0, 在 $\left\{\frac{1}{2} < |z| < 1\right\}$ 为 1, 从而在 $D \backslash K$ 中全纯, 但不能全纯地延拓到 D.

由此定理看出, $n \geqslant 2$ 个变量的全纯函数不可能有孤立奇点: 这类函数的奇点 (如果它们不分离区域) 必定超越了该区域的边缘或者到达了无穷远 [1].

关于复奇点消去的定理 (定理 3) 涉及许多多复变分析的最重要的结果. 第一个被正式阐述但并不完全令人信服的证明属于哈托格斯 (1906 年); 1907 年庞加莱对 $\mathbb{C}^2$ 中的球证明了它 (在有界球面的邻域中全纯的函数全纯地延拓到整个球). 对这个定理稍后的证明出现在奥斯古德 (Osgood) 的教科书 (1924 年) 和布朗 (Brown) 的著作 (1936 年) 中. 我们上面给出的证明基于博赫纳和塞韦里 (1943 年) 更后来的结果.

* 证明后面的强化的刘维尔 (Liouville) 定理: 如果 $n \geqslant 2$ 个变量的函数在球 $\{|z| < R\}$ 外全纯并有界, 则其为常数. *

[1] 比较: 在平面 z 上的函数 $f = 1/z$ 具有奇点 $\{0\}$, 而在空间 (z, w) 有奇异的复直线 $\{z = 0\}$, 它扩展到了无穷远.

32. 哈托格斯定理和奇点的可去性

在下面具有必然性的解析延拓的定理中, 这个延拓由柯西积分实现.

定理 1 (哈托格斯). 设给出了区域 $G \subset \mathbb{C}^m(z), G_0 \subset G$ 和多圆盘 $U \subset \mathbb{C}^n(w)$, 其骨架为 Γ; 我们又记 $U^\bullet = U \bigcup \Gamma, M = (G \times \Gamma) \bigcup (G_0 \times U^\bullet)$. 如果函数 $f : M \to \mathbb{C}$

1) 在 $G \times \Gamma$ 中连续, 并且对任意 $\omega \in \Gamma$ 在 G 中全纯.

2) 对任意 $z \in G_0$, 在 U 中全纯并在 $U^\bullet$ 中连续, 则它可全纯地延拓到区域 $G \times U$ 中 (参看图 32, 其中 $m = n = 1$).

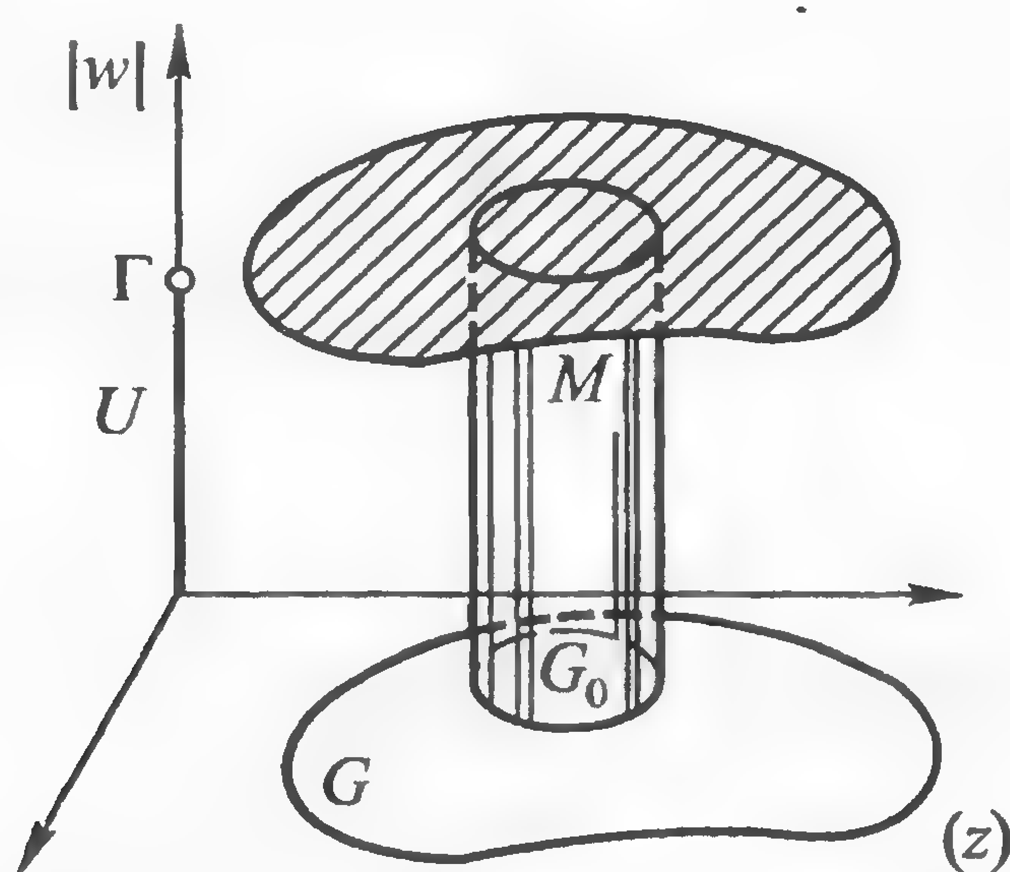


图 32

证明. 我们考虑由柯西重积分定义的函数

$$F(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z, \omega)}{\omega - w} d\omega. \tag{1}$$

它的被积函数 $\dfrac{f(z, \omega)}{\omega - w}$ 对任意固定的参数值 $(z, w) \in G \times U$ 在 Γ 上连续, 并对任意 ω 全纯依赖于这些参量; 由第 5 目的引理知函数 F 也在乘积 $G \times U$ 中全纯. 然而在固定 $z \in G_0$ 时, 由条件 2) 函数 f 在 U 中由其柯西积分代表, 因此在 $G_0 \times U$ 中有

$$f(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_\Gamma \frac{f(z, \omega)}{\omega - w} d\omega = F(z, w). \tag{2}$$

于是函数 F 是 f 在区域 $G \times U$ 中的全纯延拓. □

利用哈托格斯定理 (或者利用他的方法) 我们将证明三个关于奇点可去性的定理, 其中加在可去性集合上的条件一个比一个强, 而加在函数上的条件却一个比一个弱. 它们中的前两个对 $n = 1$ 也成立.

定理 2. 如果函数 f 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中连续并且在 $D \backslash S$ 中全纯, 其中 S 为光滑的实超曲面 [1)], 则它在 D 中全纯.

[1)] 在 $n = 1$ 时为光滑曲线.

证明. 只需证明在任意点 $a \in S$ 函数 f 全纯即可, 且不失一般性可设此点为 0, 并假定在此点的邻域中 S 由方程 $y_1 = \varphi(x_1, w)$ 给出, 其中 $w = (z_2, \cdots, z_n)$, 而 φ 为光滑的实函数 (图 33). 因为 $\varphi(0,0) = 0$, 故由 φ 的连续性知, 对任意 $\beta > 0$ 存在 $\alpha > 0$ 和多圆盘 $U \subset \mathbb{C}^{n-1}(w), 0 \in U$, 使得 $|\varphi(x_1, w)| < \beta$ 对所有 $|x_1| < \alpha$ 和 $w \in U$ 成立. 选取 β 充分小和充分靠近它的 $\gamma > \beta$, 我们得到区域 $G_0 \times U$ 属于 D, 其中 $G_0 = \{z_1 \in \mathbb{C} : |x_1| < \alpha, \beta < y_1 < \gamma\}$, 并且在 $G_0 \times U$ 中没有 S 的点, 即 $f \in \mathscr{O}(G_0 \times U)$.

另一方面, 对固定的 $w \in U$, 函数 $f(z_1, w)$ 在矩形 $G = \{|x_1| < \alpha, |y_1| < \gamma\}$ 中处处全纯, 但需去掉光滑曲线 $y_1 = \varphi(x_1, w)$, 并且在 G 中连续. 由此得到 (参看卷 I 第 42 目的引理的证明), $f(z_1, w)$ 对于固定的 $w \in U$ 在 G 中全纯. 由哈托格斯定理我们得出结论说, f 在包含点 $z = 0$ 的区域 $G \times U \subset \mathbb{C}^n$ 中全纯. □

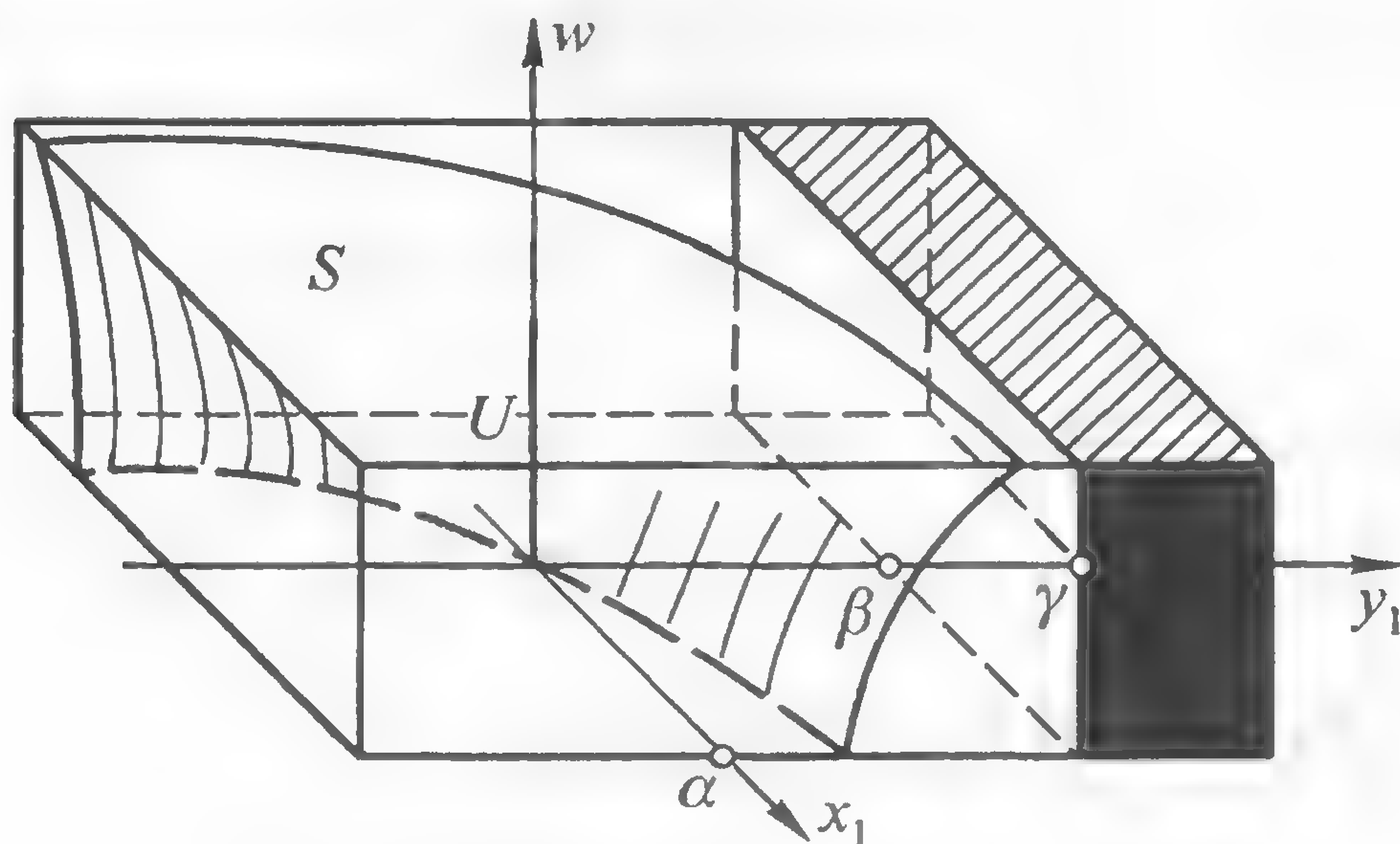


图 33

下面的定理是可去奇点定理的推广, 在这些奇点的邻域中这个全纯函数是有界的; 有时称其为关于延拓的黎曼定理 (在 $n = 1$ 时, 是由孤立点组成的解析集合).

定理 3. 如果函数 f 在 $D \backslash A$ 全纯, 其中 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, 而 A 为余维 1 的解析集, 并且 f 在 A 的点上为局部有界 [1], 则它可以以唯一的方式延拓到 D 中的全纯函数.

证明. 因为集合 $D \backslash A$ 连通 (参看第 24 目), 故延拓的唯一性是显然的. 只需证明 f 在任意点 $a \in A$ 可以全纯延拓即可, 不妨设此点 a 等于 0. 可以假定在 0 的邻域中定义集合 A 的函数 g 满足条件 $g('0, z_n) \neq 0$. 于是存在具充分小半径的圆 $\{|z_n| = r\}$, 在其上 $g('0, z_n) \neq 0$, 从而 $g('z, z_n) \neq 0$ 对于充分小邻域 $'U \subset \mathbb{C}^{n-1}$ 中的 $'z$ 和 $|z_n| = r$ 成立.

[1] 这表示, 对每个点 $z \in A$ 存在邻域 U_z 使得 f 在 $(D \backslash A) \bigcap U_z$ 中有界.

考虑柯西积分

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\{|\zeta_n|=r\}}\frac{f('z,\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n; \tag{3}$$

对于 $'z\in{}'U$, 因为点 $(z',\zeta_n)\in D\backslash A$, 且因为在其中 $g\neq 0$, 故积分号中的函数 $f('z,\zeta_n)$ 对于 z' 为全纯. 故 F 对 $'U$ 中的 $'z$ 全纯, 而对 z_n 它在圆盘 $U_n=\{|z_n|<r\}$ 中全纯, 所以 F 在区域 $U={}'U\times U_n$ 中全纯. 然而对于固定的 $'z\in{}'U$, 函数 $g('z,z_n)$ 在圆盘 U_n 中有有限个对应于 A 中点的零点. 因为由定理的条件, 函数 f 在这些点的邻域中有界, 故对于 z_n 而言奇点已消去. 在消去这些奇点后, 函数 $f('z,z_n)$ 在圆盘 U_n 中由在圆 $\{|z_n|=r\}$ 上取值的柯西积分表示, 故与函数 F 相合, 而它在区域 $U\ni 0$ 中全纯. □

最后的这个定理只对 $n>1$ 成立, 并且它关系到具必然性的解析延拓, 这是因为在其中并没有对函数加上任何附加条件.

定理 4. 如果 f 在 $D\backslash A$ 中全纯, 其中 D 为 $\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ 中的区域, 而 A 为余维不小于 2 的解析集, 则它以唯一的方式延拓到 D 中的全纯函数.

证明. 首先, 延拓的唯一性是显然的. 对于延拓的可能性, 我们将对集合 A 的复维数进行归纳证明, 按假设, 它的维数 $m\leqslant n-2$. 如果 A 为零维 $(m=0)$, 则它由孤立点组成 (由第 24 目定理 6 知), 而 f 在它们中每点的可延拓性可从紧奇点的可去性定理 (第 31 目定理 3) 得到.

设断言已对小于 $m\leqslant n-2$ 得证, 并且 A 为维数等于 m 的集合. 我们来证明 f 在任意正则点 $a\in A^0$ 的可延拓性, 在此不妨设其为 0. 因为在 0 的邻域 A 为余维不小于 2 的复流形, 则 (可能在经过复线性坐标变换之后) 可以找到两个在点 $''0\in\mathbb{C}^{n-2}$ 的邻域 $''U$ 中的全纯函数 g_1 和 g_2, 使得 $z_{n-1}-g_1(''z)$ 和 $z_n-g_2(''z)$ 在 A 上化为零, 其中 $''z=(z_1,\cdots,z_{n-2})$.

设 $g_1(''0)=g_2(''0)=0$ 和 $w=(z_{n-1},z_n)$; 于是对充分小的 $r>0$ 时, 环面 $\Gamma=\{(''0,w):|z_{n-1}|=|z_n|=r\}$ 位于 $D\backslash A$ 中, 从而函数

$$F(''z,w)=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{f(''z,\zeta)}{\zeta-w}d\zeta \tag{4}$$

对所有 $''z\in{}''U$ 和所有双圆盘 $U^2=\{|z_{n-1}|<r,|z_n|<r\}$ 中的点 w 为全纯. 然而对固定的 $''z$, 只有当 $z_{n-1}=g_1(''z)$ 和 $z_n=g_2(''z)$ 时, 点 $(''z,w)\in A$, 因此作为 w 的函数 F 只可能有可去的奇点. 故而 $F=f$, 即 f 在点 0 全纯地被延拓.

f 在 A 的正则点集 A^0 中的延拓性已经得证, 而因为临界点集构成了维数小于 m 的解析集, 故由归纳假定 f 在这些点也被延拓. □

* 证明, 在 $\mathbb{C}^2\backslash\mathbb{R}^2$ 中全纯的函数 f 可延拓为整函数. *

某种更一般的有关延拓的定理我们将在下一节中进行推导. 它们与全纯 (区) 域

的概念有关, 我们将转而研究它们.

§12. 全纯域

全纯域是那样的区域, 在其中存在有全纯函数, 它不能被解析延拓到该区域之外. 上一节的那些定理表明在 $n>1$ 的空间 $\mathbb{C}^n$ 中并非任一个区域都是全纯域, 我们将在这里着手研究这种区域的特点和性质.

33. 全纯域的概念

必然性解析延拓的影响自然地导致了下面的定义:

定义 1. 称包含区域 D 的区域 G 为 D 的全纯扩张是说任意函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 可延拓为 G 中的全纯函数.

可以清楚看到, 这个定义只在空间的情形才有意义. 这种情形的令人感兴趣的特别之处由下面简单的定理表现出来.

定理 1. 如果 G 为区域 D 的全纯扩张, 则任意函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 的延拓在 $G\backslash D$ 中只取那些 f 在 D 中所取的值.

证明. 设若相反, 某个函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 在 $G\backslash D$ 中取了某个它不在 D 中取的值 w_0. 于是函数 $g(z)=\dfrac{1}{f(z)-w_0}$ 显然在 D 中全纯, 但不能解析延拓至 G, 这是因为在 $G\backslash D$ 中某个点它将变为无穷. 这与定义 1 矛盾. □

推论. 有界区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 的全纯扩张 G 也是有界区域.

证明. 由定理 1, 函数 $f_\nu(z)=z_\nu$ (点 z 的坐标) 在 G 中的取值是与其在 D 中的取值相同, 即

$$\sup_{z\in G}|z_\nu|=\sup_{z\in D}|z_\nu|,\quad \nu=1,\cdots,n. \tag{1}$$

然而因为 D 有界, 故 (1) 的右端有限, 从而左端有限, 即 G 有界. □

全纯域不能简单地理解为与其自己在 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯扩张相同. 问题在于, $\mathbb{C}^n$ 中区域的函数的解析延拓可能导致多叶的黎曼区域, 我们曾在第 22 目中考虑过它.

例题. 设 $D\subset\mathbb{C}^2$ 为单连通区域, 其哈托格斯图展示在图 34 中, 这是个圆柱 $\{x_1^2+y_1^2<1,|z_2|<2\}$, 但去掉了正方形 $\mathrm{I}=\{0\leqslant x_1<1,y_1=0,|z_2|\leqslant 1\},\mathrm{II}=\{0\leqslant y_1<1,x_1=0,\ 1\leqslant|z_2|<2\}$ 和扇形 $S=\{|z_1|<1,x_1\geqslant 0,y_1\geqslant 0,|z_2|=1\}$. 由哈托格斯定理, 每个函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 可以通过扇形 S 被解析延拓, 既从上往下也

图 34

从下往上 [1]. 事实上, 例如我们考虑第一种延拓方式 (从上往下): 函数 f 在半圆盘 $\sum = \{|z_1| \leqslant 1-\varepsilon, x_1 \geqslant \varepsilon, |z_2| = 2-\varepsilon\}$ 和线段 $\{z_1 = z_1^0, |z_2| \leqslant 2-\varepsilon\}$ 的邻域中全纯, 其中 $|z_1^0| < 1, x_1^0 > 0, y_1^0 < 0$, 因此被延拓到 $\sum \times \{|z_2| < 2-\varepsilon\}$.

在这样的延拓下我们重新又到了区域 D 中, 但是该函数不必取它以前所具有的同一个值. 事实上, 例如我们考虑函数 $f_0(z_1, z_2) = \sqrt{z_1}$, 它被看作在 D 中连续的根的一个分支; 这个分支在半轴 $x_1 > 0$ 上取正值。显然它在 D 全纯，并且在图中的点 A 和 B 取了具不同符号的值, 其中 A 和 B 投射到平面 z_1 中同一个点 P 但位于 S 的不同的面上 (在 D 上从 A 过渡到 B 时我们应将 $\arg z_1$ 改变 2π). 另一方面, 由哈托格斯定理知, f_0 经 S 的延拓 (像前面所描述的那样) 得到的, 譬如在点 B 和它在点 A 的延拓应该是同一个值.

所以, f_0 的延拓把我们引向了多值函数; 我们不想讨论这些函数, 我们应该把这些延拓了的值带到 D 的第二个样本上, 然后与第一个样本沿集合 S 粘合.

这个例题中的区域 D 不是个全纯域, 虽然它没有到 $\mathbb{C}^2$ 中区域的全纯扩张. 为了避免出现类似的现象, 我们应该在定义全纯区域时, 不仅对函数本身, 而且对它在部分区域上, 比如包含在该区域中的球上的限制排除解析延拓到区域界限之外的可能性.

定义 2. 称区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为函数 f 的全纯区域是说, 如果 $f \in \mathscr{O}(D)$ 并且对任意点 $z^0 \in D, f$ 在球 $B(z^0, r)$ 的限制不能解析延拓到球 $B(z^0, r_1)$, 其中 r 为 z^0 到 ∂D 的距离, 而 $r_1 > r$. 称区域 D 为全纯域是说, 如果它是某个函数的全纯域.

我们着手研究描述全纯域的特征条件, 就从简单的充分条件开始. 我们称在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的一个边界点 ζ 存在一个障碍是说, 如果对任意集合 $K \Subset D$ 及任意 $\varepsilon > 0$

[1] 为简明起见, 我们在谈及展示在哈托格斯图上的集合时总理解为相应的 $\mathbb{C}^2$ 中的集合.

存在函数 $g \in \mathscr{O}(D)$, 使得 $\|g\|_k = \max_{z\in K}|g(z)| \leqslant 1$ 而 $|g(z)| > 1$ 对某个点 $z \in B(\zeta,\varepsilon)$ 成立.

显然, 如果函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 在点 $\zeta \in \partial D$ 无界 (即对某个序列 $z^\nu \in D, z^\nu \to \zeta$, 有 $f(z^\nu) \to \infty$), 则在此点存在一个障碍. 事实上, 对任意 $K \Subset D$ 和 $\varepsilon > 0$ 可以取 $g(z) = f(z)/\|f\|_K$. 其逆命题也成立, 但有下面更强的形式:

定理 2. 对任意一个包含障碍的点集 $E \subset \partial D$, 存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 它在 E 的所有点均无界.

证明. 首先我们注意到存在 ∂D 中最多可数个点的集合处处稠于 $\overline{E}$, 而且在它上无界的函数必在 E 上也无界. 所以可以认为 E 最多为一可数集. 在此假设下, 我们来构造一个序列 $\zeta^\nu \in E$ 使得 E 中每个点在其中出现无穷多次 [1]. 现在为了证明此定理只需找到函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 及点序列 $z^\nu \in D$ 使得 $|z^\nu - \zeta^\nu| \to 0$ 和 $f(z^\nu) \to \infty$.

我们以归纳法构造: 1) 一个递增集合序列 $K_\nu \Subset D$, 并穷竭了 D, 即 $\bigcup_{\nu=1}^{\infty} K_\nu = D$, 2) 点 $z^\nu \in D$ 使得 $|z^\nu - \zeta^\nu| < 1/\nu$ 和 3) 函数 $f_\nu \in \mathscr{O}(D)$ 使得

$$\|f_\nu\|_{K_\nu} \leqslant 1, \quad \text{而} \quad |f_\nu(z^\nu)| > 1. \tag{2}$$

为此选取 K_1 为 D 中任一个紧集, 并按障碍的定义, 在点 ζ^1 存在函数 $f_1 \in \mathscr{O}(D)$ 和点 $z^1 \in D$ 使得 $|z^1 - \zeta^1| < 1$ 和 $|f_1(z^1)| > 1 \geqslant \|f_1\|_{K_1}$. 现在假定这种构造已经对所有 $\mu \leqslant \nu - 1$ 做好, 我们取

$$K_\nu = K_{\nu-1} \bigcup \left\{ z \in D : \rho(z, \partial D) \geqslant \frac{1}{\nu}, |z| \leqslant \nu \right\} \bigcup \{z^1, \cdots, z^{\nu-1}\}$$

并按障碍的定义知, 在 ζ^ν 存在函数 $f_\nu \in \mathscr{O}(D)$ 和点 $z^\nu \in D$, 使得 $|z^\nu - \zeta^\nu| < 1/\nu$ 和满足条件 (2). 我们构造的可能性已得证.

最后, 考虑到 $|f_\nu(z^\nu)| > 1$, 我们选取一个自然数的序列 p_ν (从 $p_1 = 1$ 开始) 使得其满足不等式

$$\frac{1}{\mu^2}|f_\mu(z^\mu)|^{p_\mu} \geqslant \sum_{\nu=1}^{\mu-1} \frac{1}{\nu^2}|f_\nu(z^\mu)|^{p_\nu} + \mu, \quad \mu \geqslant 2, \tag{3}$$

并考虑级数

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2}\{f_\nu(z)\}^{p_\nu}. \tag{4}$$

对任意 $z \in K_\mu$, 我们有 $|f_\nu(z)| \leqslant 1$, 其中 $\nu \geqslant \mu$, 从而级数 (4) 在 K_μ 上一致收敛. 因为 K_μ 为紧且穷竭 D, 故由此得到级数 (4) 在 D 中处处收敛, 并且其和

[1] 设集合 E 的点被如此编号: 对已构造的序列 ζ^ν 我们按这样的次序来取点: $1; 1, 2; 1, 2, 3; \cdots$.

$f \in \mathscr{O}(D)$ (参看第 5 目的魏尔斯特拉斯定理). 最终对任意 $\mu = 1, 2, \cdots$ 我们有

$$|f(z^\mu)| \geqslant \frac{1}{\mu^2}|f_\mu(z^\mu)|^{p_\mu} - \sum_{\nu=1}^{\mu-1}\frac{1}{\nu^2}|f_\nu(z^\mu)|^{p_\nu} - \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2}$$
$$\geqslant \mu - \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}\frac{1}{\nu^2},$$

由此看出 $f(z^\mu) \to \infty$. □

由此定理的证明直接导出全纯域的一个充分条件:

推论. 如果在 D 的边界上一个处处稠密的点集上存在障碍, 则 D 为全纯域.

例如, 在球 $B = \{|z| < R\} \subset \mathbb{C}^n$ 边界的每个点中存在障碍, 这是因为存在函数

$$f(z) = \frac{1}{\mathbb{R}^2 - (z, \zeta)} \in \mathscr{O}(B),$$

它在点 ζ 无界. 因此球是个全纯域. 可以推广这个例子.

定理 3. 任意凸区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯域.

证明. 由于 D 的凸性, 对任意点 $\zeta \in \partial D$ 可以构造一个支撑超平面 $\mathrm{Re}(z-\zeta, a) = 0$, 它通过 ζ 并且 D 位于它的一侧, 而在其中取复平面 $(z-\zeta, a) = 0$, 它也通过 ζ 并不包含 D 中的点. 于是函数 $f(z) = 1/(z-\zeta, a)$ 在 D 中全纯并在 ζ 无界, 即在 ζ 存在障碍. 由前面的推论知 D 是个全纯域. □

但是凸性条件并不是全纯域的必要条件. 譬如, 这可以由下面的定理看到.

定理 4. 如果 D_z 是空间 $\mathbb{C}^n(z)$ 中的全纯域, 而 D_w 是空间 $\mathbb{C}^m(w)$ 中的类似的区域, 则乘积 $D_z \times D_w$ 是空间 $\mathbb{C}^{n+m}(z, w)$ 中的全纯域.

证明. 取函数 f, 使 D_z 为其全纯域, 以及 g 是对 D_w 的这种函数. 于是 $f(z)g(w) \in \mathscr{O}(D_z \times D_w)$ 使得 $D_z \times D_w$ 为其全纯域. □

因为在 $\mathbb{C}^1$ 中任意区域都是全纯域, 而多圆形区域是平面区域的乘积, 故而我们有

推论. $\mathbb{C}^n$ 中的多圆形区域为全纯域.

特别地, 两个平面区域 D_1 和 D_2, 其中至少有一个是非凸集, 譬如说 D_1, 则它的乘积 D 虽然不是凸集却是个全纯域.

在下一目中, 我们将引进一个推广了的凸集概念, 它比起通常的定义来说不是那么直观, 但却给出全纯域的充分必要条件.

34. 全纯凸

$\mathbb{R}^n$ 中通常的 (几何的) 凸区域可以特征地描述为: 任何一个闭包紧于它的集合的凸包也闭包紧于该区域 (图 35). 一个集合 K 的凸包是所有包含这个集合的半空间的交集, 或者换句话说, 它是那样一些点的集合, 在这些点上任意实线性函数所取的值不超过它在 K 上的极大值. 可清楚看出, 对 $\mathbb{C}^n$ 中集合, 实线性的函数可以换为复的, 从而集合 K 的凸包可定义为集合 $\{z\in\mathbb{C}^n : |l(z)|\leqslant\|l\|_K, l$ 为所有复线性函数 $\}$ (像通常那样, $\|l\|_K$ 代表函数 l 在集合 K 上的极大模).

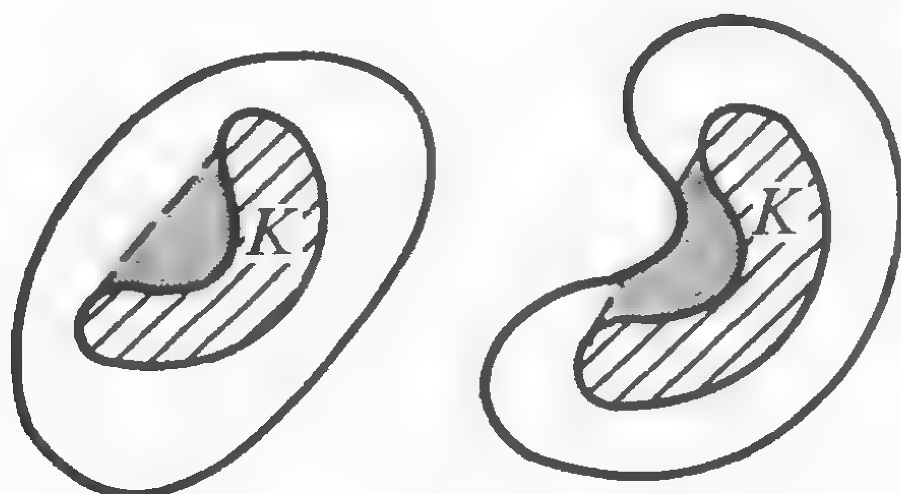


图 35

如果 D 不是全纯域, 则在它的任意全纯扩张中, 所有由 $\mathscr{O}(D)$ 延拓的函数只取它们在 D 中所取的值 (参看第 33 目). 所以在引进期望能对全纯域作特征刻画的凸性概念时, 自然地要以并非线性的而是在整个区域全纯的函数来构建它的包. 除此之外, 因为某些函数在 D 外无定义, 故它的子集的包应该只与该区域中的点有关.

这个概念是由嘉当 (H. Cartan) 和图伦 (P. Thullen) 在 1932 年提出来的.

定义 1. 集合 $M \subset D$ 的全纯凸包是指集合

$$\widehat{M} = \{z \in D : |f(z)| \leqslant \|f\|_M, \text{其中 } f \in \mathscr{O}(D) \text{ 为任意}\}. \tag{1}$$

定义 2. 称区域 D 为全纯凸是指, 如果对任意闭包紧于 D 的集合 K, 其全纯凸包 $\widehat{K}$ 也闭包紧于 D:

$$K \Subset D \Rightarrow \widehat{K} \Subset D \tag{2}$$

(参看图 35, 在那里展示出区域的非凸性如何违反这个条件的).

* 设 $D = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}\backslash\{|z_1| \leqslant 1/2, |z_2| \leqslant 1/2\}$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中的区域, $K = \{z_1 = 0, |z_2| = 3/4\}$ 为圆, 其闭包紧于 D; 证明, $\widehat{K}$ 不是闭包紧于 D 的. *

在某些问题中应该考虑的不是关于 $\mathscr{O}(D)$ 中所有函数的包而仅需考虑某个子类 $F \subset \mathscr{O}(D)$ 中的函数, 这时可以说成是 $F-$ 凸包 (记为 $\widehat{M}_F$) 或者 $F-$ 凸包域. 那么. 如果 F 为全部 $\mathbb{C}-$ 线性 (或 $\mathbb{R}-$ 线性) 函数, 则 $F-$ 凸性等同于几何凸性, 如果 F 为所有多项式或有理函数, 则称之为多项式凸包或有理凸包.

显然, 类 F 越广, 则被要求满足不等式 (2) 的函数集就越大, 故而集合的 $F-$ 凸包越窄, 从而 $F-$ 凸区域的类就越大. 特别地, 所有凸区域都是多项式凸, 所有多项

式凸为全纯凸.

例题.

(1) 我们来解释在平面情形的嵌入. 任意区域 $D \subset \mathbb{C}^1$ 为全纯凸, 而多项式凸仅为其在 $\mathbb{C}^1$ 中补集为连通的那些区域 (请证明!). 几何凸区域的类窄于多项式凸的类. 形象地说, 过渡到平面区域的多项式包可化为填满它上面的"洞", 而过渡到 (几何) 凸包则化为填满靠近边界的"凹隔"处.

(2) 任意解析多面体 (参看第 30 目)

$$\Pi = \{z \in D : |W_\nu(z)| < 1, \nu = 1, \cdots, N\},$$

其中函数 $W_\nu \in \mathscr{O}(D)$, 是相对于类 $\mathscr{O}(D)$ 的凸集. 事实上, 如果 $K \Subset \Pi$, 则对任意 $\nu = 1, \cdots, N$, 我们有 $\|W_\nu\|_K \leqslant r < 1$. 则按 $\mathscr{O}$– 凸包的定义有

$$\sup_{z \in \widehat{K}_{\mathscr{O}}} |W_\nu(z)| \leqslant \sup_{z \in K} |W_\nu(z)| \leqslant r,$$

而由此得到 $\widehat{K}_{\mathscr{O}} \Subset \Pi$.

正如我们现在将要明白的, 全纯凸确实是全纯域的充分必要条件.

定理 1 (嘉当 – 图伦). 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 全纯凸, 则它为全纯域.

证明. 以完全类似上一目中关于障碍的定理的证明那样进行. 作为那里的 E, 必须取成在 ∂D 上处处稠密的可数集, 并且按照那里所提出的办法排序. 紧集 K_ν 同样由归纳法构造, 只是点 z^ν 和函数 f_ν 以另外的想法进行选取: 由于区域 D 的全纯凸性, 包 $\widehat{K}_\nu \Subset D$, 故而存在点 $z^\nu \in D, |z^\nu - \zeta^\nu| < 1/\nu$, 并且函数 $g_\nu \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $|g_\nu(z^\nu)| \geqslant \|g_\nu\|_{K_\nu}$, 我们又令 $f_\nu(z) = g_\nu(z)/\|g_\nu\|_{K_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \cdots)$. 证明的结尾部分仍保持原来的样子, 而函数

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \{f_\nu(z)\}^{p_\nu} \tag{3}$$

全纯于 D, 并且在趋近 E 中所有点时无限增大, 即 D 是个全纯域. □

注. 显然, 在这个定理中全纯凸性可以被替换成对于任意类 $F \subset \mathscr{O}(D)$ 的凸性. 特别地, 如果 F 为线性函数类, 我们则重新得到了上一目的定理 3.

全纯凸性条件的必要性的证明基于一个被称为*同步延拓*的引理, 它也独立地具有自身的兴趣.

引理. 设 $K \Subset D$, 且 $\rho = \rho(K, \partial D)$ 是在多圆盘度量下从 K 到边界 ∂D 的距离. 对全纯凸包 $\widehat{K}$ 中任意点 a, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯延拓到多圆盘 $U(a, \rho)$.

具本质性的一点是, 多圆盘 $U(a,\rho)$ 可以超越区域 D 的范围之外 (参看图 36 的图示); 这个多圆盘的半径不依赖于单个的函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 而只由 K 到 ∂D 的距离决定.

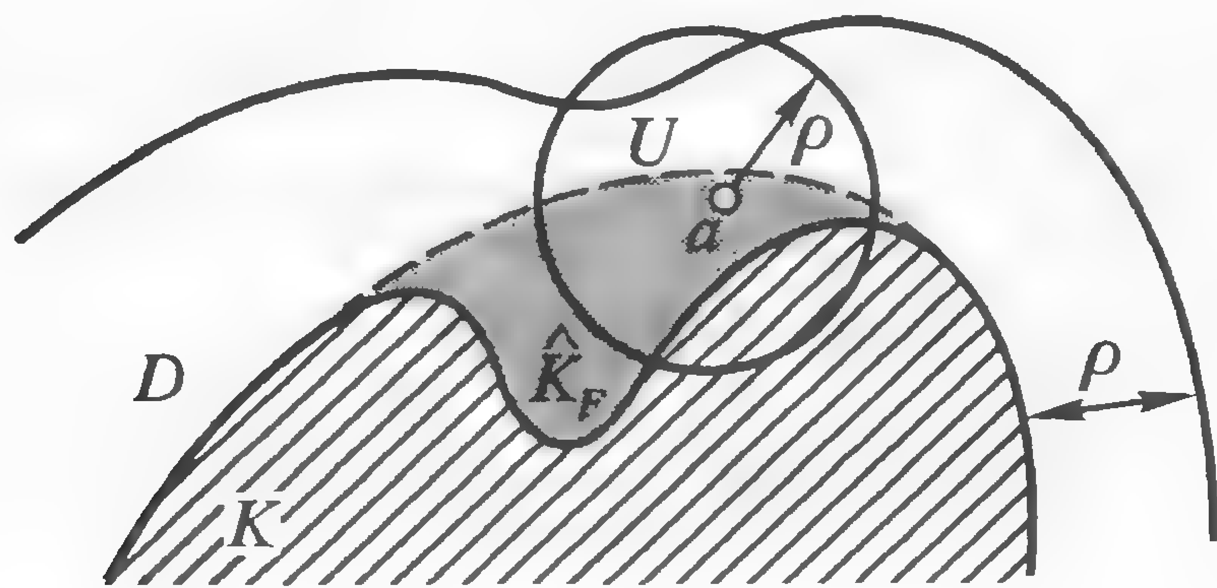


图 36

证明. 因为 $a \in D$, 故在 a 的邻域中任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可用泰勒级数表示

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k(z-a)^k, \tag{4}$$

其中 $c_k = \dfrac{1}{k!}D^k f|_a, D^k f = \dfrac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$. 但因为 $a \in \widehat{K}$, 故

$$|D^k f|_a \leqslant \|D^k f\|_K, \tag{5}$$

即在点 a 导数的估值化成了它们在 K 上的估值.

我们选取数 $r < \rho$ 并以 K^r 表示集合 K 的 $r-$ 膨胀 (即所有多圆盘 $U(z,r)$ 对所有 $z \in K$ 的并). 因为 $K^r \Subset D$, 故 f 在其上有界, 记

$$M_f(r) = \|f\|_{K^r}. \tag{6}$$

如果 $z \in K$, 则 $U(z,r) \subset K^r$, 并且对 (5) 的右端导数的估值可以利用柯西不等式 (第 5 目):

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{k!}\|D^k f\|_K \leqslant \frac{M_f(r)}{r^{|k|}}.$$

现选取任一 $r_1 < r$; 对于任意点 $z \in U(a, r_1)$ 有

$$|c_k(z-a)^k| \leqslant M_f(r)(r_1/r)^{|k|}, \tag{7}$$

由此看出, 级数 (4) 在多圆盘 $U(a,r_1)$ 中收敛. 因为数 r 和 r_1 可以取得任意地靠近 ρ, 故 (4) 在 $U(a,\rho)$ 中处处收敛. 这个级数从而给出了函数 f 的所需要的全纯延拓. □

由此引理立即得到了全纯凸条件的必要性.

定理 2 (嘉当 – 图伦). 任意全纯域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯凸.

证明. 取任意一个集合 $K \Subset D$, 并记 $\rho = \rho(K, \partial D)$. 因为 $\mathscr{O}(D)$ 包含了所有的坐标 z_ν, 故全纯凸包 $\widehat{K}$ 有界. 另外, 因为由上面的引理知, $\mathscr{O}(D)$ 中的任意函数被全纯地延拓到 $\widehat{K}$ 的 $\rho-$ 膨胀, 从而是一个函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 它没有延拓到 D 之外, 故这个膨胀属于 D, 即 $\widehat{K} \Subset D$. □

注. 在同步延拓引理中, $\mathscr{O}(D)$ 可以换为任意的类 F, 与它的每一个函数 f 一起的还应包含它的所有的导数. 为了使定理 2 成立还需要使这个类包含所有坐标 z_ν, 没有这个补充的假定, 它可能对于非有界区域不成立. 例如, 如果 $D_1 \subset \mathbb{C}$ 为函数 f 的全纯域, 其中 f 为变量 z_1 的函数, 故 $D = D_1 \times \mathbb{C}$ 就是那样的全纯域但它对于类 F 不是凸的, 其中 F 由 f 和它的对 z_1 的导数构成 (例如集合 $K_1 \times \{|z_2| < 1\}$ 的 $F-$ 凸包为 $K_1 \times \mathbb{C}$, 其中 $K_1 \Subset D_1$).

由同步延拓引理也可以得到一个全纯凸域的判别法, 着重的是它与几何凸的相似性: 这是那样的区域, 在其中从紧子集到它们全纯凸包的过程中没有减少它们到边缘的距离. 形象地说, 这种过程由填满这些子集的“洞”和“凹隔”构成.

定理 3. 对于区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯凸的充分必要条件是对所有集合 $K \Subset D$ 有

$$\rho(\widehat{K}, \partial D) = \rho(K, \partial D). \tag{8}$$

证明. 条件 (8) 的充分性是显然的. 为了证明必要性, 我们注意到 (8) 的左端总不超过它的右端, 而如果那里确是一个不等式, 则在 $\widehat{K}$ 中能找到点 a, 它满足 $\rho(a, \partial D) < \rho(K, \partial D)$. 然而根据引理, 任意函数 f 便被延拓到中心为 a 半径为 $\rho(K, \partial D)$ 的多圆盘, 就是说已在区域 D 的范围之外了, 从而 D 不可能是全纯域. □

35. 全纯域的性质

$\mathbb{C}^n$ 中的全纯域就是全纯凸域. 我们给出它们的一些性质, 这是凸区域的已知性质的推广.

定理 1. 设 $D_\alpha, \alpha \in A$, 为 $\mathbb{C}^n$ 中一个任意的全纯域的族, 并且 $G = \bigcap\limits_{\alpha \in A} D_\alpha$ 是它们的交, 则开核 $\overset{\circ}{G}$ 的每个连通分支 D 是全纯域.

证明. 设 $K \Subset D$; 因为 $\mathscr{O}(D_\alpha)$ 中的每个函数均全纯于 D, 故 $\mathscr{O}(D) \supset \mathscr{O}(D_\alpha)$, 从而 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset \widehat{K}_{\mathscr{O}(D_\alpha)}$ 对所有 $\alpha \in A$ 成立. 故 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D_\alpha)}, \partial D_\alpha)$, 从而由 D_α 的全纯凸性，对于所有 α 有 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(K, \partial D_\alpha) \geqslant \rho(K, \partial D)$. 如果 D 不是全纯域, 则对某个 K 便会有 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D_\alpha) < \rho(K, \partial D)$, 与已证明过的事实矛盾. □

与交集不同, 全纯域的并不必再是这样的区域 (比较凸区域的相应性质). 这从简单的例子: $\{|z_1| < 1, |z_2| < 2\}$ 和 $\{|z_1| < 2, |z_2| < 1\}$ 可看清楚; 它们都是 $\mathbb{C}^2$ 中的全纯域, 而它们的并却不是 (在第 7 目已证过).

但是对于递增的全纯域序列的并却成立 (这与凸集情形一样). 为了证明它我们需要一个定理, 它是龙格定理 (卷 I, 第 23 目) 的推广, 它也具有自身的兴趣.

定理 2 (冈洁 – 韦伊 (Oka-Weil)). 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的任意区域, $K \Subset D$ 为紧并与其对于类 $\mathscr{O}(D)$ 的凸包重合:

$$K = \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}. \tag{1}$$

于是任意全纯于 K (即在其某个邻域中) 的函数 f 可被 $\mathscr{O}(D)$ 中函数在 K 上一致逼近.

证明. 设 f 在紧集 K 的邻域 $U \subset D$ 中全纯, $V \Subset U$ 为 K 的另一个邻域. 根据凸包的定义, 对任意点 $\zeta \in \partial V$ 存在函数 $W_\zeta(z) \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $|W_\zeta(\zeta)| > 1 > \|W_\zeta\|_K$. 因为 ∂V 为紧, 故存在有限个函数 $W_{\zeta_j} = W_j$ $(j = 1, \cdots, N)$ 使得对所有 $\zeta \in \partial V$ 有 $\max\limits_j |W_j(\zeta)| > 1$, 而 $\|W_j\|_K < 1$.

现在考虑解析多面体

$$\Pi = \{z \in V : |W_j(z)| < 1, j = 1, \cdots, N\}, \tag{2}$$

它包含了 K 并闭包紧地含在 V 中. 函数 f 在 $\overline{\Pi}$ 的邻域中全纯, 由 (第 30 目的) 韦伊定理知它在 K 上由 $\mathscr{O}(D)$ 中的函数一致地逼近. □

注. 在 $n = 1$ 时, 条件 (1) 意味着紧集 K 不分离区域 D, 其中 D 是单连通的. 由此看出, 第一, 这个条件是不可或缺的, 第二, 定理 2 实际上推广了龙格定理.

推论. 任意紧集 $K \Subset D$ 的包 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 的任一连通分支与 K 有非空的交.

证明. 设 E 为 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 的一个连通分支, 并且 $E \bigcap K = \varnothing$. 于是存在不相交的开集 $U \supset K$ 和 $V \supset E$, 使得 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset U \bigcup V$. 我们考虑全纯于 $U \bigcup V$ 的函数 f, 它在 U 上为 0 而在 V 上为 1. 由定理 2, 存在 $g \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $\|f - g\|_{\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}} < \frac{1}{2}$. 特别地, 对任意点 $z^0 \in E$ 我们有

$$|g(z^0)| > 1/2 > \|g\|_K,$$

而这与 $E \subset \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 相矛盾. □

我们现在来证明前面所提到的定理.

定理 3 (贝恩克 – 施坦 (Behnke-Stein)). 递增的全纯域

$$D_1 \Subset D_2 \Subset \cdots \Subset D_\nu \Subset \cdots \tag{3}$$

的并 D 也是全纯域.

证明. 首先以有界区域替换 D_ν. 为此, 我们固定点 $a \in D_1$, 并以 D'_ν 表示开集 $D_\nu \bigcap \{|z-a|<\nu\}$ 中包含 a 的连通分支 —— 按定理 1, D'_ν 是全纯区域, 显然, 像前面那样, 有 $D'_\nu \Subset D'_{\nu+1}$ 和 $D = UD'_\nu$.

进一步, 从序列 D'_ν 中选取子序列 $D'_{p\nu} = G_\nu$ 使得对所有 $\nu = 1, 2, \cdots$ 满足条件

$$\sup_{z\in\partial G_\nu} \rho(z, \partial G_{\nu+1}) < \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}). \tag{4}$$

我们以归纳法证明这种选取的可能性. 令 $G_1 = D'_1$, 并选取 p_2 如此之大使得 $G_2 = D_{p_2}$ 有 $\sup\limits_{z\in\partial G_2} \rho(z, \partial D) < \rho(G_1, \partial D)$; 在此之后我们选取 p_3, 使得区域 $G_3 = D'_{p_3}$ 的边界如此靠近 ∂D, 使得前面那个不等式可以换为在 ∂G_3 上的不等式 $\sup\limits_{z\in\partial G_3} \rho(z, \partial G_3) < \rho(G_1, \partial G_3)$. 设已对所有小于 ν 的自然数选好了 p_ν, 我们现在来选取 p_ν 使 $G_\nu = D'_{p_\nu}$ 满足

$$\sup_{z\in G_\nu} \rho(z, \partial D) < \rho(G_{\nu-1}, \partial D), \tag{5}$$

然后再选取 $p_{\nu+1}$ 使 $D'_{p_{\nu+1}} = G_{\nu+1}$ 如此靠近 ∂D 使在最后面的这个不等式中的 ∂D 被换成 $\partial G_{\nu+1}$, 从而得到了 (4).

因为 $G_{\nu-1} \Subset G_{\nu+1}$ 且 $G_{\nu+1}$ (作为全纯域) 为对于类 $\mathscr{O}(G_{\nu+1})$ 的凸集, 故由第 34 目的定理 3, 对于凸包 $G^*_{\nu-1} = \widehat{(G_{\nu-1})}_{\mathscr{O}(G_{\nu+1})}$ 有

$$\rho(G^*_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}) = \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}). \tag{6}$$

但由 (4) 得到, 对于任意点 $a \in \partial G_\nu$ 有

$$\rho(a, \partial G_{\nu+1}) < \rho(G_{\nu-1}, \partial G_{\nu+1}),$$

即 ∂G_ν 与 $G^*_{\nu-1}$ 不相交. 根据定理 2 的推论我们得到

$$G^*_{\nu-1} \Subset G_\nu, \quad \nu = 1, 2, \cdots. \tag{7}$$

我们需要证明区域 D 为全纯凸. 为此我们固定任意一个紧集 $K \Subset D$, 且记 $r = \rho(K, \partial D)$ 并证明 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset \{z \in D : \rho(z, \partial D) \geqslant r\} = D_r$, 这就是我们所要证明的.

设 $a \in D \backslash D_r$ 为任意点, 且 $r_1 = \rho(a, \partial D) < r$. 于是存在 $\mu > 1$ 使得 $K \bigcup \{a\} \subset G_{\mu-1}$ 和 $\rho(a, \partial G_\mu) < \rho(K, \partial G_\mu)$. 根据第 34 目的定理 3, 由此得出 a 不属于 $\widehat{K}_\mu =$

$\widehat{K}_{\mathscr{O}(G_\mu)}$, 从而存在函数 $f_0 \in \mathscr{O}(G_\mu)$, 使得 $|f_0(a)| > \|f_0\|_K$. 乘其以某个适当的常数, 我们可以认为

$$|f_0(a)| > c+1, \quad \text{而} \quad \|f_0\|_K < c-1, \tag{8}$$

其中 $c > 1$. 根据 (7), 函数 f_0 在 $G^*_{\mu-1} = \widehat{(G_{\mu-1})}_{\mathscr{O}(G_{\mu+1})}$ 的邻域中全纯, 并且根据定理 2, 它可以在 $G^*_{\mu-1}$ 上被 $\mathscr{O}(G_{\mu+1})$ 中的函数所一致逼近, 即存在函数 $f_1 \in \mathscr{O}(G_{\mu+1})$ 使得 $\|f_1 - f_0\|_{G^*_{\mu-1}} < \dfrac{1}{2}$. 进而我们进行归纳: 我们假定已经构造了函数 $f_j \in \mathscr{O}(G_{\mu+j}), 1 \leqslant j \leqslant k$, 其满足

$$\|f_j - f_{j-1}\|_{G^*_{\mu+j-2}} < \frac{1}{2^j}. \tag{9}$$

因为根据 (7), 函数 f_k 在 $G^*_{\mu+k-1}$ 的邻域中全纯, 故由定理 2 存在函数 $f_{k+1} \in \mathscr{O}(G_{\mu+k+1})$, 它满足 $j = k+1$ 时的条件 (9); 于是序列 f_j 的存在性得证.

由所作的构造, 对所有 $k \geqslant 0$ 级数

$$f_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} (f_j - f_{j-1}) \tag{10}$$

由那些在 $G_{\mu+k}$ 中全纯的函数构成, 而它在 $G^*_{\mu+k-1}$ 上一致收敛. 由于它的和显然不依赖于 k, 而诸集合 $G^*_{\mu+k-1}$ 穷竭了区域 D, 则 $f \in \mathscr{O}(D)$. 另外, 由于 (8) 和 (9)

$$|f(a)| \geqslant |f_0(a)| - \sum_{j=1}^{\infty} |f_j - f_{j-1}| \geqslant c,$$

$$\|f\|_K \leqslant \|f_0\|_K + \sum_{j=1}^{\infty} \|f_j - f_{j-1}\|_K < c,$$

从而 $a \notin \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$. 因为 a 是 $D \backslash D_r$ 中的任意点, 故 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \subset D_r$. □

最后, 我们将证明简单而重要的一个事实, 它建立了全纯区域对于双全纯映射下的不变性.

定理 4. 如果 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯域, D^* 为其在双全纯映射 φ 下的像, 则 D^* 也是全纯域.

证明. 设 $K^* \Subset D^*$, 于是由 φ 的同胚性可知集合 $K = \varphi^{-1}(K^*) \Subset D$, 而因为 D 为全纯域, 则 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \Subset D$.

容易看出

$$\varphi(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}) \supset \widehat{K}^*_{\mathscr{O}(D^*)}. \tag{11}$$

事实上, 如果某个点 $w \in D^*\backslash\varphi(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)})$, 则 $z=\varphi^{-1}(w) \in D\backslash\widehat{K}$, 并存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $|f(z)| > \|f\|_K$; 我们记 $g = f\circ\varphi^{-1}$, 显然, $g \in \mathscr{O}(D^*)$ 且 $|g(w)| > \|g\|_{K^*}$, 而这意味着, $w \in D^*\backslash\widehat{K}^*_{\mathscr{O}(D^*)}$.

由 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)} \Subset D$, 我们得出结论: $\varphi(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}) \Subset D^*$, 并由 (11), 有 $\widehat{K}^*_{\mathscr{O}(D^*)} \Subset D^*$. 因此, D^* 为全纯凸, 从而是个全纯域. □

§13. 伪凸域

在这里我们来了解全纯凸概念的另一种解释, 它有两个重要的优点: 第一, 这个概念可以局部地阐述 (并且在此形式下它容易被验证), 第二, 它可以用几何的语言自然地表达.

36. 连续性原理

我们仍以一个关于必然性的解析延拓的定理着手. 为了阐述它, 我们约定称某个区域 $G \subset \mathbb{C}^m$ $(m<n)$ 在非退化全纯映射

$$\varphi: G \to \mathbb{C}^n \tag{1}$$

的像为空间 $\mathbb{C}^n$ 中一个 m 维**全纯曲面** S. 特别, 当 $m=1$ 时这是条**全纯曲线**, 而如果 $G\subset\mathbb{C}$ 还是个圆盘并且 φ 在 $\overline{G}$ 上连续则称 $S=\varphi(\overline{G})$ 为**全纯圆盘**. 我们记得, 所谓映射 (1) 为**非退化**是说在 G 的所有点上雅可比矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial z_\nu}\right)$ 的秩等于 m. 称曲面 (1) 为**有界**是说集合 $S=\varphi(G)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 中有界.

对于有界全纯曲面成立下面的**极大模原理**.

如果函数 f 在某个包含了有界全纯曲面 S 的区域 $U\subset\mathbb{C}^n$ 全纯, 并在其闭包 $\overline{S}$ (在 $\mathbb{C}^n$ 的拓扑下) 上连续, 则

$$\sup_S |f| \leqslant \sup_{\partial S}|f|, \tag{2}$$

其中 $\partial S = \overline{S}\backslash S$.

事实上, 如果在某点 $b\in S$ 达到 $\sup\limits_{\overline{S}}|f| > \sup\limits_{\partial S}|f|$, 则存在点 $a\in\varphi^{-1}(b)\subset G$, 使在 G 中全纯的函数 $f\circ\varphi$ 的模达到极大值. 但是因此而有在 $\overline{S}$ 上 $f\equiv$ 常数, 而这与点 b 的选取矛盾.

另外, 我们称集合序列 M_ν 收敛于集合 M (记为 $M_\nu\to M$) 是说, 如果对任意 $\varepsilon>0$, 存在指标 ν_0 使得对所有 $\nu\geqslant\nu_0$ 有

$$M_\nu \subset M^{(\varepsilon)} \quad 和 \quad M\subset M_\nu^{(\varepsilon)}, \tag{3}$$

其中以 $M^{(\varepsilon)}$ 和 $M_\nu^{(\varepsilon)}$ 代表相应集合的 $\varepsilon-$ 膨胀 (即所有多圆盘 $U(z,\varepsilon)$ 的并, 其中的多圆盘的中心 z 为该集合中的点).

定理 (贝恩克 – 佐默 (Behnke-Sommer)). 设 S_ν 为有界全纯曲面的序列, 它们连同其边界 ∂S_ν 都属于区域 $D \subset \mathbb{C}^n$. 如果 S_ν 收敛于某个集合 S, 而 ∂S_ν 收敛于集合 Γ 且 $\Gamma \Subset D$ (图 37). 那么任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 全纯地延拓到集合 S 的某个邻域中.

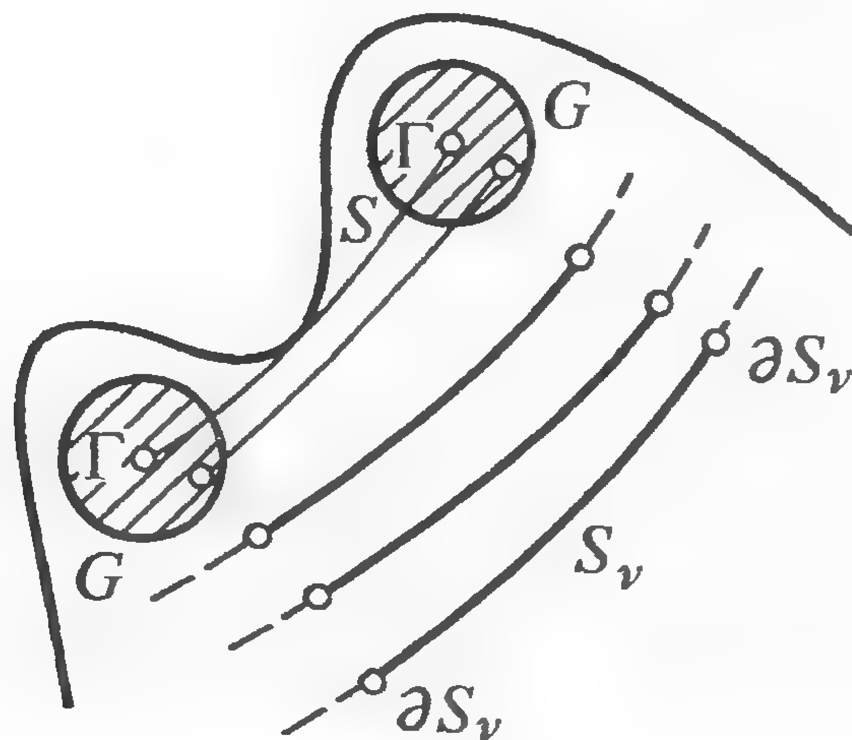


图 37

证明. 因为 $\Gamma \Subset D$, 故存在区域 $G \Subset D$ 使得 $\Gamma \Subset G$; 记 $\rho(G, \partial D) = r$. 由于 $\partial S_\nu \to \Gamma$ 的收敛性, 故存在 ν_0 使得当 $\nu \geqslant \nu_0$ 有

$$\partial S_\nu \subset G. \tag{4}$$

对任意 $f \in \mathscr{O}(D)$ 和任意点 $z \in S_\nu$, 根据极大模原理有

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_{\partial S_\nu},$$

从而由 (4), 当 $\nu \geqslant \nu_0$ 时我们有

$$|f(z)| \leqslant \|f\|_G.$$

然而这表明 z, 从而所有曲面 S_ν, 当 $\nu \geqslant \nu_0$ 时属于凸包 $\widehat{G}_{\mathscr{O}(D)}$. 由同步延拓引理 (第 34 目) 从而得到, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯地延拓到所有曲面 S_ν 的 $r-$ 膨胀 $S_\nu^{(r)}$ 中, 其中的指标 $\nu \geqslant \nu_0$.

最后, 由于 $S_\nu \to S$ 的收敛性, 存在 $\nu_1 \geqslant \nu_0$ 使 $S \subset S_\nu^{(r/2)}$ 对所有 $\nu \geqslant \nu_1$ 成立, 因而, 任意 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯地延拓到集合 S 的 $\frac{r}{2}-$ 膨胀中. □

注. 正如在证明中所看到的, 在贝恩克 – 佐默定理中, 类 $\mathscr{O}(D)$ 可以替换为另一个函数类, 其中的函数只要在 D 和极限集合 $S \bigcup \Gamma$ 的某个邻域的交上为全纯的函数即可.

称贝恩克 – 佐默定理为*连续性原理*[1]. 可描述性地表达其为, 在全纯曲面 S_ν 的邻域中函数为全纯的性质在这些曲面的极限集上仍然保持不变.

[1] 贝恩克 – 佐默的特殊情形, 即 $\overline{S}_\nu$ 为复直线 $'z = 'a_\nu$ 的闭子集, S 也是复直线 $'z = 'a = \lim\limits_{\nu\to\infty} 'a_\nu$ 的闭子集, 是哈托格斯证明的; 并被称之为关于连续性的哈托格斯定理.

作为应用连续性原理的例子, 我们证明一个引理, 我们在下一节讨论在管状区域中全纯函数的延拓时要用到它.

引理. 设 x^0, x^1, x^2 为空间 $\mathbb{R}^n(x)$ 中三个不共线的点, $l_1 = [x^0, x^1]$ 和 $l_2 = [x^0, x^2]$ 为闭线段, 而 $\Delta = x^0x^1x^2$ 为闭三角形. 如果函数 f 在集合 $(l_1 \bigcup l_2) \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中全纯, 则它可全纯地延拓到 $\Delta \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中.

换句话说, 任意在三角棱柱的两个面的并的邻域中全纯的函数 f (图 38) 必定可全纯延拓到整个棱柱上.

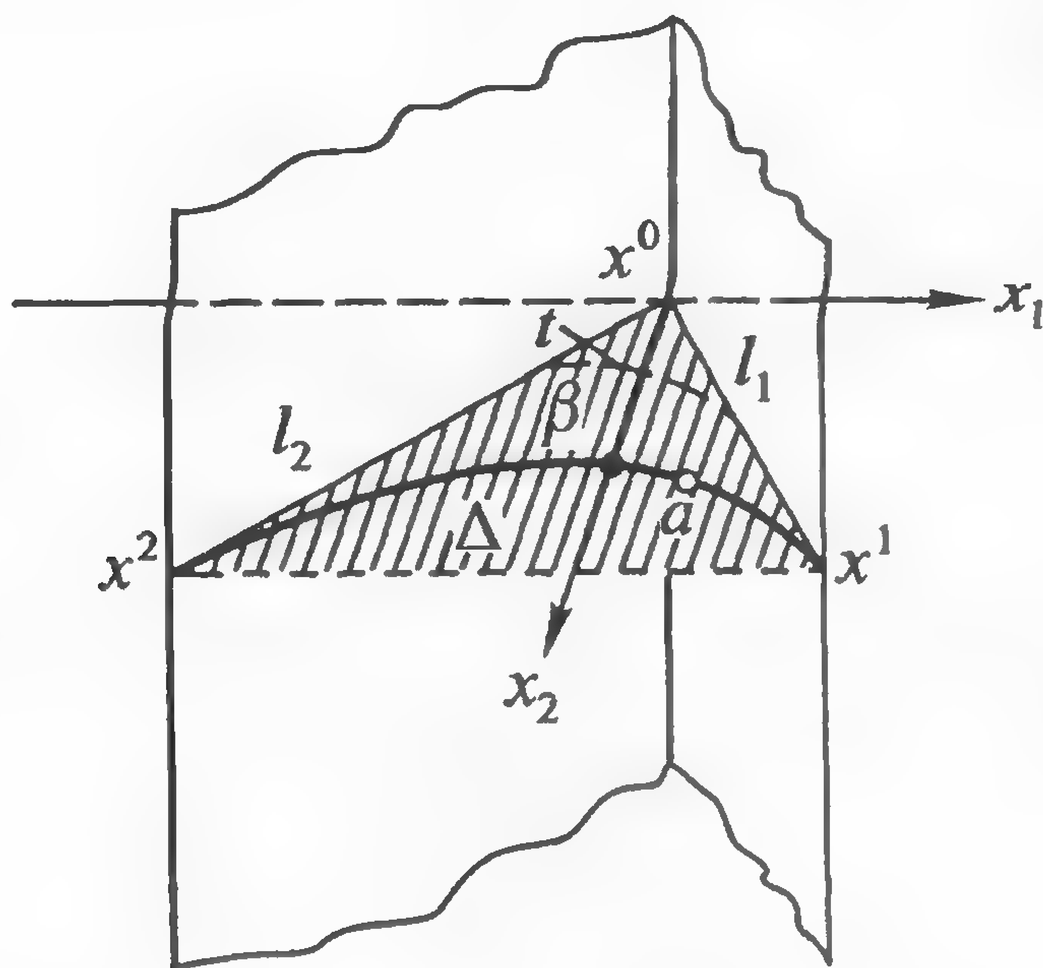


图 38

证明. 不失一般性, 可设 $x^0 = (0, 0, \cdots, 0), x^1 = (1, 1, 0, \cdots, 0), x^2 = (-1, 1, 0, \cdots, 0)$, 这是因为可由 $\mathbb{C}^n(z)$ 中的线性变换达到, 而此变换的系数为实数 1). 只要证明 f 在集合 $M = \Delta \times \mathbb{R}^n(y)$ 中的任意点 a 可全纯延拓即可. 可以假定 a 位于 M 和实子空间 $\{y = 0\}$ 的交集中, 即在三角形 Δ 中 (这可以用具纯虚坐标向量作平移达到).

因此必需证明 f 可全纯延拓到任意点 $a = (a_1, a_2, 0, \cdots, 0)$, 其中 a_1, a_2 为实数, 满足条件 $|a_1| < a_2 \leqslant 1$ (在我们的轴的位置下, 这个条件表明 $a \in \Delta \backslash \{l_1 \bigcup l_2\}$; 当 $a \in l_1 \bigcup l_2$ 时由假定, f 已是全纯). 为了证明这点, 我们引进通过点 x^1, a 和 x^2 的抛物线

$$x_2 = \alpha x_1^2 + \beta \tag{5}$$

(为此需取 $\alpha = \dfrac{1 - a_2}{1 - a_1^2}, \beta = 1 - \alpha$; 当 $a_2 = 1$ 时该抛物线退化为直线 $x_2 = 1$) 并且对任意 $t, 0 < t \leqslant \beta$, 考虑全纯曲线

$$S_t = \{z \in M : z_2 = \alpha z_1^2 + t, z_3 = \cdots = z_n = 0\}. \tag{6}$$

1)这种变换将 $\mathbb{R}^n(x)$ 变到自己而不破坏这些条件和引理的断言.

我们把变量 z_1 看作是 S_t 上的参数. 为了证明 S_t 的有界性只需证明当 $z \in S_t$ 时, z_1 的值在 z_1- 平面的有界区域中变化. 但是, S_t 在 z_1- 平面上的投影由条件 $(\text{Re } z_1, \text{Re } z_2, 0, \cdots, 0) \in \Delta$ 定义, 它由形式

$$|x_1| < \alpha(x_1^2 - y_1^2) + t \leqslant 1 \tag{7}$$

描述, 且由包含在双曲线

$$\left(x_1 \pm \frac{1}{2\alpha}\right)^2 - y_1^2 = \frac{1}{4\alpha^2} - \frac{t}{\alpha}$$

之间的有界区域界定 (在图 39 中的阴影部分). 我们还发现, 在 $0 < t \leqslant \beta$ 时曲线 S_t 交 $\mathbb{R}^n(x)$ 于属于 Δ 的抛物线

$$x_2 = \alpha x_1^2 + t \tag{8}$$

中的一段, 其平行于抛物线 (5) (图 38 中用虚线表出).

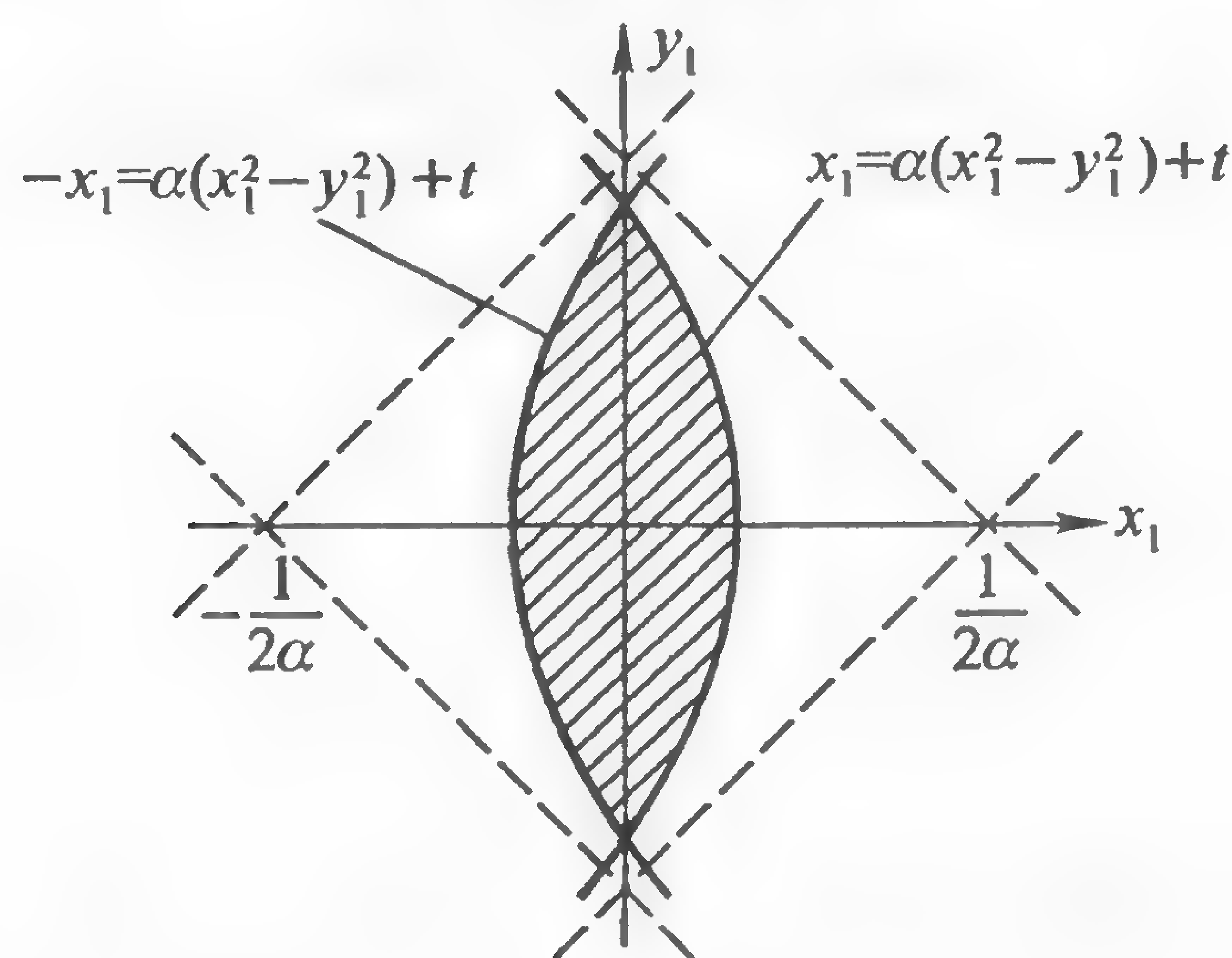


图 39

以 E 表示那些 $t \in (0, \beta]$ 使 f 在 S_t 的邻域中为全纯的集合. 它显然为开集. 因为在充分小的 $t > 0$, 如同在图 39 看到的, z_1 的变化区域 (7) 位于 $z_1 = 0$ 的点的任意小邻域中, 从而 S_t 也位于点 $z = 0$ 的任意小邻域中, 在其中由假设条件 f 为全纯, 所以 E 非空. 然而同时 E 也为闭. 事实上, 如果 $t_0 \in (0, \beta]$ 为 E 的极限点, 则存在序列 $S_{t_\nu} \to S_{t_0}, t_\nu \in E$, 于是 $\partial S_{t_\nu} \to \partial S_{t_0}$, 并且 f 在所有 S_{t_ν} 和 ∂S_{t_ν} 的邻域中全纯 (我们注意到, 对任意 $t \in (0, \beta], \partial S_t$ 属于集合 $(l_1 \bigcup l_2) \times \mathbb{R}^n(y)$, 在此由所给条件, f 为全纯). 因此, 我们能够应用连续性原理 (见在其证明后面的附注) 并得到 $t_0 \in E$. 这样一来, $E \equiv (0, \beta]$, 从而 f 解析延拓到了 S_β 的邻域, 然而 S_β 包含了点 a. □

37. 局部伪凸性

具 C^2 类边界的区域 $D = \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi(x) < 0\}$ 在其边界点 a 的通常的 (几何的) 凸性是指, 在这个点的充分小邻域 U 中 D 位于切平面 $T = T_a(\partial D)$ 的一侧. 不失一般性, 可设 $a = 0$, 并且 φ 在点 0 的泰勒展式为

$$\varphi(x) = L_0(x) + \frac{1}{2}H_0(x) + 0(|x|^2), \tag{1}$$

其中 L_0 为线性项全体, 而

$$H_0(x) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\Big|_0 x_\mu x_\nu. \tag{2}$$

因为在 T 上线性项 $L_0(x) \equiv 0$, 于是凸性可由二次型 H_0 在 T 上的限制确定: 如果 D 在点 0 为凸, 则 $H_0(x)|_T \geqslant 0$, 而如果 $H_0(x)|_T > 0$ 在 $x \neq 0$ 成立, 则 D 为凸.

在构建这个判别法的复类比时出现了局部伪凸性这个概念. 设在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的边界点 a 的邻域 U 中, 区域 D 由条件

$$D \bigcap U = \{z \in U : \varphi(z) < 0\} \tag{3}$$

给出, 其中 $\varphi \in C^2(U), \bigtriangledown_z \varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial\varphi}{\partial z_n}\right)_z \neq 0$, 以及 $z \in U$: 我们称具这种性质 的函数 φ *局部定义*了在邻域 U 中的区域 D.

不难看出, 两个这样的函数 φ 和 ψ 在 U 充分小时相差一个正的因子 $h \in C^1(U)$. 事实上, 根据除法引理 (第 31 目) 存在函数 $h \in C^1(U)$ 使得 $\psi = h\varphi$, 而因为 φ 和 ψ 在 $U \bigcap D$ 都为负, 而在 $U \backslash \overline{D}$ 为正, 故在 $U \backslash \partial D$ 上 $h > 0$. 但在 ∂D 上 $h \neq 0$: 因为由同一个引理, 有 $\varphi = h_1\psi$, 其中 $h_1 = 1/h \in C^1(U)$, 故在 U 处处有 $h > 0$.

* 设 φ 在邻域 U 中局部定义了区域 D. 证明, 如果 U 充分小, 则在 $\partial D \bigcap U$ 上为零的任意形式 $\omega \in C^k(U)$ 具有形式 $\omega = \varphi\omega_1$, 其中 $\omega_1 \in C^{k-1}(U)$ 为某个形式. *

φ 在点 $a = 0$ 的邻域中的泰勒展式为

$$\varphi(z) = 2\text{Re } L_0(z) + \text{Re } K_0(z) + \frac{1}{2}H_0(z) + 0(|z|^2), \tag{4}$$

其中

$$L_0(z) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial z_\nu}\Big|_0 z_\nu, \quad K_0(z) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial z_\nu}\Big|_0 z_\mu z_\nu,$$

$$H_0(z) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_0 z_\mu \overline{z}_\nu. \tag{5}$$

为了得到这个展式, 只要写出 φ 按变量 z_ν 和 $\overline{z}_\nu$ 的泰勒展式, 并且注意到因为 φ 是实函数, 那些对 $\overline{z}_\nu$ 取导数项的全体复共轭于对 z_ν 取导数的那些对应项, 从而在和号中给出了两倍的实部分即可.

我们看到, 有别于 (1), 展式 (4) 的二阶项分成了两组: Re $K_0(z)$ 和 $\frac{1}{2}H_0(z)$. 我们把第二组表示为有点不同的样子:

$$H_z(\varphi, \omega) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_z \omega_\mu \overline{\omega}_\nu, \tag{6}$$

并称其为函数 φ 在点 z 的莱维 (Levi) 形式. 由于 φ 的实性质, 这是个埃尔米特形式 $\left(\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} = \overline{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\mu}}\right)$ 从而在所有向量 $\omega \in \mathbb{C}^n$ 上取实数值. 可直接验证它的下列性质.

a) 如果 $h \in C^2$ 在点 z 的邻域中为实的, 则

$$H_z(h\varphi, \omega) = hH_z(\varphi, \omega) + \varphi H_z(h, \omega) + 2\mathrm{Re}\,\partial\varphi(\omega)\overline{\partial h(\omega)}, \tag{7}$$

其中 $\partial\varphi(\omega) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_\nu}\omega_\nu$, 相似地也可这样理解 $\partial h(\omega)$.

b) 如果在点 $\varphi(z)$ 的邻域中 $\psi \in C^2$ 为变量 φ 的函数, 则

$$H_z(\psi \circ \varphi, \omega) = \psi'(\varphi)H_z(\varphi, \omega) + \psi''(\varphi)|\partial\varphi(\omega)|^2. \tag{8}$$

c) 如果 $f : U \to \mathbb{C}^m$ 为全纯映射, 而 $\psi \in \mathbb{C}^2$ 为在点 $f(z)$ 的邻域中的函数, 则

$$H_z(\psi \circ f, \omega) = H_{f(z)}(\psi, f_*\omega), \tag{9}$$

其中 $f_* = df$ 为 f 在点 z 的微分映射.

其中的最后一个性质表明, 莱维形式对于双全纯映射不变. 形式 K_0 则不具有不变性; 进一步, 则可经过适当的双全纯变换可以把它完全消去.

引理. 如果区域 D 的边界以二阶光滑地靠近点 a, 则存在双全纯映射 $f, f(a) = 0$, 以及 a 的邻域 $U \ni a$, 使得 $G = f(D \bigcap U)$ 在点 $w = 0$ 的邻域中具有定义函数 ψ, 而 ψ 的泰勒展式为

$$\psi(\omega) = \mathrm{Re}\, w_n + \frac{1}{2}H_0(\psi, w) + o(|w|^2). \tag{10}$$

证明. 设点 $a = 0$ 且在其邻域中存在局部定义的区域 D: 设其为具泰勒展式 (4) 的函数 φ. 我们在邻域 $U \ni 0$ 选取一个新的坐标 w 使得 $w_1, \cdots, w_{n-1}$ 是在复切平面 $\{L_0(z) = 0\}$ 中的坐标, 而 $w_n = L_0(z) + \dfrac{1}{2}K_0(z)$. 因为 K_0 由平方项构成, 故映射 $w = f(z)$ 为双全纯, 只要 U 为充分小即可.

像 $G = f(D \bigcap U)$ 由不等式 $\psi(w) < 0$ 刻画, 其中 $\psi = \varphi \circ f^{-1}$, 并替换 $z = f^{-1}(w)$ 到展式 (5) 中, 则它可重写为

$$\varphi(z) = 2\mathrm{Re}\, f_n(z) + \frac{1}{2}H_0(\varphi, z) + o(|z|^2),$$

根据 (9) 我们得到了

$$\psi(w) = 2\mathrm{Re}\, w_n + \frac{1}{2}H_0(\psi, w) + o(|w|^2). \qquad \square$$

因此, 在局部定义函数的泰勒展式的二阶项中, 在复分析中较重要的是莱维形式. 就是说, 它是凸性的复类比的基础之一: 代替考虑所有二阶项在切平面 $T_a(\partial D)$ 的限制的是这个形式在复切平面 $T_a^c(\partial D)$ 上的限制.

定义 1. 称具二阶光滑边界的区域在点 a 的邻域中*在该点为伪凸*是说, 如果在 a 的邻域存在区域 D 的局部定义函数 φ 使得

$$H_a(\varphi,\omega)\geqslant 0 \quad 对所有 \quad \omega\in T_a^c(\partial D) 成立, \tag{11}$$

称其为*严格伪凸*是说, 如果有

$$H_a(\varphi,\omega)>0 对所有 \omega\in T_a^c(\partial D), \quad \omega\neq 0 成立. \tag{12}$$

举几个例子.

(1) 多圆盘 $U^n=\{z\in\mathbb{C}^n:\|z\|<1\}$. 设点 $a\in\partial U^n$, 其属于边界 $S_\nu=\{|z_\nu|=1\}$ 但不属于骨架 Γ, 作为定义函数可取 $\varphi(z)=z_\nu\bar{z}_\nu-1$. 莱维形式 $H_a(\varphi,\omega)=|\omega_\nu|^2$ 非负, 但在 $\omega_\nu=0$ 的向量 ω 上为零, 就是说, 正好是在复切平面 $T_a^c(\partial U^n)$ (后者的方程为 $\bar{a}_\nu(z_\nu-a_\nu)=0$ 或 $\bar{a}_\nu\omega_\nu=0$, 其中 $a_\nu\neq 0$, 故 $\omega_\nu=0$) 上. 所以在这些点上多圆盘为伪凸域但不是严格伪凸域.

(2) 球 $B^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z|=1\}$. 这里对于任意点 $a\in\partial B^n$ 其定义函数为 $\varphi(z)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}z_\nu\bar{z}_\nu-1$, 它的莱维形式 $H_a(\varphi,\omega)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\omega_\nu\overline{\omega}_\nu=|\omega|^2>0$, 其中 $\omega\neq 0$. 因此, 球在所有边缘点上为严格伪凸.

* 证明, 1) 任一区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 在一点为 (严格) 凸, 则它在该点也 (严格) 伪凸, 但其逆命题不真;

2) 区域 $D=\{z\in\mathbb{C}^2:|z_1|^2+|z_2|^4<1\}$ 在 ∂D 的所有点为严格伪凸, 但须除去圆 $\{|z_1|=1,z_2=0\}$, 在这里它为伪凸. *

不难看出, 在伪凸和严格伪凸的定义中的性质不依赖于局部定义函数的选取. 事实上, 因为对所有 $\omega\in T_a^c(\partial D)$, 我们有 $\varphi(a)=0$ 和 $\partial\varphi(\omega)=0$, 故对另外的定义函数 $\psi=h\varphi$ 按公式 (7) 有

$$H_a(\psi,\omega)=h(a)H_a(\varphi,\omega)^{1)}.$$

但由前面所证 $h(a)>0$, 故函数 φ 和 ψ 的莱维形式在 $T_a^c(\partial D)$ 上的限制具有相同的符号.

定理 1. 在点 a 的邻域严格伪凸的区域 D 有一个定义函数, 其莱维形式不仅在复切平面 $T_a^c(\partial D)$ 上为正而且对所有 $\omega\neq 0$ 也为正.

---

1) 因为我们有 $\varphi(a)=0$, 故公式 (7) 对函数 $h\in C^1(U)$ 成立.

证明. 由于点 $a \in \partial D$ 的邻域 U 中的严格伪凸性, 存在有定义函数 φ, 它满足条件 (12). 如果 U 充分小时, 则在其中 $\psi = \varphi + k\varphi^2$ 也是定义函数, 其中 $k \geqslant 0$ 为任意常数 (特别地, $\triangledown\psi = \psi'(\varphi)\triangledown\varphi \neq 0$). 因为 $\varphi(a) = 0$, 故在此点有 $\psi'(\varphi) = 1+2k\varphi = 1$, 并由公式 (8) 有

$$H_a(\psi, \omega) = H_a(\varphi, \omega) + 2k|\partial\varphi(\omega)|^2. \tag{13}$$

因为 $H_a(\psi, \lambda\omega) = |\lambda^2|H_a(\psi, \omega)$, 故只需证明形式 $H_a(\psi, \omega)$ 在球面 $S = \{\omega \in \mathbb{C}^n : |\omega| = 1\}$ 上为正即可. 记 $S_0 = \{\omega \in S : H_a(\varphi, \omega) \leqslant 0\}$; 如果这个集合为空, 则可令 $k = 0$. 如果其非空, 则由紧性知, 存在常数 $M \geqslant 0$ 使得 $H_a(\varphi, \omega) \geqslant -M$ 对所有 $\omega \in S_0$ 成立. 由于在 $\partial\varphi(\omega) = 0$, 即在 $\omega \in T_a^c(\partial D)$ 时的 (12), 有 $H_a(\varphi, \omega) > 0$; 因此, 在 S_0 上必有 $\partial\varphi(\omega) \neq 0$, 从而存在常数 $m > 0$, 使得 $|\partial\varphi(\omega)| \geqslant m$. 如果我们取 $k > M/2m^2$, 则由 (13) 和已得到的在 S_0 上的估值, 有

$$H_a(\psi, \omega) \geqslant -M + 2km^2 > 0,$$

而在 $S \backslash S_0$ 上 $H_a(\psi, \omega)$ 为正则是显然的. □

因为二阶光滑函数 φ 的莱维形式连续地依赖于 z, 故由定理 1 得出

推论. 如果区域 D 在其边界点 a 为严格伪凸, 则在此点的充分小的邻域 U 中存在定义函数 φ, 使得

$$H_z(\varphi, \omega) > 0 \text{ 对所有 } z \in U \text{ 和 } \omega \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}. \tag{14}$$

成立

由此同一个定理得到另一个命题, 它建立了严格伪凸和几何凸之间的联系:

定理 2. 如果区域 D 在边界点 a 为严格伪凸, 则存在某个邻域 $U \ni a$ 的双全纯变换, 它把 $\partial D \bigcap U$ 变到一个几何凸域边界上一些片段.

证明. 设 $a = 0$ 且 φ 为区域 D 的局部定义函数, 其情形如定理 1 那样. 进行在前面引理的证明中 (见前面的引理) 所描述的那个双全纯变换 $f : U \to \mathbb{C}^n$, 我们得到, 在点 $f(0) = 0$ 的邻域中区域 D 的定义函数 $\psi = \varphi \circ f^{-1}$ 具有泰勒展式 (10), 其中全部的二阶项化为

$$\frac{1}{2}H_0(\psi, w) = \frac{1}{2}H_0(\varphi, f_*^{-1}w).$$

由定理 1, 这个形式对所有 $w \neq 0$ 为正, 这表明, 它在充分靠近 $w = 0$ 的点上, 对 $f(\partial D \bigcap U)$ 的实切平面的限制为正. 从而其表明为几何凸性. □

伪凸性和严格伪凸性具有对全纯凸性的实质性的优越性: 这是些局部性质, 因而可以被有效地验证. 但是不同于全纯凸, 它们只能对于全纯域的*局部*特性有所作为.

定义 2. 称区域 D 为在边界点 a非全纯扩张是说, 如果存在该点的邻域 U_a 及一个在开集 $U_a \bigcap D$ 全纯且不能全纯延拓到点 a 的函数 f.

可清楚看出, 任意全纯域不能在 ∂D 的任何一个点被全纯扩张. 早在 1910 年莱维提出了它的逆问题:

莱维问题. 在一个边界点非全纯扩张的区域是否是个全纯域?

这个问题中的主要困难在于要从局部性质过渡到整体. 如果 D 在点 $a \in \partial D$ 非全纯扩张, 则存在一个局部的障碍: 函数 $f_a(z)$ 全纯于 $U_a \bigcap D$ 但不能全纯延拓到点 a. 然而, 如何由这种局部障碍构建出整体障碍, 即一个在整个区域 D 全纯的函数而不能延拓到 a? 这个困难在 1953 年被 (日本数学家) 冈洁克服, 他证明了对任意区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的莱维问题有肯定的解答. 在下一章中我们要谈及这个问题的解.

关于非全纯扩张区域的局部问题原来只是个简单的问题, 可用局部伪凸的方法去解决.

定理 3 (莱维 – Krzoska).[1] 如果在点 a 的邻域中具二阶光滑边界的区域 D, 在此点为严格伪凸, 则 D 在此点为非全纯扩张. 反之, 如果 D 在点 a 为非全纯扩张, 则它在此点为伪凸.

证明. 设 $a = 0$ 且 φ 为该区域在此点的局部定义函数. 不失一般性可设 φ 在点 z 的泰勒展式的线性部分为 0, 即 $L_0(z) = z_n/2$: 一般情形可经由非退化线性变换化为这种情形, 这个变换既不改变定理的条件也不改变其断言. 于是根据 (4) 这个展式具有形式

$$\varphi(z) = \operatorname{Re}(z_n + K_0(z)) + \frac{1}{2}H_0(z) + o(|z|^2), \tag{15}$$

而复切平面为 $T_0^c(\partial D) = \{z_n = 0\}$.

a) 设 D 在点 $a = 0$ 为严格伪凸. 于是就像定理 1 的证明中那样, 可以将 φ 变换为函数 $\varphi + k\varphi^2$, 其中 k 为适当的常数使得莱维形式 $H_0(z)$ 不仅在 T_0^c 上为正, 而且对所有 $z \neq 0$ 也如此, 并且这个变换不会破坏 φ 的展式 (15) 的形式. 然而, 由齐次性有

$$H_0(z) = |z|^2 H_0(z/|z|) \geqslant m|z|^2,$$

其中的 $m > 0$ 是 H_0 在球面 $\{|z| = 1\}$ 上的极小值.

现在我们考虑函数 $f(z) = z_n + K_0(z)$; 根据 (15), 在其零水平空间 $\{f(z) = 0\}$ 上, 当 $|z|$ 充分小时有

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}H_0(z) + o(|z|^2) \geqslant \frac{m}{2}|z|^2 + o(|z|^2) > 0.$$

[1] $n = 2$ 时的定理由莱维在 1909 年证明, 一般情形的证明出现在 Krzoska 1933 年的学位论文中.

因此, 水平空间 $\{f(z)=0\}$ 在充分小的邻域 $U \ni 0$ 整个都位于区域 D 之外, 其中的水平空间通过 $a=0$. 我们最后有, 函数 $1/f$ 在 $D\bigcap U$ 全纯, 但不能全纯延拓到点 $a=0$, 即 D 在此点不能全纯扩张.

b) 设 D 在点 $a=0$ 不是伪凸的. 于是存在向量 $\omega \in T_0^c$, 即 $\omega=('\omega,0)$, 使得 $H_0(\omega)<0$. 我们考虑全纯曲线 S_0, 它是由曲面 $\{z_n+K(z)=0\}$ 与通过轴 z_n 和向量 ω 的复二维曲面的截线得到. 这条曲线可借助于复参数 ζ 以方程

$$'z='\omega\zeta, \quad z_n=g(\zeta)=\alpha\zeta^2+o(|\zeta|^2)$$

给出 (我们考虑到, S_0 在点 $z=0$ 切于向量 ω). 就像在证明的第一部分那样, 我们得到了 $\varphi|_{S_0}=\dfrac{1}{2}H_0(\omega)|\zeta|^2+o(|\zeta|^2)$. 因为 $H_0(\omega)<0$, 故现在在充分小 $|\zeta|$, 设 $|\zeta|\leqslant\delta$, 曲线 S_0 的所有点, 除了 $z=0$ 外, 都在区域 D 中.

可以清楚看出, 在充分小的 $t>0$ 下, 有界全纯圆盘 $S_t=\{'z='\omega\zeta, z_n=g(\zeta)-t: |\zeta|<\delta\}$ 整个地属于区域 D, 而当 $t\to 0$ 时 $S_t\to S_0$ 和 $\partial S_t\to\partial S_0$. 根据连续性原理 (参看第 36 目) 得到: D 在点 $z=0$ 不是不能全纯扩张. □

推论. 设在点 $a\in\mathbb{C}^n$ 的邻域中实函数 $\varphi\in C^2$ 有 $\varphi(a)=0$, 且莱维形式 $H_a(\varphi,\omega)$ 在复切平面 $T_a^c(S)$ 至少有一个负的特征值 (即存在向量 $\omega\in T_a^c(S)$, 使得 $H_a(\varphi,\omega)<0$), 其中 $S=\{\varphi(z)=0\}$. 于是全纯于 S 的满足 $\varphi<0$ 的邻域部分的函数 f 全纯地被延拓到点 a.

证明. 这个事实已在莱维 – Krzoska 定理的证明 b) 中得证. □

注. 设区域 D 在某个边界点 a 从外部切于复超曲面 $A=\{f(z)=0\}$, 这表示 $f(a)=0$, 但在某个邻域 U_a 中曲面 A 在 D 的外部. 于是, D 不能在点 a 全纯扩张 (函数 $1/f$ 不能延拓), 从而根据所证的定理, 它在此点为伪凸. 这个伪凸的充分条件相似于几何凸性的条件 (在那里 A 必须换成实的超曲面).

迄今为止我们所考虑的是具 C^2 类边界的区域, 但是局部伪凸性可以在一般的情形中被阐述. 为此我们约定, 称区域 D 在边界点 a *可以从内部由全纯圆盘族相切*是说, 如果存在全纯圆盘族 $S_t\Subset D, 0<t\leqslant t_0$, 当 $t\to 0$ 时收敛于圆盘 S, 故而 $S_t\to S, \partial S_t\to\partial S$, 并且 $\partial S\Subset D$, 而 S 包含了点 a(图 40). 我们采用不具有这个性质作为在具任意边界的区域情形下的关于局部伪凸性的定义.

定义 3. 称区域 D 在边界点 a 为*伪凸*是说, 如果在此点它不能从内部由全纯圆盘族相切.

如果特别地, ∂D 在点 a 的邻域中为二阶光滑并在该点为在定义 1 的意义下伪凸, 则它也在定义 3 的意义下伪凸. 在莱维 – Krzoska 定理的证明 b) 中表明, 如果

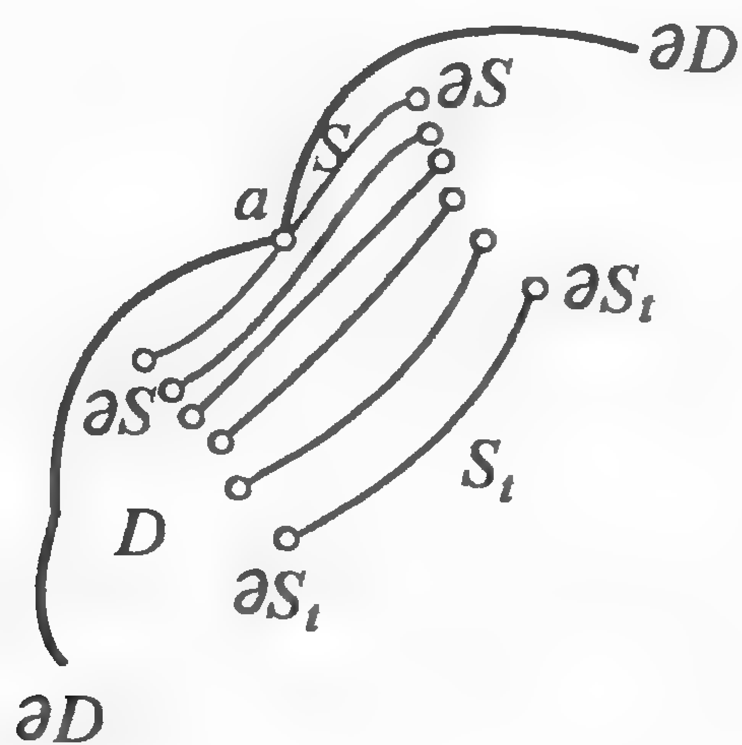


图 40

∂D 在点 a 不是在定义 1 意义下伪凸的, 则它在该点可以用全纯圆盘族从内部相切. 我们强调指出, 严格伪凸的概念意味着边缘的 C^2– 光滑性, 从而不能推广到任意的区域.

38. 多重次调和函数

为了从局部的伪凸性过渡到整体的伪凸性需要引进多重次调和函数的概念. 在卷 I 的附录中我们曾注意到, 次调和函数是单变量实函数凸性的高维类比. 事实上, 函数 $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ 为凸 (向下) 是说, 如果对任意 $x',x''\in[\alpha,\beta]$, 在区间 $[x',x'']$ 上 f 的最佳线性优势函数, 即一个函数, 它在点 $x=(1-t)x'+tx''$ 的取值为 $h(x)=(1-t)f(x')+tf(x'')$, 并满足条件:

$$\text{对所有 } x\in[x',x''],\quad \text{有 } f(x)\leqslant h(x).$$

(我们记得, 单变量的线性函数是调和函数的一维类比).

多变量的凸函数可以这样定义, 即它在任意实直线上的限制是个单变量凸函数, 二阶光滑的单变量函数的凸性条件是二阶导数为非负, 而由复合函数的微分法则, 对 C^2 类的多元函数 f 在直线 $x=x^0+\omega t$ 上的限制我们有

$$\frac{d^2}{dt^2}f(x^0+\omega t)=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_\mu\partial x_\nu}\Big|_x\omega_\mu\omega_\nu.$$

因此这种函数的凸性条件可化成所得到的这个二次型对所有 $\omega\in\mathbb{R}^n$ 的非负性.

多重次调和函数是多元凸函数的复类比.

定义 1. 称函数 $\varphi: D\to[-\infty,\infty)$ 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中为多重次调和函数是说, 如果 1) 它在 D 上为上半连续, 以及 2) 对任意点 $z^0\in D$ 和对任意复直线 $z=l(\zeta)=z^0+\omega\zeta$, 其中 $\omega\in\mathbb{C}^n,\zeta\in\mathbb{C},\varphi$ 在这些直线上的限制, 即函数 $\varphi\circ l(\zeta)$, 是开集 $\{\zeta\in\mathbb{C}:l(\zeta)\in D\}$ 上的次调和函数.

我们记得, 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的上半连续函数是 D 上的一个实函数 φ, 它可取 $-\infty$ 值但不取 $+\infty$, 并在每点 $z^0\in D$, 它满足

$$\overline{\lim_{z\to z^0}}\varphi(z)\leqslant\varphi(z^0),\tag{1}$$

或者换句话说, 如果对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta = \delta(z^0, \varepsilon) > 0$ 使得

$$|z - z^0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \varphi(z) - \varphi(z^0) < \varepsilon, & \text{如果 } \varphi(z^0) \neq -\infty, \\ \varphi(z) < -1/\varepsilon, & \text{如果 } \varphi(z^0) = -\infty. \end{cases} \tag{2}$$

对于上半连续性而言, 其充分必要条件是对于任意的 $\alpha \in (-\infty, \infty)$, 使值小于它的集合 $\{z \in D : \varphi(z) < \alpha\}$ 为开. 上半连续函数从上面的那一面看表现得像连续函数. 特别地, 在紧集 $K \Subset D$ 上它为上有界并取得极大值 (不必下有界和达到极小值).

全纯函数的对数模是多重次调和函数的重要例子: 如果 $f \in \mathscr{O}(D)$, 则 $\varphi(z) = \ln|f(z)|$ 在 D 中为上半连续 (它在使 $f(z) \neq 0$ 的点上连续, 而当 f 逼近 0 时它趋向于 $-\infty$), 而它在任意复直线 $z = l(\zeta)$ 上的限制作为单变全纯函数 $f \circ l$ 的对数模是次调和的 (参看卷 I 的附录).

C^2 类的次调和函数可以通过拉普拉斯算子 $\nabla = 4\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}$ 的非负性来进行特征刻画. 如果这个函数 φ 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中为二阶光滑, 则由复合函数的微分法则, 对于它在复直线 $z = z^0 + \omega\zeta$ 上的限制, 有

$$\frac{\partial^2 \varphi(z^0 + \omega\zeta)}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_{z^0} \omega_\mu \overline{\omega}_\nu.$$

我们因此得到下面的判别法.

定理 1. 对于函数 $\varphi \in C^2(D)$, 其为多重次调和的充分必要条件是在每点 $z \in D$, 对所有 $\omega \in \mathbb{C}^n$, 形式

$$H_z(\varphi, \omega) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\Big|_{z} \omega_\mu \overline{\omega}_\nu \geqslant 0. \tag{3}$$

我们又一次遇到了莱维形式: 我们曾在上一目中在与伪凸域相关的问题中考虑过它. 我们还要挑出一个二阶光滑的多重次调和函数的重要类, 它们与严格伪凸的概念有关.

定义 2. 称函数 φ 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为*严格多重次调和*是说, 如果 1) $\varphi \in C^2(D)$ 和 2) 在每个点 $z \in D$, 莱维形式对于所有 $\omega \in \mathbb{C}^n \backslash \{0\}$ 有

$$H_z(\varphi, \omega) > 0. \tag{4}$$

注. 埃尔米特莱维形式

$$H_z(\varphi, dz) = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} dz_\mu d\overline{z}_\nu$$

按在第 18 目中谈到过的标准规则, 其对应于微分形式

$$\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\partial\overline{z}_\nu}dz_\mu\wedge d\overline{z}_\nu=dd^c\varphi.$$

根据在第 18 目中所采用的约定, 二阶光滑函数 φ 的 (严格) 多重次调和函数可以由形式 $dd^c\varphi$ 的 (严格) 正性所刻画.

我们将在下一目中考察多重次调和函数与伪凸区域之间的联系. 在这里我们将专注于这些函数的性质, 其中我们感兴趣的函数不必是二阶光滑的, 而在一般情形它只是上半连续的而已.

由定义 1 可看出, 多重次调和函数的性质可径直约化为次调和函数的性质. 特别地, 由在卷 I 附录中所证的定理, 直接得到了下列的命题:

1° 如果在区域 D 中的多重次调和函数 φ 在某个点 $z^0\in D$ 达到其局部极大值, 则它在 D 中为常值.

2° 在每个点 $z^0\in D$ 的某个邻域中多重次调和函数是区域 D 中的多重次调和函数.

3° 如果函数族 $\varphi_\alpha,\alpha\in A$, 在区域 D 中为多重调和函数, 并在区域 D 中上半连续, 则其上确界函数

$$\varphi(z)=\sup_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(z)$$

在此区域中为多重次调和函数.

4° 使上半连续函数 φ 在区域 D 中为多重次调和函数的充分必要条件是, 对每个点 $z\in D$ 和每个向量 $\omega\in\mathbb{C}^n$, 存在数 $r_0=r_0(z,\omega)$, 使得对所有 $r<r_0$ 有

$$\varphi(z)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(z+\omega re^{it})dt \tag{5}$$

(多重次调和性判别法).

还存在命题:

5° 在点 $z^0\in\mathbb{C}^n$ 的邻域中的任意多重次调和函数 φ, 其值 $\varphi(z^0)$ 不超过其在球面 $\{|z-z^0|=r\}$ 上的平均值:

$$\varphi(z^0)\leqslant\frac{1}{\sigma(r)}\int_{\{|z-z^0|=r\}}\varphi(z)d\sigma, \tag{6}$$

其中半径 r 充分小, $\sigma(r)$ 为此球面的面积, 而 $d\sigma$ 为面积元.

证明. 不失一般性可设 $z^0=0$, 于是 (6) 式右端的均值可改写为

$$S(r)=\int_{S_r}\varphi(z)\sigma_0, \tag{7}$$

其中 $S_r=\{|z|=r\}$, 而 $\sigma_0=d^c\ln|z|^2\wedge(dd^c\ln|z|^2)^{n-1}/\pi^n$ 为庞加莱形式 (参看第 19 目). (7) 中的积分首先按照 S_r 与复直线 $l_\omega=\{z=\omega\zeta\}$ 的交线进行, 即按照圆 $\{|\zeta|=r\}$ 进行, 然后再沿这些直线的集合 $\{l_\omega\}=\mathbb{P}^{n-1}$ 进行 (我们假设 $|\omega|=1$). 因为在 l_ω 上, 形式 $\frac{1}{\pi}d^c\ln|z|^2=\frac{dt}{2\pi}$, 其中 $t=\arg\zeta$ (参看第 19 目), 则

$$S(r)=\int_{\mathbb{P}^{n-1}}\frac{1}{\pi^{n-1}}(dd^c\ln|z|^2)^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\omega re^{it})dt. \tag{8}$$

由其中 $z=0$ 的公式 (5) 知, 上面公式里面的那个积分不小于 $\varphi(0)$, 而 $dd^c\ln|z|^2/\pi=\omega_0$ 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 的富比尼 – 施图迪法化形式. 因此

$$S(r)\geqslant\varphi(0)\int_{\mathbb{P}^{n-1}}\omega_0^{n-1}=\varphi(0)$$

(在这里我们利用第 19 目中的定理 1). □

像在卷 I 中那样, 由 5° 推导出

6° 任意在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的多重次调和函数是 $2n$ 个实变量的次调和函数, 即对任意点 $z^0\in D$ 和球 $B=\{|z-z^0|<r\}$, 其中半径 r 充分小, 则任意在 B 中调和[1) 并在 $\overline{B}$ 中连续的函数 h 具有性质

$$\varphi\Big|_{\partial B}\leqslant h\Big|_{\partial B}\Rightarrow\varphi\Big|_B\leqslant h\Big|_B. \tag{9}$$

我们还需要一个命题:

7° 如果函数 φ 在点 $z^0\in\mathbb{C}^n$ 的一个邻域中多重次调和, 则它在球面 $\{|z-z^0|=r\}$ 上的平均值 $S(r)$ 是 r 的递增函数.

证明. 再次假设 $z^0=0$. 正如由 (8) 看到的, 只需证明次调和函数 $u(\zeta)=\varphi(\omega\zeta)$ 在圆 $\{|\zeta|=r\}$ 上的平均值递增, 即

$$s(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(re^{it})dt$$

为递增函数.

设 $r_2>r_1$ 且 $h(\zeta)$ 为函数 u 在圆盘 $\{|\zeta|<r_2\}$ 中的最佳调和优势函数 (参看卷 I 的附录第 3 目). 根据次调和与调和函数的性质, 我们于是有

$$s(r_1)\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(r_1e^{it})dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(r_2e^{it})dt=s(r_2).\quad\square$$

现在我们来证明, 任意多重次调和函数可以被相同类型但无限可微的函数所逼近.

---

1) 我们记得, 称 C^2 类函数 h 为调和是说, 在每个点, 成立 $\sum_{\nu=1}^n\frac{\partial^2 h}{\partial\zeta_\nu\partial\overline{\zeta}_\nu}=0$.

定理 2. 对任意在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中多重次调和函数 φ, 可以构造一个开集的递增序列 G_μ $(\mu = 1, 2, \cdots)$, $\bigcup\limits_{\mu=1}^{\infty} G_\mu = D$, 以及一个递降函数序列 $\varphi_\mu \in C^\infty(G_\mu)$, 它在 G_μ 中为多重次调和函数, 并在每个点 $z \in D$ 上收敛于 φ:

$$\varphi_\mu(z) \to \varphi(z), \quad \varphi_{\mu+1}(z) \leqslant \varphi_\mu.$$

证明. 如果 $\varphi \equiv -\infty$, 则作为 φ_μ 我们可取序列 $\varphi_\mu(z) \equiv -\mu$. 在一般情形我们利用平均法进行构造. 取函数

$$K(z) = \begin{cases} ce^{-1/(1-|z|^2)}, & |z| < 1, \\ 0, & |z| \geqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

并选取 c 使得 K 沿整个空间 $\mathbb{C}^n$ 的积分等于 1 (实际上是沿球 $\{|z| < 1\}$ 的积分, 这是由于在球外 $K = 0$). 我们令

$$\varphi_\mu(z) = \int \varphi\left(z + \frac{w}{\mu}\right) K(w) dV, \tag{11}$$

把这个函数作为平均的核, 其中 dV 为 $2n$ 维体积元, 积分则取在整个 $\mathbb{C}^n$ 上 (实际在单位球上). 可清楚看出, 每个函数 φ_μ 被定义在区域 D 的 $(1/\mu)$– 收缩之中, 即开集

$$G_\mu = \{z \in D : \delta(z, \partial D) > 1/\mu\}$$

之中, 其中的 δ 为欧几里得距离. 也清楚看到, 对任意 μ 有 $G_\mu \subset G_{\mu+1}$, 并且 $\bigcup\limits_{\mu=1}^{\infty} G_\mu = D$.

在变量变换 $z + \dfrac{w}{\mu} \mapsto w$ 之后, 积分 (11) 有形式

$$\varphi_\mu(z) = \mu^{2n} \int \varphi(w) K(\mu(w - z)) dV,$$

由其看出 $\varphi_\mu \in C^\infty(G_\mu)$ (事实上, 被积函数从而积分本身无限可微地依赖于 z). 利用由不等式 (5) 表达的判别式容易建立函数 φ_μ 的多重次调和性质: 对所有 $z \in G_\mu$, $\omega \in \mathbb{C}^n$ 及所有充分小的 r 有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_\mu(z + \omega r e^{it}) dt \\ &= \int K(w) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi\left(z + \frac{w}{\mu} + \omega r e^{it}\right) dt \right\} dV \\ &\geqslant \int K(w) \varphi\left(z + \frac{w}{\mu}\right) dV = \varphi_\mu(z) \end{aligned}$$

(我们利用了 φ 的多重次调和性和核 K 的非负性).

变换 $dV = d\sigma_r dr$, 其中 $d\sigma_r$ 为球面 $\{|w| = r\}$ 的曲面元, 而在变量变换 $z+\dfrac{w}{\mu} \mapsto w$ 之后, 我们变 (11) 为

$$\begin{aligned}
\varphi_\mu(z) &= \int_0^1 K(r)dr \int_{\{|w|=r\}} \varphi\left(z+\frac{w}{\mu}\right) d\sigma_r \\
&= \int_0^1 K(r)dr\mu^{2n-1} \int_{\{|w-z|=\frac{r}{\mu}\}} \varphi(w) d\sigma_{\frac{r}{\mu}} \\
&= \int_0^1 K(r)\mu^{2n-1}\sigma\left(\frac{r}{\mu}\right) S\left(\frac{r}{\mu}\right) dr \\
&= \int_0^1 K(r)\sigma(r) S\left(\frac{r}{\mu}\right) dr, \qquad (12)
\end{aligned}$$

其中 $S(r/\mu)$ 为 φ 在球面 $\{|w-z| = r/\mu\}$ 上的平均值, 而 $\mu^{2n-1}\sigma(r/\mu) = \sigma(r)$ 为半径为 r 的球面面积 [1]. 现在根据性质 7°, 可得出结论说, 函数 φ_μ 随 μ 增大而减小.

由于函数 φ 的次调和性, 其平均值 $S(r/\mu) \geqslant \varphi(z)$, 而因为

$$\int_0^1 K(r)\sigma(r)dr = \int KdV = 1,$$

则由 (12) 得出, 在任意点 $z \in D$, 对从某个 μ_0 开始的所有的 μ, 有 $\varphi_\mu(z) \geqslant \varphi(z)$. 另一方面, 由函数 φ 的半连续性, 对任意 $\varepsilon > 0$ 及对所有充分靠近 z 的 w, 有 $\varphi(w)-\varphi(z) < \varepsilon$, 即对所有 $\mu \geqslant \mu_0$ 有 $S(r/\mu) \leqslant \varphi(z)+\varepsilon$; 对这些 μ, 我们由 (12) 得到 $\varphi_\mu(z) < \varphi(z)+\varepsilon$. 因此, 对所有 $z \in D$

$$\lim_{\mu\to\infty} \varphi_\mu(z) = \varphi(z). \quad \square$$

注. (1) 次调和函数的递降序列的极限仍是次调和函数 (参看卷 I 附录的问题 10), 并且这个断言立即可能换到多重次调和函数上. 因而定理 2 的逆成立.

(2) 在定理 2 中, 用作逼近的函数可假定为严格多重次调和的, 为此只要替换 $\varphi_\mu(z)$ 为 $\varphi_\mu(z) + \dfrac{1}{\mu}|z|^2$ 即可.

定理 3. 如果函数 φ 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中为多重次调和, 而 $\psi : \varphi(D) \to \mathbb{R}$ 为 C^2 类递增凸函数, 则 $\psi \circ \varphi$ 为 D 中的多重次调和函数.

证明. 先设 $\varphi \in C^2(D)$. 由莱维形式的性质 b) (第 37 目)

$$H_z(\psi\circ\varphi, \omega) = \psi'\circ\varphi(z) H_z(\varphi, \omega) + \psi''\circ\varphi(z)|\partial\varphi(\omega)|^2,$$

而因为我们有 $\psi', \psi'' \geqslant 0$, 故这种情形下定理得证.

在一般情形中, 我们将利用定理 2 及其逆定理: 以光滑的多重次调和函数序列逼近 $\varphi : \varphi_\mu \searrow \varphi$; 依照我们所证过的结果知, 函数 $\psi \circ \varphi_\mu$ 为多重次调和, 而由于 ψ 是递增的连续函数, 故而 $\psi\circ\varphi_\mu \searrow \psi\circ\varphi$, 从而 $\psi \circ \varphi$ 为多重次调和. $\square$

---

[1] 我们替代 $K(w)$ 记作 $K(r)$, 这是因为根据 (10), K 只依赖于 $|w| = r$.

由多重次调和函数定义的要求, 它在复直线上的限制是个次调和函数. 这个性质让我们有下面更强的命题:

定理 4. 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中, 多重次调和函数 φ 在任意 m 维全纯曲面 $f : G \to \mathbb{C}^n, G \subset \mathbb{C}^m$ 上的限制也是在开集 $\Omega = \{\zeta \in G : f(\zeta) \in D\}$ 上的多重次调和函数.

证明. 为简明起见, 形式的计算仅限于 $m = 1$ 的情形, 即我们将证明 φ 在全纯曲线 $z = f(\zeta)$ 上的限制是个次调和函数.

先设 $\varphi \in C^2(D)$. 于是对于 $u = \varphi \circ f$ 由复合函数的微分法则知, 在任意点 $\zeta \in G$ 有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} \frac{\partial f_\mu}{\partial \zeta} \left(\overline{\frac{\partial f_\nu}{\partial \zeta}} \right).$$

因为 φ 为多重次调和, 故由定理 1 知, 在右端的那个形式为非负, 而这意味着 $u(\zeta)$ 为次调和函数.

一般的情形则用定理 2 及随其后的那个注解化成了前面所考虑过的情形. □

推论. 对于在全纯曲面 S 的邻域中的多重次调和函数 φ 而言, 它在 S 上的限制成立极大值原理.

特别, 对于有界全纯曲面 S (参看第 36 目) 这个原理可表述为

$$\|\varphi\|_S = \|\varphi\|_{\partial S}. \tag{13}$$

我们还将不加证明地叙述关于多重次调和函数的一个延拓定理 [1], 它类比于关于全纯函数延拓的黎曼定理 (第 32 目定理 3):

定理 (格劳尔特 – 雷默特 (Grauert-Remmert)). 任何一个在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中除去一个解析集外处处多重次调和, 并且在 D 上有界的函数, 可延拓为 D 中多重次调和的函数.

39. 伪凸域

在此, 我们将考虑在其边界的每个点为伪凸的区域, 从而引进伪凸性的整体性质. $\mathbb{R}^n$ 中凸域的一个特征是, 它们可以被小于凸函数值的那些集合所穷竭, 即在其上存在凸函数, 它们在趋向边缘时无限地增大. 如果把实结构换作复结构, 我们则转到了整体伪凸的概念.

[1] Grauert, H., Remmert. R. "复空间中的多重次调和函数", Math. Zeitschr., 1956, 65; 2,175 — 194.

定义 1. 称区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为 (整体) 伪凸是说, 如果在其上存在多重次调和函数 u, 使得当 $z \to \partial D$ 时, $u(z) \to +\infty$, 或者换句话说, 使得对所有 $\alpha \in \mathbb{R}$, 有

$$\{z \in D : u(z) < \alpha\} \Subset D. \tag{1}$$

我们发现, 平面 $\mathbb{C}$ 中的任意区域都是伪凸的. 事实上, 对 $\overline{\mathbb{C}} \backslash \{\zeta\}$, 作为定义中的函数 u 可取为: 当 $\zeta \neq \infty, u(z) = 1/|z-\zeta|$; 当 $\zeta = \infty$, 则 $u(z) = |z|$. 在一般情形, 函数

$$u(z) = |z| + \sup_{\zeta \in \partial D} \frac{1}{|z-\zeta|} = |z| + \frac{1}{\partial(z, \partial D)}$$

满足定义中的条件 (δ 表示欧几里得距离), 这是因为它连续 [1)] 并且是一个次调和函数族的上确界.

对于 $n > 1$, 这个概念具有的意义是: 它区分出了一个重要区域类, 像我们现在要证明的那样, 它等同于在第 37 目中在所有边缘点上为伪凸的区域类.

* 证明, 当 $n > 1$ 时区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : r < |z| < R\}$ 不是在所有边缘点伪凸. *

我们约定称 $R(a)$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在点 $a \in D$ 的哈托格斯半径是指中心在 a 的, 属于 D 与复直线 $l = \{'z = 'a, z_n = \zeta\}$ 交集的, 并平行于 z_n 轴的最大圆盘的半径:

$$R(a) = \delta(a, \partial D \bigcap l). \tag{2}$$

引理. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在其所有边界点为伪凸, 则函数 $u(z) = -\ln\ R(z)$ 在 D 中为多重次调和, 其中 $R(z)$ 为区域 D 在点 z 的哈托格斯半径.

证明. 对任意区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 其哈托格斯半径 R 为下半连续, 而函数 $u = -\ln\ R(z)$ 在 D 中为上半连续. 事实上, 对任意点 $a \in D$, 显然有 (参看图 41) $\lim\limits_{z \to a} R(z) \geqslant R(a)$. 还需要证明, 在引理的条件下, 函数 $u = -\ln\ R$ 在任意复直线

$$l_\omega = \{z \in \mathbb{C}^n : z = l(\zeta) = a + \omega\zeta\} \tag{3}$$

上的限制是在点 $\zeta = 0$ 的邻域中的次调和函数, 其中 $a \in D, \omega \in \mathbb{C}^n$. 如果 $'\omega = '0$. 即 l_ω 平行于 z_n 轴, 我们则有了平面的情形: $R|_{l_\omega} = \inf\limits_{z' \in \partial D \cap l_\omega} |z_n - z_n'|$, 从而函数

$$u|_{l_\omega} = -\ln\ R|_{l_\omega} = \sup_{z' \in \partial D \cap l_\omega} \{-\ln |z_n - z_n'|\}$$

作为次调和函数的上确界的上半连续函数是次调和的.

在 $'\omega \neq '0$ 的情形我们以归谬法证明. 如果函数

$$u|_{l_\omega} = -\ln\ R \circ l(\zeta) = v(\zeta) \tag{4}$$

[1)] 由三角不等式, 函数 $\delta(z, \partial D)$ 满足利普希茨条件, 且当 $z \in D$ 时 $\delta(z, \partial D) \neq 0$.

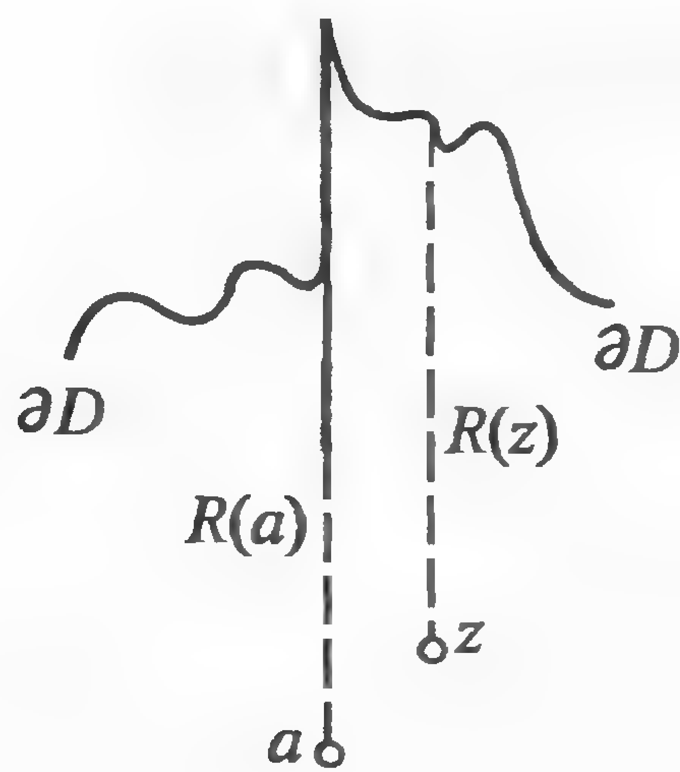


图 41

在 $\zeta=0$ 的邻域中不是次调和的, 则存在圆盘 $U=\{|\zeta|<r\}$ 和在 $\overline{U}$ 上连续而在 U 中调和的函数 h, 使得 $v(\zeta)\leqslant h(\zeta)$ 在 ∂U 上成立, 但是在某个点 $\zeta_0\in U$ 有

$$h(\zeta_0)-v(\zeta_0)=\inf_{\overline{U}}\{h(\zeta)-v(\zeta)\}=-\varepsilon<0$$

(我们利用了那样的事实, 即下半连续的函数 $h-v$ 在紧集上取得其下界). 我们以 $g(\zeta)=-h(\zeta)-\varepsilon$ 表示在 U 中调和且在 $\overline{U}$ 中连续的函数; 我们有

$$\begin{aligned}&g(\zeta)<-v(\zeta)\ 在\ \partial U\ 上,\\&g(\zeta)\leqslant -v(\zeta)\ 在\ \overline{U}\ 上,\\&g(\zeta_0)=-v(\zeta_0).\end{aligned}\tag{5}$$

设在 (3) 中的函数 $l(\zeta)=('l(\zeta),\lambda(\zeta))$, 使得 $'l(\zeta)='a+'\omega\zeta$ 和 $\lambda(\zeta)=a_n+\omega_n\zeta$. 由哈托格斯半径的定义, 存在点 $b=('b,b_n)\in\partial D$ 使得 $'b='l(\zeta_0),|b_n-\lambda(\zeta_0)|=R\circ l(\zeta_0)$. 构造在 U 中全纯的函数 $G=g+ig_*$, 使得 $G(\zeta_0)$ 等于某个值 $\ln(b_n-\lambda(\zeta_0))$: 因为由 (4) 和 (5) 我们有 $\ln|b_n-\lambda(\zeta_0)|=-v(\zeta_0)=g(\zeta_0)$, 故这是可以做到的.

现在考虑全纯圆盘族

$$S_t=\{z\in\mathbb{C}^n:'z='l(\zeta),z_n=\lambda(\zeta)+te^{G(\zeta)},\zeta\in\overline{U}\}.\tag{6}$$

对于任意点 $z\in S_t,0\leqslant t\leqslant 1$, 我们有 $'z='l(\zeta)$ 并且由于 (5) 中第二个不等式有

$$|z_n-\lambda(\zeta)|=te^{g(\zeta)}\leqslant te^{-u(\zeta)}=tR\circ l(\zeta).$$

由哈托格斯半径的定义得知, 当 $t<1$ 时所有的 $S_t\subset D$. 由 (5) 的第一个不等式, 类似地我们得到在所有 $t,0\leqslant t\leqslant 1$, 有 $\partial S_t\subset D$. 当 $t\to 1$ 时圆盘 $S_t\to S_1$, 而因为当 $\zeta=\zeta_0$ 时有 $'z='l(\zeta_0)='b$ 和 $z_n=\lambda(\zeta_0)+e^{G(\zeta_0)}=b_n$ (我们有 $\ln G(\zeta_0)=b_0-\lambda(\zeta_0)$), 故 S_t 包含了点 $b\in\partial D$. 我们便得到了矛盾, 因为由条件, 区域 D 在点 b 为局部伪凸. □

注. 在第 8 目我们曾引进过哈托格斯级数

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} g_{\mu}('z) z_n^{\mu} \tag{7}$$

的收敛区域, 它是这个级数的收敛集 $D = \{('z, z_n) : 'z \in 'D, |z_n| < R('z)\}$ 的开核 (在这里, 我们假定了 g_μ 在 $'D$ 中全纯). $R('z)$ 显然是区域 D 的哈托格斯半径. 重复在 $'\omega \neq '0$ 情形的引理的证明, 只要稍加变化 [1] 便可证明函数 $-\ln\ R('z)$ 在 $'D$ 中为多重次调和.

定理 1. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在其每个边界点为局部伪凸, 则它是整体伪凸.

证明. 函数 $u(z) = -\ln\ \delta(z, \partial D)$ 在区域 D 中连续 (但除去平凡情形 $D = \mathbb{C}^n$), 并且当 $z \to \partial D$ 时趋向于 $+\infty$. 还要证明它在 D 中为次调和的.

以 l_ω 表示复直线 $\zeta \mapsto z + \omega\zeta$, 它沿向量 ω 的方向通过点 $z \in D$, 并记 $R_\omega(z) = \delta(z, \partial D \bigcap l_\omega)$. 显然, 对所有的 $z \in D$, 有

$$\delta(z, \partial D) = \inf_{\omega}\ R_\omega(z),$$

其中下界是对所有 $\omega \in \mathbb{C}^n, |\omega| = 1$ 取的.

利用复旋转 $z \mapsto Cz$, 其中 $C = (c_{\mu\nu})$ 为 $n \times n$ 的酉矩阵, 方向 ω 可以变化到 z_n 轴的方向, 于是 R_ω 变成了区域 D 的哈托格斯半径. 因为这样的旋转保持了欧几里得距离和伪凸性 (局部的和整体的), 故由引理可以断言函数 $-\ln\ R_\omega(z)$ 在区域 D 中为多重次调和. 但是因而

$$u(z) = -\ln\ \delta(z, \partial D) = \sup_{\omega}(-\ln\ R_\omega(z))$$

作为多重次调和函数的连续上确界, 故也在 D 中为多重次调和. □

定理 2. 任意伪凸域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 在每个边界点为伪凸.

证明. 相反地设 D 在某点 $a \in \partial D$ 不是伪凸的. 于是存在全纯圆盘序列 S_ν, 使得 $S_\nu \to S, \partial S_\nu \to \partial S$, 并且 $\overline{S}_\nu, \partial S \subset D$, 而 S 包含了点 a. 由于 D 的伪凸性, 存在

---

[1] 这些变化如下: ① 需要取 $-\ln\ R$ 在直线 $'z = l(\zeta)$ 上的限制; ② 令 $'b = l(\zeta_0)$, 需要选取 b_n 使得 $|b_n| = R('b)$, 并且点 $b = ('b, b_n)$ 为 f 的奇点; 因为在每个圆 $\{'z, |z_n| = r('z)\}$ 上至少有一个 f 的奇点, 故这是可以做到的; 在这里的 $r('z)$ 为级数 (7) 对固定 $'z$ 的收敛半径, 而 $R('b) = \varliminf_{z \to 'b} r('z)$ (参看第 8 目的第 1 个脚注), 从而在圆 $\{'b, |b_n| = R('b)\}$ 上有奇点的极限点; ③ 函数 $G = g + ig_*$ 需要选取得使 $G(\zeta_0) = \ln\ b_n$ (因为 $g(\zeta_0) = \ln\ |b_n|$, 故这可以做到), 又替代 (6), 取曲线族 $S_t = \{'z = l(\zeta), z_n = te^{G(\zeta)}, \zeta \in U\}$. 断言由归谬法证明, 基于的事实是: 由连续性原理, f 被延拓至点 b, 而它是奇点.

在 D 中多重次调和的函数 $u(z)$, 它在 $z \to \partial D$ 时趋向于 $+\infty$. 按照对多重次调和函数的极大值原理 (前一目中定理 4 的推论)

$$\sup_{S_\nu} u \leqslant \sup_{\partial S_\nu} u < c < \infty, \tag{8}$$

其中的常数 c 与 ν 无关, 这是因为 ∂S_ν 的并为闭包紧于 D. 然而从另一方面看, 存在收敛于点 $a \in \partial D$ 的点序 $z^\nu \in S_\nu$, 于是由此得到 $u(z^\nu) \to \infty$, 这与 (8) 矛盾. □

定理 1 和 2 联合在一起表明了, 区域的整体伪凸性的概念实际上等价于在其每个边界点的伪凸性. 我们还发现有

推论. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为伪凸当且仅当函数 $-\ln\,\delta(z, \partial D)$ 在 D 中为多重次调和.

证明. 函数 $-\ln\,\delta(z, \partial D)$ 的多重次调和性作为充分条件来自于伪凸性的定义. 这个条件是必要的: 设 D 为伪凸; 由定理 2, 它在每个边缘点为伪凸, 然而由定理 1 的证明中看到, 函数 $-\ln\,\delta(z, \partial D)$ 在 D 中为多重次调和. □

对于具二阶光滑边界的区域, 整体伪凸性可以不用穷竭的语言描述 (就像在定义 1 中那样) 而类似在第 37 目中对局部伪凸性所做的那样, 利用定义函数. 我们称函数 φ 整体定义了区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是说, 如果它在整个边界 ∂D 的某个邻域 Ω 中属于 C^2 类, 并在此邻域中对于所有的 $z \in \partial D$ 成立, 有 $D \bigcap \Omega = \{z \in \Omega : \varphi(z) < 0\}$ 且梯度 $\nabla_z \varphi \neq 0$ (参照第 37 目).

定义 2. 称具 C^2 类边界的区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为 (整体) 伪凸的是说, 如果它有整体定义函数 φ, 使它的莱维形式 $H_z(\varphi, \omega) \geqslant 0$, 其中所有的 $z \in \partial D, \omega \in T_z^c(\partial D)$; 称其为严格伪凸的是说, 如果它有界, 并且 $H_z(\varphi, \omega) > 0$, 其中所有的 $z \in \partial D, \omega \in T_z^c(\partial D), \omega \neq 0$.

像在第 37 目中那样, 可以证明这些条件不依赖于定义函数的选取, 故而它们对其中某一个满足, 则对其他所有的也满足. 由隐函数定理可以知道, 对于具二阶光滑边界的区域的定义函数可以选为具形式

$$\varphi(z) = \begin{cases} -\delta(z, \partial D), & z \in \Omega \bigcap D, \\ \delta(z, \partial D), & z \in \Omega \backslash \overline{D}, \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\delta(z, \partial D)$ 为点 z 到 ∂D 的欧几里得距离, 并且这条带状邻域充分狭窄. 也可看出, 区域为 (严格) 伪凸当且仅当它在每个边界点在第 37 目的意义下为 (严格) 伪凸.

我们将指出整体伪凸性和多重次调和性之间的关联. 它对于严格伪凸的区域特别简单.

定理 3. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 严格伪凸当且仅当它具有严格多重次调和的定义函数.

证明. 条件的充分性是显然的, 而必要性的证明实质上与第 37 目中定理 1 的证明相同. 设 φ 为区域 D 的某个定义函数, 例如 (9); 如果带状 Ω 充分狭窄, 则定义函数从而也可以是函数 $\psi = \varphi + k\varphi^2$, 其中 $k \geqslant 0$ 为某个常数, 并且对所有 $z \in \partial D$ 有

$$H_z(\psi,\omega) = H_z(\varphi,\omega) + 2k|\partial\varphi(\omega)|^2 \tag{10}$$

(参照第 37 目的 (13)). 只需证明 $H_z(\psi,\omega)$ 在紧集 [1] $E = \{(z,\omega) : z \in \partial D, \omega \in \mathbb{C}^n, |\omega| = 1\}$ 上为正即可. 记 $E_0 = \{(z,\omega) \in E : H_z(\varphi,\omega) \leqslant 0\}$; 如果 E_0 为空则令 $k=0$, 如果非空, 则选取常数 $M \geqslant 0$ 使得 $H_z(\varphi,\omega) \geqslant -M$ 对所有 $(z,\omega) \in E_0$ 成立.

按照在 $\partial\varphi(\omega) = 0$ 即在 $T_z^c(\partial D)$ 上时严格伪凸的定义, 对于所有 $z \in \partial D, \omega \neq 0, H_z(\varphi,\omega) > 0$, 因此在 E_0 上有 $\partial\varphi(\omega) \neq 0$, 并且由于紧性, 存在 $m > 0$ 使得 $|\partial\varphi(\omega)| \geqslant m$. 选取 $k > M/(2m^2)$, 我们由 (10) 得到: 在 E_0 上形式 $H_z(\psi,\omega) \geqslant -M + 2km^2 > 0$, 而在 $E\backslash E_0$ 上它为正是显然的. 由连续性的考虑可清楚看到, 如果 Ω 充分狭窄, 则当 $\omega \neq 0$ 时不仅在 ∂D 上 $H_z(\psi,\omega) > 0$, 而且对所有 $z \in \Omega$ 也成立, 然而这意味着函数 ψ 为严格多重次调和. □

我们注意到, 函数 ψ 可以在带状 Ω 内部延拓到负的严格多重次调和函数 (例如, 在水平曲面 $\psi(z) = -\varepsilon$ 内部令它等于 $-\varepsilon$, 然后再使其光滑; 对此详细的证明却相当的繁复). 因此严格伪凸的区域可以定义为在一个闭区域的邻域中使严格多重次调和函数取负值的集合.

对于只是伪凸的区域, 事情更为复杂. 在一般情形它们不能表示为次调和函数的负值集合.

* 对于在第 11 目中法图 (Fatou) 映射下 $\mathbb{C}^2$ 的像而言, 证明上面所说的断言. *

但是不久前狄德里希 (K. Diederich) 和弗纳斯 (J. Fornæss) 证明了 [2], 对于具有二阶光滑边缘的任意有界伪凸区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 在 $\overline{D}$ 的邻域中存在 C^2 类的定义方程 φ, 使得在 $\eta > 0$ 充分小时 $\psi = -(-\varphi)^\eta$ 在 D 中为多重次调和 (甚至是严格的). 但是, 我们发现, 函数 φ 本身不必是多重次调和的 (函数 $\varphi = -(-\psi)^{1/\eta}$ 递增却不是凸的, 参看第 38 目的定理 3), 而 ψ 也不为定义函数 (它在 $\overline{D}$ 外无定义, 而在 ∂D 它的梯度可能不存在).

在本目最后, 我们给出刻画 $\mathbb{C}^n$ 中全纯域的各种条件的一个总结.

定理 4. 下面的五个条件等价:

(I) D 为全纯域 (即存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 它不能被延拓到更大的区域中, 参看第 33 目);

---

[1] 我们已知, 严格伪凸的区域 D 为有界, 从而 ∂D 为紧.

[2] 参看 Diederich 和 J. Fornæss, *Pseudoconvex domains: bounded strictly plurisubharmonic exhaustion functions*, Invent. Math. 39 (1977), 129 — 141.

(Ⅱ) D 全纯凸 (即对任意集合 $K \Subset D$, 其全纯凸包 $\widehat{K}_{\mathscr{O}} = \{z \in D : |f(z)| \leqslant \|f\|_K$, 对所有 $f \in \mathscr{O}(D)\} \Subset D$, 参看第 34 目);

(Ⅲ) 在其每个边界点 D 不能全纯扩张 (即对每个点 $a \in \partial D$, 存在邻域 U 及函数 $f \in \mathscr{O}(D \bigcap U)$, 它不能延拓到点 a, 参看第 37 目);

(Ⅳ) 在其每个边界点 D 为局部伪凸 (即在每个点 $a \in \partial D$ 它都不能被全纯圆盘族从内部相切, 参看第 37 目);

(Ⅴ) D 为伪凸 (即存在 D 中的多重次调和函数, 当点趋向 ∂D 时它趋向 $+\infty$, 参看第 39 目).

证明. 在前面我们已经证明了下面的蕴含关系;

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{II} \\ \Downarrow \\ \mathrm{III} \Rightarrow \mathrm{IV} \Leftrightarrow \mathrm{V} \end{array}$$

(等价关系 Ⅰ ⇔ Ⅱ 构成了第 34 目的定理 1 和 2 的内容, Ⅳ ⇔ Ⅴ 是本目的定理 1 和 2, 蕴含 Ⅲ ⇒ Ⅳ 为第 36 目的连续性原理, Ⅰ ⇒ Ⅲ 是平凡的). 在下一章中, 我们将证明 (第 45 目) 在 $\mathbb{C}^n$ 中任何一个伪凸域是全纯域, 即证明了蕴含关系 Ⅴ ⇒ Ⅰ. 这样就使我们的等价链封闭了起来.

§14. 全纯包

如果 D 不是全纯域, 则任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可全纯延拓至更大的区域. 这便产生了找寻所称做的区域 D 的全纯包的问题, 即那个使 $\mathscr{O}(D)$ 中所有函数均在其中可延拓的最大区域. 这个问题不仅作为基础性观点看是重要的, 而且从应用的观点看, 例如在量子物理中 [1], 也是重要的.

40. 单叶包

在第 33 目中我们曾给出了一个区域 D 的例子, 其上的每个全纯函数都可延拓至更大的区域, 并且在延拓时某些函数被发现是多值的, 从而这个区域的全纯包是个黎曼 (多叶) 区域. 我们将在下一目中考虑这种区域, 而在这里我们仅局限于那些不会产生类似现象的情形.但是我们将给出的定义要使其能推广到多叶情形.

定义. 称区域 $\widetilde{D} \subset \mathbb{C}^n$ 为区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的 (单叶) 全纯包是说, 如果:

1) $D \subset \widetilde{D}$, 且每个函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可延拓为 $\widetilde{D}$ 中全纯的函数;

[1]参看 N. N. BOGOLYUBOV 和 D. V. SHIRKOV, *Introduction to quantum field theory*, 3rd revised ed., “Nauka”, Moscow, 1976; 英译本, Wiley, New York, 1980.

2) 对任意点 $z^0 \in \widetilde{D}$, 存在函数 $f_0 \in \mathscr{O}(\widetilde{D})$, 它在球 $B(z^0, r)$ 的限制不能全纯延拓到球 $B(z^0, R)$, 其中 $r = \delta(z^0, \partial\widetilde{D}), R > r$[1].

由前面所谈到过的, 并不是所有 $\mathbb{C}^n$ 的区域都有单叶全纯包. 在这一目中我们将考虑单叶全纯包的基本性质, 也考虑对最简单类型的区域构造全纯包的问题.

首先我们注意到, 全纯包是在第 33 目的意义下的区域的全纯扩张. 因此由第 33 目定理 1 知, 任意在区域 D 中全纯的函数在该区域的全纯包 $\widetilde{D}$ 中所取的值, 只是它在 D 中所取的那些值. 特别地, 有界区域的全纯包总是有界区域 (这个论断由前面所说得到, 这时只要应用它到坐标 $z_\nu, \nu = 1, \cdots, n$ 上).

进一步, 在全纯包定义中极大性条件 2) 可以实质性地强化. 这个条件是 $\mathscr{O}(\widetilde{D})$ 中某个函数的不可局部延拓的性质, 然而可以断言, 在 $\mathscr{O}(\widetilde{D})$ 中存在整体不可延拓的函数. 换句话说成立

定理 1. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的单叶全纯包 $\widetilde{D}$ 是个全纯域.

证明. 根据第 34 目的结果只需证明 $\widetilde{D}$ 为全纯凸. 设 $K \Subset \widetilde{D}$ 以及 $\rho(K, \partial\widetilde{D}) = r$, 按照同步延拓引理 (第 34 目), 任意函数 $f \in \mathscr{O}(\widetilde{D})$ 可全纯延拓到以任意点 $z \in \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$ 为中心的多圆柱 $U(z, r)$ 中. 由全纯包定义中的条件 2) 推出 $\rho(z, \partial\widetilde{D}) \geqslant r$, 从而 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(\widetilde{D})}, \partial\widetilde{D}) \geqslant r$. 然而因为这个距离不可能大于 r, 故 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(\widetilde{D})}, \partial\widetilde{D}) = \rho(K, \partial\widetilde{D})$, 从而 $\widetilde{D}$ 为全纯凸. □

推论. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 具有单叶全纯包 $\widetilde{D}$, 则后者是包含 D 的最小全纯域 (即所有包含 D 的全纯域的交).

证明. 如果 G 为包含 D 的全纯域, 则 $G \supset \widetilde{D}$ (因为 $\mathscr{O}(G) \subset \mathscr{O}(D)$, 故任意 $f \in \mathscr{O}(G)$ 可全纯延拓到 $\widetilde{D}$). 但由定理 1, $\widetilde{D}$ 是全纯域, 从而 $\widetilde{D}$ 是包含 D 的最小全纯域. □

注. 初看起来可能表明了: 相似于定理 1, 从局部的非扩张区域可推导出它的整体不可扩张性, 即在上一目的定理 4 中的蕴含关系 (Ⅲ) ⇒ (Ⅰ). 但是在条件 (Ⅲ) 中考虑的函数不是在整个区域上全纯, 而只是在边界点的邻域中全纯, 因而定理 1 的证明在这里过不去. 正像我们已经说过的, 蕴含 (Ⅲ) ⇒ (Ⅰ) 构成了非常精妙的冈洁定理的内容.

为了证明后面的定理我们需要一个引理.

引理. 如果 D 为全纯域, 则它的 $r-$ 收缩 $D_r = \{z \in D : \rho(z, \partial D) > r\}$ 的任一连通分支 Δ 也是全纯域.

[1] 代替球可以取多圆盘 $U(z^0, r)$, 其中 $r = \rho(z^0, \partial D)$.

证明. 设 $K \Subset \Delta, \rho(K, \partial\Delta) = \rho$; 对任意点 $z \in K$ 和 $\zeta \in \partial D$, 在线段 $[z, \zeta]$ 上存在点 $z' \in \partial\Delta$ 使得

$$\rho(z, \zeta) = \rho(z, z') + \rho(z', \zeta) \geqslant \rho + r.$$

因此 $\rho(K, \partial D) \geqslant \rho + r$, 而因为 D 为全纯域, 故由第 34 目定理 3 有

$$\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}, \partial D) \geqslant \rho + r. \tag{1}$$

我们需要证明 $\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}(\Delta)}, \partial\Delta) \geqslant \rho$, 即对任意点 $z^0 \in \widehat{K}_{\mathscr{O}(\Delta)}$ 和 $z' \in \partial\Delta$ 有 $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$. 然而因为 $\Delta \subset D$, 则 $\widehat{K}_{\mathscr{O}(\Delta)} \subset \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$, 从而 $z^0 \in \widehat{K}_{\mathscr{O}(D)}$. 并根据 (1) 有 $\rho + r \leqslant \rho(z^0, \partial D) \leqslant \rho(z^0, z') + \rho(z', \partial D) = \rho(z^0, z') + r$ (因为 $z' \in \partial\Delta$, 我们有 $\rho(z', \partial D) = r$). 由此得到 $\rho(z^0, z') \geqslant \rho$. □

定理 2. 如果 $D \subset G$ 并且这两个区域都有单叶全纯包 $\widetilde{D}$ 和相应的 $\widetilde{G}$, 则 $\widetilde{D} \subset \widetilde{G}$, 并且

$$\rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{G}) \geqslant \rho(\partial D, \partial G). \tag{2}$$

证明. 因为 $\mathscr{O}(G) \subset \mathscr{O}(D)$, 故任意函数 $f \in \mathscr{O}(G)$ 可全纯延拓到 $\widetilde{D}$, 从而 $\widetilde{D} \subset \widetilde{G}$. 设 $\rho(\partial D, \partial G) = r > 0$ (对 $r = 0$, 定理为平凡), 于是 $D \subset G_r \subset (\widetilde{G})_r$. 显然, D 属于集合 $(\widetilde{G})_r$ 的某个连通分支, 根据所证的引理它是个全纯域. 但是 $\widetilde{D}$ 属于此分支, 从而也属于集合 $(\widetilde{G})_r$; 故 $\rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{G}) \geqslant r$. □

推论. 如果 D 为有界区域, 并具有单叶全纯包 $\widetilde{D}$, 则交集 $\partial D \bigcap \partial\widetilde{D}$ 非空.

证明. 对区域 D 和 $G = \widetilde{D}$ 应用定理 2:

$$\rho(\partial D, \partial\widetilde{D}) \leqslant \rho(\partial\widetilde{D}, \partial\widetilde{D}) = 0$$

(我们利用的事实是: 全纯域的全纯包等于此区域). 因为 ∂D 为紧 (因为 D 有界), 故由等式 $\rho(\partial D, \partial\widetilde{D}) = 0$ 得出集合 ∂D 和 $\partial\widetilde{D}$ 相交. □

我们来描述一些最简单类型的区域的全纯包.

(1) 管状域. 我们记得, 称做底为 $B \subset \mathbb{R}^n$ 的管状域的是区域 $T = B \times \mathbb{R}^n(y)$, 即 $T = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in B\}$ (参看第 2 目).

定理 3. 管状域 T 的全纯包是其凸包 $\widehat{T}$.

证明. 显然, $\widehat{T} = \widehat{B} \times \mathbb{R}^n(y)$, 其中 $\widehat{B}$ 是底 B 在空间 $\mathbb{R}^n(x)$ 中的凸包. 我们来证明, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(T)$ 可全纯延拓至 $\widehat{T}$. 区域 $\widehat{B}$ 是线段 $[x^1, x^2]$ 中点的集合,其中 $x_1, x_2 \in B$. 如果 x^1 和 x^2 可以在 B 中用两段折线相连接 $[x^1, x^0] \bigcup [x^0, x^2]$, 则由棱柱引理 (第 36 目) 直接推出 f 可延拓到集合 $[x^1, x^2] \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中.

在一般情形, 点 $x^1, x^2 \in B$ 可以由 B 中有限条折线相连接 (图 42). 利用同一个引理, 我们对折线的条数进行归纳, 再次证明了 f 可全纯延拓到 $[x^1, x^2] \times \mathbb{R}^n(y)$ 的邻域中. 同一个引理还证明了函数 f 在所描述过的延拓中保持了单值. 事实上, 设 x 为两条线段 $[x^1, x^2]$ 和 $[\widetilde{x}^1, \widetilde{x}^2]$ 的交点, 其中这两条线段的端点属于 B 并且在点 $z = x + iy$ 我们得到两个值 f 和 $\widetilde{f}$. 考虑棱柱 $[x^1, x, \widetilde{x}^1] \times \mathbb{R}^n(y)$; 由所引述的引理知, 函数 f 和 $\widetilde{f}$ 在其中为全纯, 而因为它们在点 $x^1 + iy$ 和 $\widetilde{x}^1 + iy$ 的邻域中相等, 故由唯一性定理, 它们在整个棱柱上相等.

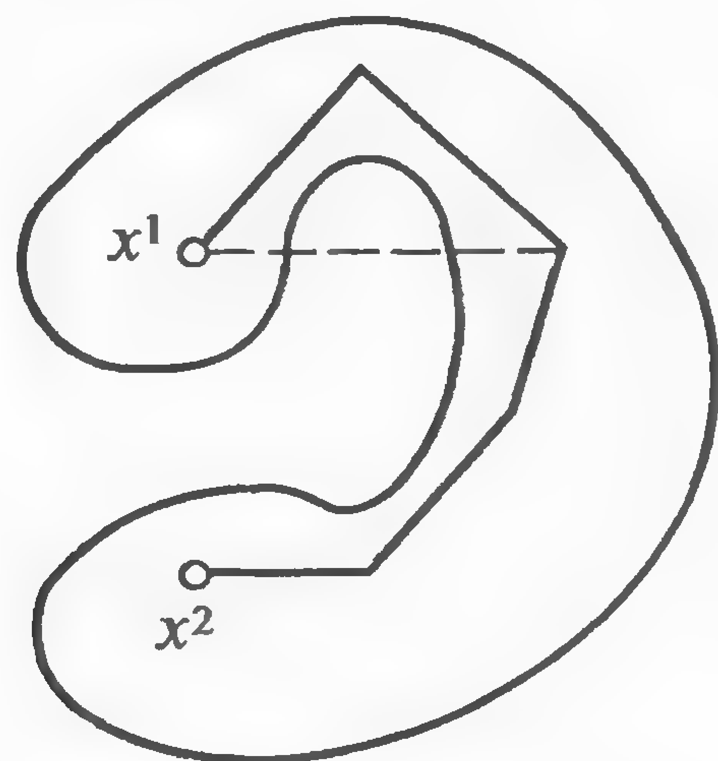


图 42

因此, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(T)$ 可全纯延拓到 $\widehat{T}$. 然而 $\widehat{T}$ 是个凸域从而是全纯域 (第 33 目). 故 $\widehat{T}$ 为区域的全纯包. □

(2) 赖因哈特域. 在第 7 目中我们曾证明, 任意在中心为点 a 的完全赖因哈特域 [1] D 中全纯的函数 f, 可全纯地延拓到这个区域的对数凸包 $\widehat{D}_L$ 中. 这种延拓通过 f 的泰勒展式

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k (z-a)^k \tag{3}$$

实现, 此级数的收敛区域是对数凸的区域 (第 7 目的定理 3).

定理 4. 完全赖因哈特域 D 的全纯包是它的对数凸包 $\widehat{D}_L$.

证明. 因为任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 都可全纯延拓至 $\widehat{D}_L$, 故还需证明的只是 $\widehat{D}_L$ 为全纯域. 不难看出, $\widehat{D}_L$ 相对于单项式类 $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ 为凸, 这里的 k_ν 为非负整数. 事实上, 区域的对数凸性意味着其在映射 $\lambda: z \mapsto (\ln|z_1|, \cdots, \ln|z_n|)$ 下的像为几何凸 (参看第 7 目). 在此映射下, 单项式转换为线性函数 $k_1 \ln|z_1| + \cdots + k_n \ln|z_n|$, 而由 $\lambda(\widehat{D}_L)$ 的几何凸性得到 $\widehat{D}_L$ 的相对于单项式类的凸性. 因为当 $k_\nu \geqslant 0$ 时单项式 $z^k \in \mathscr{O}(\widehat{D}_L)$, 故由第 34 目的定理 1 (参看随其后的附注) 知 $\widehat{D}_L$ 为全纯域. □

推论. 任意对数凸的完全赖因哈特域是某个幂级数的收敛区域.

[1]完全赖因哈特域的定义见第 2 目.

证明. 由刚刚证过的定理知, 这样的区域是全纯域, 从而存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 不可延拓到 D 的范围之外. f 的泰勒展式便以 D 为其收敛区域. □

注. 如果我们不考虑泰勒展式而替代地考虑洛朗展式, 则会得到更加一般的结果: 任意相对完全的赖因哈特域 (参看第 8 目) 的全纯包是它的对数凸包.

(3) 哈托格斯域[1]. 为了使书写简化, 我们仅局限于具对称平面 $a_n = 0$ 的区域, 这并不失一般性.

定理 5. 其在空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 上投影 $'D$ 为全纯域的完全哈托格斯域 $D = \{z = (z', z_n) : z' \in {}'D, |z_n| < r('z)\}$ 的全纯包是个哈托格斯域

$$\widetilde{D} = \{z = ('z, z_n) : 'z \in {}'D, |z_n| < e^{V('z)}\}, \tag{4}$$

其中 $V('z)$ 为函数 $\ln\ r('z)$ 在区域 $'D$ 中的最佳多重次调和的优势函数.

证明. 事实上, 由第 8 目中所证明的事实知道, 任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可由在 D 中的哈托格斯级数

$$f(z) = \sum_{\mu=0}^{n} g_\mu('z) z_n^\mu \tag{5}$$

表示, 从而可全纯地延拓到这个级数的收敛区域 $G_f = \{'z \in D, |z_n| < R_f('z)\}$. 显然, R_f 是区域 G_f 的哈托格斯半径. 由第 39 目的引理 (参看随其后的附注), 函数 $\ln\ R_f$ 在 $'D$ 中为多重次调和, 即 G_f 是形如 (4) 的区域, 其中的 $V = \ln\ R_f$ 是函数 $\ln\ r$ 的某个多重次调和的优势函数. 因此, 对任意 $f \in \mathscr{O}(D)$, 区域 $G_f \supset \widetilde{D}$, 其中 $\widetilde{D}$ 为 (4) 中所定义的区域, 而因为区域 D 的全纯包是所有这种 G_f 的交集, 故此全纯包包含了 $\widetilde{D}$.

还需证明 $\widetilde{D}$ 是个全纯域. 因为由定理条件, $'D$ 是个全纯域, 故它为伪凸, 即存在在 $'D$ 中的多重次调和函数 $u_1('z)$, 当点趋向边界时它趋向 $+\infty$. 进而, 由于 V 的多重次调和性知函数 $\ln \dfrac{|z_n|}{e^V} = \ln\ |z_n| - V$, 以及由第 38 目定理 3, 函数 $u_2(z) = -\ln\ \ln \dfrac{e^V}{|z_n|}$ 都在 $\widetilde{D}$ 中为多重次调和. 于是函数 $u(z) = \max(u_1('z), u_2(z))$ 在 $\widetilde{D}$ 中为多重次调和, 而当趋近 ∂D 时它趋向 $+\infty$. 故而 $\widetilde{D}$ 伪凸, 从而由第 39 目定理 4 得到结论: 它是个全纯域. □

注. 如果考虑哈托格斯 – 洛朗展开, 则可以得到更为一般的结果: 其投影 $'D$ 是空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的全纯区域, $D = \{('z, z_n) : 'z \in {}'D, r_1('z) < |z_n| < r_2('z)\}$ 的全纯包是

$$\widetilde{D} = \{('z, z_n) : 'z \in {}'D, e^{V_1('z)} < |z_n| < e^{V_2('z)}\}, \tag{6}$$

[1] 哈托格斯域的定义见第 2 目.

其中 V_1 是函数 $\ln r_1$ 的最佳多重次调和优势函数, 而 V_2 是 $\ln r_2$ 的最佳多重次调和优势函数 [1)].

在定理 5(及其推广) 中, 实质性的条件是区域 D 的投影 $'D$ 是个全纯域, 不然的话, 区域 (4) 和 (6) 将不再是个全纯包而仅仅是个 D 的全纯扩张. 我们发现, 不是任何一个哈托格斯域都有单叶色. 为了确信这点, 只要在 $\mathbb{C}^3$ 中取一个区域, 其在 $\mathbb{C}^2$ 中的投影为第 33 目的例子中的那个具非单叶全纯包的区域即可.

41. 多叶包

我们现在考虑黎曼区域的扩张问题 (参看第 22 目) 及在其上全纯函数的延拓. 为此, 首先需要推广嵌入概念到这样的区域.

定义 1. 设给了两个在 $\mathbb{C}^n$ 上的黎曼域 (D_1, π^1) 和 (D_2, π^2); 如果存在连续映射 $\varphi : D_1 \to D_2$, 使得在 D_1 上有

$$\pi^1 = \pi^2 \circ \varphi, \tag{1}$$

则称第一个区域弱 $\varphi-$ 嵌入到第二个区域中, 并记作 $(D_1, \pi^1) \underset{\varphi}{\subset} (D_2, \pi^2)$. 如果此时 φ 为相互一一的 D_1 到 D_2 中的映射, 则说 $(D_1, \pi^1)\varphi-$ 嵌入 到 (D_2, π^2) 中. 如果 φ 还是 D_1 到 D_2 上的同胚, 则称 (D_1, π^1) 与 (D_2, π^2) 等价.

这个定义推广了通常的嵌入概念: 如果 $D_1 \subset D_2$ 是在通常意义下的, 则 $\pi^1 = \pi^2\big|_{D_1}$ 是函数 π^2 在 D_1 上的限制, 可以取自然的包含映射作为 $\varphi : D_1 \to D_2$, 其中的 φ 把每个点 $p \in D_1$ 变到同一个点 p, 但将其看作是 D_2 中的点 [2)]. 显然, 等价的区域 (D_1, π^1) 和 (D_2, π^2) 相互嵌入 (一个方向借助于 φ, 另一方向借助 φ^{-1}). 在弱嵌入 $(D_1, \pi^1) \underset{\varphi}{\subset} (D_2, \pi^2)$ 情形, 第一个区域可以表现为比第二个有“更多的分歧”. 于是, 函数 $w = \sqrt[4]{z}$ 在 $\mathbb{C}^1$ 上的黎曼面表现为到 $w = \sqrt{z}$ 的黎曼面的弱嵌入 (作为 φ 需要取那样的映射, 它把第一个曲面的一对点粘合为 $\sqrt{z}$ 在其上取相同值的那个点). 任意黎曼区域 $\pi : D \to \mathbb{C}^n$ 是到 $\mathbb{C}^n$ 中的弱 $\pi-$ 嵌入.

我们注意到在 $\mathbb{C}^n$ 上的黎曼域 (D_1, π^1) 和 (D_2, π^2) 间的 (甚至弱) 嵌入映射 $\varphi : D_1 \to D_2$ 无疑是全纯的. 事实上, 由 π^1 在点 $p_0 \in D_1$ 的邻域中的同胚性和条件 (1), 我们有 $\pi^2 \circ \varphi \circ \pi^1\big|_U^{-1}(z) \equiv z$, 其中 $\pi^1\big|_U$ 为 π^1 的限制, 且 $z = \pi^1(p)$ (参看流形的全纯映射的定义, 第 12 目). 黎曼域的等价性意味着双全纯等价.

定义 2. 设 (D_1, π^1) 和 (D_2, π^2) 为两个 $\mathbb{C}^n$ 上的黎曼域, 并且 $D_1 \underset{\varphi}{\subset} D_2$ 和 $f_2 : D_2 \to \mathbb{C}$ 为在第二个区域上的函数. 称函数 $f_1 : D_1 \to \mathbb{C}$ 为 f_2 在 D_1 上的 $\varphi-$

---

1) 参看 V. S. Vladimirov, *Methods of the theory of functions of several complex variables*, Chapter Ⅲ, §21, subsection 3, “Nauka”, Moscow, 1964, p.217; 英译本, MIT Press, Cambridge, MA, 1966.

2) 因为映射 $\varphi(p) = p$ 相互一一, 故通常的包含是个 $\varphi-$ 嵌入.

限制 (记为 $f_1 = f_2\big|_{D_1}^{\varphi}$) 是说, 如果对所有 $p \in D_1$ 有

$$f_1(p) = f_2 \circ \varphi(p); \tag{2}$$

这时则称 f_2 为 f_1 的 φ – 延拓.

如果 $D_1 \subset D_2$, 而 φ 是自然的包含映射, 故我们有通常的限制映射 $f_1 = f_2\big|_{D_1}$.

为了正式阐述多叶的全纯包的定义, 我们约定, 称复流形 M 为**全纯可分的**是说, 如果对任意两个不同的点 $p, q \in M$, 存在函数 $f \in \mathscr{O}(M)$ 分离这两个点, 即使得 $f(p) \neq f(q)$.

如果 M 是 $\mathbb{C}^n$ 的子空间 (特别地, 是个单叶区域), 则全纯可分性的条件自动满足, 这是因为作为分离函数可取为其坐标之一. 然而一般情形则不是这样的: 例如我们考虑区域 $D = \mathbb{C}^2 \backslash \Gamma$ 上的二叶覆叠 $\widetilde{D}$, 其中 $\Gamma = \{|z_1| = 1, |z_2| = 1\}$ 是个环面, 在图 43 中所表示的是它的赖因哈特图 (这是具有分歧点 (1,1) 和 ∞ 的二叶黎曼面的一段).

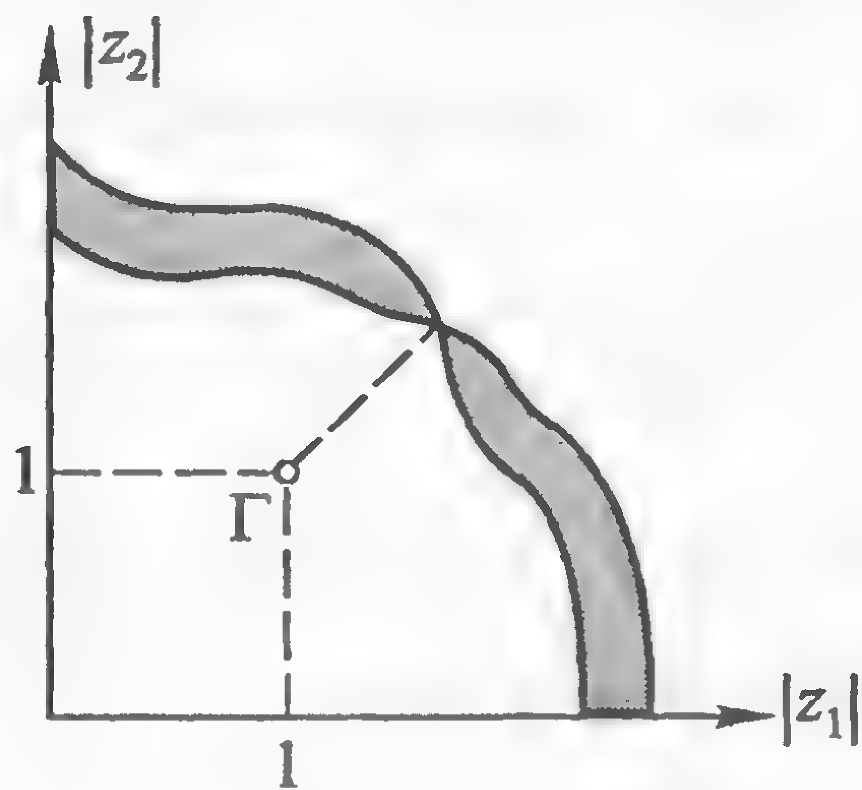


图 43

我们考虑在 $\widetilde{D}$ 上全纯的任意函数 f. 它在 $\widetilde{D}$ 两叶中任一叶上的值在 $\{|z| > \sqrt{2}\}$ 上为全纯, 其原因在于分歧流形 (即环面 Γ) 位于球面 $\{|z| = \sqrt{2}\}$ 之上, 并且在球之外的覆叠为非分歧的. 由关于紧奇异点集的定理 (第 31 目) 知, 这些值可延拓为整函数, 而因为在 Γ 上它们必须相等, 故它们恒等 (参看第一章的问题 9). 因此, f 在区域 $\widetilde{D}$ 的不同叶中位于同一个点 $z \in \mathbb{C}^2$ 上的点有相同的值: $\widetilde{D}$ 中具相同投影的点不可分.

定义 3. 称全纯可分的黎面域 $(\widetilde{D}, \widetilde{\pi})$ 为黎曼域 (D, π) 的**全纯包**是说, 如果

1) 存在 φ – 嵌入 $D \underset{\varphi}{\subset} \widetilde{D}$ 使得任意函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可以 φ – 扩张到函数 $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(\widetilde{D})$;

2) 对任意点 $p \in \widetilde{D}$ 存在函数 $f_0 \in \mathscr{O}(D)$, 对它在 $U(z^0, \rho)$ 的限制 $f_0 \circ \widetilde{\pi}^{-1}$ 不能解析延拓到某个半径为 $R > \rho$ 的多圆盘 $U(z^0, R)$, 其中 $z^0 = \widetilde{\pi}(p), \rho = \rho(p, \partial\widetilde{D})$ (参照第 40 目的定义, 在那里以多圆盘替代球没有本质的影响).

正如我们曾看到的, 在 $\mathbb{C}^n$ 中的 (单叶) 区域类中的全纯包构造问题并不总有解.

在这里我们要证明在黎曼域的类中这个问题总有解. 这个证明的基础是对全纯函数族的同步延拓和由这种族的芽去构造它们的包.

考虑偶对 (U,F), 它由多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 和某个函数族 $F\subset\mathscr{O}(U)$ 构成; 这个族可假设以某个参数为指标集: $F=\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 我们固定任意点 $z\in U$, 并称第二个这样的偶对 (V,G) 在点 z 等价于第一个偶对是说, 如果多圆盘 $V\ni z$, 且族 G 可以以相同的指标集参数化 $(G=\{g_\alpha\}_{\alpha\in A})$ 使得 $f_\alpha(z')=g_\alpha(z')$ 对所有 $\alpha\in A$ 和所有 $z'\in U\bigcap V$ 成立. 由此等价关系得到的等价类称为族 F 在点 z 的芽, 记为 $\mathbf{F}_z$ (特别地, 如果 F 就由一个函数 f 构成, 我们得到通常的芽 $\mathbf{f}_z$).

在所有可能的全纯函数族的芽组成的空间 $\mathfrak{R}^n$ 中按通常的办法引进拓扑: 设 $\mathbf{F}_\alpha$ 为某个芽, 而 (U,F) 为它的一个代表元; 点 $\mathbf{F}_\alpha$ 的邻域是指那些芽 $\mathbf{G}_z, z\in U$ 的集合, 它具有在 z 点等价于 (U,F) 的代表元. 不难看出, 空间 $\mathfrak{R}^n$ 连同投射 $\boldsymbol{\pi}:\mathfrak{R}^n\to\mathbb{C}^n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 上的一个层 (如果考虑的只是一个函数构成的族, 我们便得到了全纯函数芽层; 参看第 28 目).

$\mathfrak{R}^n$ 的连通和开的子集显然是个黎曼域, $\mathfrak{R}^n$ 的连通分支, 即它的极大连通子集, 起着特殊的作用, 这是因为 $\mathfrak{R}^n$ 为局部连通, 故它们是些开集合, 即区域. 这些分支不仅在连通性上为极大而且关于同步解析延拓也是极大. 就是说, 成立

定理 1. 空间 $\mathfrak{R}^n$ 的任一分支 $\widetilde{D}$ 与自己的全纯包相等.

证明. 我们取恒同映射作为定义 3 中的 φ; 于是这个定义中的 1) 自动满足, 还需证明条件 2). 假设它不被满足, 即存在点 $p_0\in\widetilde{D}$ 使得对所有函数 $\widetilde{f}\in\mathscr{O}(\widetilde{D})$ 在多圆盘 $U(a,r)$ 上的限制 $\widetilde{f}\circ\boldsymbol{\pi}^{-1}$ 可延拓到多圆盘 $U(a,R)$, 其中 $a=\boldsymbol{\pi}(p^0), r=\rho(p^0,\partial\widetilde{D})$ 及半径 $R>r$. 按空间 $\mathfrak{R}^n$ 的构造, 点 p^0 是在点 $a\in\boldsymbol{\pi}(\widetilde{D})$ 的一个带指标的全纯函数族 $F=\{f_\alpha\}$ 的芽. 因为在任意固定 α 下 $f_\alpha(z)$ 的值对于芽 $\mathbf{F}_z=p$ 的所有代表元都是相同的, 故 $f_\alpha\circ\boldsymbol{\pi}(p)$ 可以看成是 $\widetilde{D}$ 上的函数, 它显然是全纯的. 由我们所做的假定, 所有 $f_\alpha\circ\boldsymbol{\pi}\circ\boldsymbol{\pi}^{-1}=f_\alpha$ 可全纯延拓到多圆盘 $U(a,R)$, 因此, 族 F 在这个多圆盘的点上的芽在 $\mathfrak{R}^n$ 中构成了中心在 p^0, 半径为 R 的多圆盘 $\widetilde{U}$, 而这与 $\rho(p^0,\partial\widetilde{D})=r<R$ 相矛盾. □

空间 $\mathfrak{R}^n$ 是万有的: 每个黎曼域均可弱 φ – 嵌入 (在定义 1 的意义下) 到 $\mathfrak{R}^n$ 的某个分支中, 使得在此区域全纯的函数被 φ – 延拓 (在定义 2 的意义下) 到这个分支中. 这便建立了

定理 2. 对任意黎曼域 (D,π) 和任意族 $F\subset\mathscr{O}(D)$ 存在空间 $\mathfrak{R}^n$ 的分支 $\widetilde{D}_F$ 和映射 $\varphi:D\to\widetilde{D}_F$, 使得 $D\underset{\varphi}{\subset}\widetilde{D}_F$ 和任意 $f_\alpha\in F$ 为某个函数 $\widetilde{f}_\alpha\in\mathscr{O}(\widetilde{D}_F)$ 的 φ – 限制.

证明. 对任意点 $p\in D$, 我们以 $\varphi(p)=\mathbf{F}_z$ 表示在点 $z=\pi(p)$ 的族 $F\circ\pi^{-1}$ 的

芽; 我们所定义的 φ 显然是连续的. 按照在 $\mathfrak{R}^n$ 上投射的定义, 我们有 $\boldsymbol{\pi}: \mathbf{F}_2 \mapsto z$ 使得 $\boldsymbol{\pi}\circ\varphi(p) \equiv \pi(p)$ 并且 φ 为弱嵌入. 像 $\varphi(D)$ 连通, 因而属于空间 $\mathfrak{R}^n$ 的某个分支 $\widetilde{D}_F$.

对任意点 $p \in D$ 和函数 $f_\alpha \in F$, 我们以 $\widetilde{f}_\alpha$ 表示对于芽 $\varphi(p) = \mathbf{F}_z$ 取值 $f_\alpha(p)$ 的函数, 显然, 这个函数被全纯延拓至 $\widetilde{D}_F$. 由构造有 $f_\alpha(p) = \widetilde{f}_\alpha \circ \varphi(p)$, 故而定义 2 的条件被满足, 并且 $f_\alpha = \widetilde{f}_\alpha\big|_D^\varphi$. □

我们转向本目的基本定理的证明, 这是关于全纯包的存在性和唯一性的定理, 其中的唯一性是在定义 1 意义下的等价关系内的唯一.

定理 3. 设 (D,π) 为任意全纯可分的黎曼域, 而 $\mathscr{O} = \mathscr{O}(D)$ 为 D 上所有全纯函数的族. 于是由定理 2 对应的 D 的分支 $\widetilde{D}_\mathscr{O}$ 是区域 D 的全纯包, 并且这个区域的任意全纯包都等价于 $\widetilde{D}_\mathscr{O}$.

证明. 设 $\varphi: D \to \widetilde{D}_\mathscr{O}$ 为定理 2 的证明中所描述的那个映射. 因为 D 全纯可分, 故对任意的不同点 $p, q \in D$ 存在 $f_\alpha \in \mathscr{O}(D)$ 使得 $f_\alpha(p) \neq f_\alpha(q)$, 从而族 $\mathscr{O}$ 的芽在这些点不同, 即 $\varphi(p) \neq \varphi(q)$. 因此, 映射 φ 相互一一, 即为嵌入, 于是定义中的条件 1) 得到满足. 这个定义中的条件 2) 由定理 1 得到满足, 故定理的第一部分得证.

为了证明第二部分, 我们假设 $(\widetilde{G}, \widetilde{\pi})$ 为区域 D 的另一个全纯包, $\psi: D \to \widetilde{G}$ 它的相应嵌入. 在区域 $\varphi(D) \subset \widetilde{D}_\mathscr{O}$ 中定义了到 $\widetilde{G}$ 中的双全纯映射 $\chi = \psi \circ \varphi^{-1}$, 又根据定义 1, 在 $\varphi(D)$ 中处处有

$$\widetilde{\boldsymbol{\pi}} \circ \chi(p) = \boldsymbol{\pi}(p). \tag{3}$$

因为 $\widetilde{D}_\mathscr{O}$ 是 D 的全纯包, 故 χ 被延拓到全纯映射 $\widetilde{D}_\mathscr{O} \to \widetilde{G}$. 事实上, 由 (3) 可看出, 局部地有 $\chi = \widetilde{\boldsymbol{\pi}}^{-1} \circ \boldsymbol{\pi}$, 而且这个映射延拓的障碍只可能在下述情况中遇到: 即如果存在点 $p \in \widetilde{D}_\mathscr{O}$, 当逼近它时 $\chi(p)$ 趋向 $\partial\widetilde{G}$. 但是因为 $\widetilde{G}$ 局部地不可扩张到它自身的边界点, 故存在函数 $\widetilde{g} \in \mathscr{O}(\widetilde{G})$ 使得 $\widetilde{f} = \widetilde{g} \circ \chi$ 不能全纯地延拓到点 p; 而这是不可能的, 理由是: 在 D 中我们有 $\widetilde{f} \circ \varphi = \widetilde{g} \circ \psi$, 并由全纯域的定义知, $\widehat{f}$ 必定能延拓为 $\widetilde{D}_\mathscr{O}$ 中的全纯函数.

因此, χ 全纯地映 $\widetilde{D}_\mathscr{O}$ 到 $\widetilde{G}$ 中, 而因为前面的讨论可以对在 $\psi(D)$ 中等于 $\chi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ 的映射同样进行, 故 χ 是 $\widetilde{D}_\mathscr{O}$ 到 $\widetilde{G}$ 的双全纯映射. 因为它显然保持了投射, 故 $\widetilde{G}$ 等价于 $\widetilde{D}_\mathscr{O}$. □

最后我们要讨论全纯黎曼域.

定义 4. 称黎曼域 (D,π) 为全纯域是说, 如果存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 它具有如下性质: 如果某个区域 $(D_1, \pi^1) \underset{\varphi}{\supset} (D,\pi)$ 以及函数 $f_1 \in \mathscr{O}(D_1)$ 是函数 f 的 φ – 延拓, 则 可得到 (D_1, π^1) 等价于 (D,π) (即 φ 为 D 到 D_1 上的相互一一的映射).

由定理 3 看出全纯可分的黎曼域的全纯包是个全纯域. 全纯域的一个充分必要条件由下面的定理给出.

定理 4 (嘉当 – 图伦). 黎曼域 (D,π) 为全纯域当且仅当它为全纯凸 [1] 并且全纯可分.

我们将不详细地叙述其证明而只描述在需要引进多叶情形时的变化.

证明. *必要性*. 同步延拓引理的证明 (第 33 目) 可以没有实质改变地转移到黎曼域上, 而由此定理得出全纯域 D 的全纯凸性.

为了证明全纯可分性, 我们按照定理 2 将具有由一个函数 f 依定义 4 构成的族 F 的区域 D φ– 嵌入到空间 $\mathfrak{R}^n$ 中, 另外, 根据同一定义, 映射 φ 为相互一一的. 设 p 和 q 为 D 中不同的点, 于是 $\varphi(p)\neq\varphi(q)$, 因而由函数 φ 的构造知 $f\circ\boldsymbol{\pi}^{-1}$ 的芽在点 $\pi(p)$ 和 $\pi(q)$ 不同, 而这表明在点 p 和 q 函数 f 或它的某个导数的值不同.

充分性. 设 K_ν $(\nu=1,2,\cdots)$ 为区域 D 的一个紧的穷竭序列. 利用 D 的全纯凸性我们可假定 $K_\nu=(\widehat{K}_\nu)_{\mathscr{O}(D)}$. 我们以有限个多圆盘覆盖 ∂K_ν, 并在它们中每个与 $D\backslash K_\nu$ 的交集中取点 p_{ν_j} $(j=1,\cdots,k_\nu)$; 以 f_{ν_j} 表示 $\mathscr{O}(D)$ 中的函数使得

$$f_{\nu_j}(p_{\nu_j})=\nu,\quad \|f_{\nu_j}\|_{K_\nu}<2^{-\nu-j}\quad 和\quad f_{\nu_j}(p_{\nu_k})=0,\quad j\neq k.$$

函数 $f=\sum f_{\nu_j}\in\mathscr{O}(D)$, 和

$$|f(p_{\nu_j})|\geqslant\nu-1. \tag{4}$$

利用全纯可分性, 可以修改函数 f 使得在保持在 D 中的全纯性和满足不等式 (4) 下, 它在任意两个不同点 $p,q\in D,\pi(p)=\pi(q)$ 有不同的元素 (关于如何实现这种修正可参看福克斯 (B.A.Fuks) 的书 [2], 193 页)

我们将证明 (D,π) 是 (修改过的) 函数 f 的全纯域. 设存在函数 f 在区域 (D_1,π^1) 的 φ– 延拓; 我们需要证明 φ 是 D 到 D_1 上的一一映射. 如果 $\varphi(p)=\varphi(q)$, 则按定义 1 和 2 有 $\pi(p)=\pi(q)$ 和 $f(p)=f(q)$. 由 f 的构造推出 $p=q$. 除此之外, $\varphi(D)=D_1$, 这是因为设若相反, 区域 $\varphi(D)$ 在 D_1 中具有边缘点, 而在此点由不等式 (4) 知函数 $f_1=f\circ\varphi$ 不可能是全纯的. □

注. 冈洁在 1953 年证明了任意在 $\mathbb{C}^n$ 上全纯凸黎曼域为全纯可分. 因此定理 4 的条件并不是彼此独立的.

作为全纯域的黎曼域属于一个重要的类, 即*施坦* (Stein) *流形*. 被如此称谓的这个 n 维复流形 M 具有如下性质: 1) 全纯凸; 2) 全纯可分; 3) 对任意点 $p\in M$ 存在 n 个函数 $f_\nu\in\mathscr{O}(M)$, 它构成其在点 p 的邻域中的局部坐标.

[1] 将全纯凸的定义转移到黎曼域上不需作改变. 例如, 可以把它叙述为这样的条件: $\rho(K,\partial D)=\rho(\widehat{K}_{\mathscr{O}},\partial D)$, 其中 K 为 D 中的任意紧子集, 而 $\widehat{K}_{\mathscr{O}}$ 是它关于在 D 上全纯函数类的包.

[2] 福克斯, *Introduction to the theory of analytic functions of several complex variables*, Fizmatgiz, Moscow, 1962; 英译本, Transl. Math. Monographs, vol.8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1963.

我们不加证明 [1] 地引进施坦流形的一些性质, 它们表明这种流形是全纯域的自然推广.

I) 复流形 M 为施坦流形当且仅当在其上存在光滑的严格多重次调和函数 u, 它在 M 的边界无穷增大, 即使得集合 $\{p \in M : u(p) < \alpha\} \Subset M$ 对任意 $\alpha \in \mathbb{R}$ 成立.

II) 如果施坦流形 M 是一个复流形 $\widetilde{M}$ 的开子流形 (具诱导复结构), 则存在函数 $f \in \mathscr{O}(M)$, 它不能全纯延拓到 $\widetilde{M} \backslash M$ 的点上.

我们还注意到, n 维施坦流形可作为闭子流形嵌入到 $\mathbb{C}^{2n+1}$, 或者换句话说,

III) 对于任意施坦流形 M 存在逆紧的嵌入 [2] $f : M \to \mathbb{C}^{2n+1}$, 其中 $n = \dim_{\mathbb{C}} M$.

42. 奇点集的解析性

在这一章的最后我们将讨论某些与解析函数在广泛意义下的奇点有关的问题. 其意义是这样的: 每个在 $\mathbb{C}^n$ 中某个区域里的全纯函数 f 可以解析延拓到它的全纯 (单叶或黎曼) 域; 称后面这个区域的边界点为函数 f 的奇点.

在一般情形这个奇点集具有实维数 $2n-1$ 并且不必具有任何光滑性的性质. 但是在某些重要的特殊情形中可以证明这个集合的解析性. 我们由那个在许多应用中都有用的*嵌入边定理* (1932 年) 开始.

定理 1 (K. 克内泽尔 (Kneser)). 设两个 C^2 类实超曲面 $S_j = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi_j(z) = 0\}$ 相交于处于一般位置的 $(2n-2)$ 维边 Γ, 即使得在 Γ 上处处有

$$d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \neq 0^{3)}, \tag{1}$$

并设函数 f 在 Γ 的邻域里至少有一个 $\varphi_j < 0$ 的部分中为全纯 (图 44). 如果 f 不能全纯延拓到 Γ 上的任意点, 则 Γ 为复超曲面.

证明. a) 设存在点 $a \in \Gamma$, 在其上有

$$\partial\varphi_1 \wedge \partial\varphi_2 \neq 0. \tag{2}$$

我们考虑函数 $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - k(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)$, 其中 $k > 0$ 是个我们马上就要选取的常数. 因为 $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) = 0$, 故由第 37 目的莱维形式的性质 b) 有

$$H_a(\varphi, \omega) = H_a(\varphi_1, \omega) + H_a(\varphi_2, \omega) - 2k(|\partial\varphi_1(\omega)|^2 + |\partial\varphi_2(\omega)|^2), \tag{3}$$

其中 $\partial\varphi_j(\omega) = (\omega, \overline{\nabla\varphi_j})$ 表示向量 $\omega \in \mathbb{C}^n$ 和曲面 S_j 在点 a 的法向量 $n_j = \overline{\nabla\varphi_j}$ 的埃尔米特内积 (参看第 17 目).

---

[1] 这些论断的证明可以在赫尔曼德尔 (L. Hörmander) 的书 *An introduction to complex analysis in several variables*, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1966 找到, 见定理 5.2.10, 5.4.2 和 5.3.9.

[2] 我们记得, 映射 $f : M \to N$ 为*逆紧*是说 $\widetilde{N}$ 的每个紧子集的逆像为 M 的紧子集. 称映射 f 为*嵌入*是说, 如果它是 M 到 $f(M)$ 的同胚.

[3] 这表明在 Γ 上矩阵 $\left(\dfrac{\partial\varphi_j}{\partial z_k}, \dfrac{\partial\varphi_j}{\partial \bar{z}_k}\right)$ 的秩等于 2, 其中 $j = 1, 2$ 而 $k = 1, \cdots, n$.

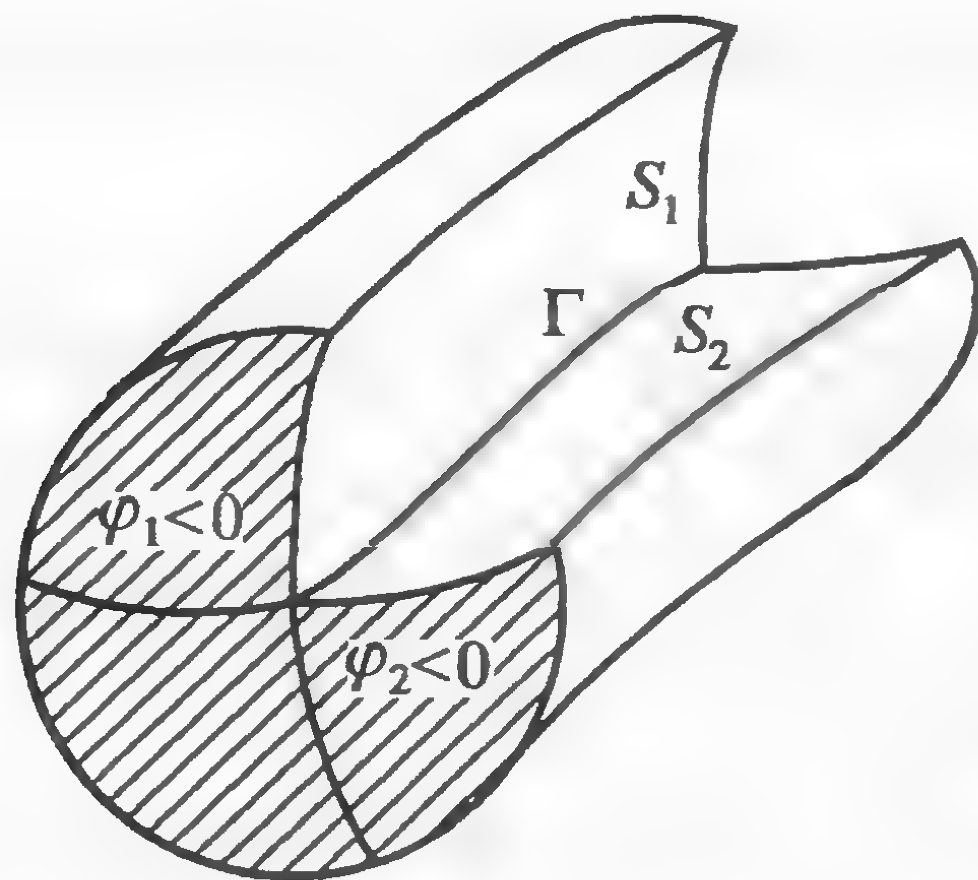


图 44

曲面 $S=\{\varphi(z)=0\}$ 在点 a 的复切平面 $T_a^c(S)$ 的方程显然为 $(z-a,n_1+n_2)=0$; 使 $\omega\in T_a^c(S)$ 当且仅当 $(\omega,n_1+n_2)=0$. 然而条件 (2) 从几何上意味着向量 $n_1=\overline{\nabla\varphi_1}$ 和 $n_2=\overline{\nabla\varphi_2}$ 复线性无关 (参看第 17 目), 故当条件满足时, 存在向量 $\omega\in T_a^c(S)$ 使得 $\partial\varphi_j(\omega)=(n,n_j)\neq 0, j=1$ 或 2. (事实上, 如果对所有 $\omega\in T_a^c(S)$ 有 $(\omega,n_j)=0$, 则两个向量 n_j 复正交于超平面 $T_a^c(S)$, 从而相互成复比例.)

对于这样的 ω 可以选取 k 如此大, 使得

$$2k(|(\omega,n_1)|^2+|\omega,n_2|^2)>H_a(\varphi_1,\omega)+H_a(\varphi_2,\omega),$$

于是根据 (3), 莱维形式 $H_a(\varphi,\omega)<0$. 由第 37 目的莱维 – Krzoska 定理的推论可以断言, 在点 a 的邻域中使 $\varphi<0$ 的部分中全纯的任意函数可全纯延拓到这个点. 但是当 $0<\varphi_1<1/k$ 和 $0<\varphi_2<1/k$ 时函数 $\varphi=\varphi_1(1-k\varphi_1)+\varphi_2(1-k\varphi_2)$ 为正, 因而曲面 $S=\{\varphi=0\}$ 在 a 的邻域中位于至少有一个 $\varphi_j<0$ 的部分. 在这一部分中, 定理所考虑的函数 f 由假设条件为全纯. 但在这里也有 a 的邻域中 $\varphi<0$ 的部分, 从而由刚才所证, f 全纯延拓到点 a, 这与假设条件矛盾.

因此, 情形 a) 被排除, 并且在 Γ 的所有点上有

$$\partial\varphi_1\wedge\partial\varphi_2=0. \tag{4}$$

b) 条件 (4) 表明, 在所有点 $z\in\Gamma$ 上向量 $n_1=\overline{\nabla\varphi_1}$ 和 $n_2=\overline{\nabla\varphi_2}$ 成复比例, 即 $T_z^c(S_1)=T_z^c(S_2)$, 从而 $T_z^c(\Gamma)=T_z^c(S_1)\bigcap T_z^c(S_2)=T_z^c(S_j)$ 具有实的维数 $2n-2$. 然而根据条件 (1), 实切平面 $T_z(S_1)$ 和 $T_z(S_2)$ 互不相同, 并且 $T_z(\Gamma)=T_z(S_1)\bigcap T_z(S_2)$ 的实维同样为 $2n-2$. 因此 $T_z(\Gamma)=T_z^c(\Gamma)$ 在所有点 $z\in\Gamma$ 成立, 并由第 17 目的列维 – 齐维塔 (Levi-Civita) 定理我们的结论是: Γ 为复超曲面. □

* 证明在全纯于环面 $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}^2:|z_1|=|z_2|=1\}$ 的邻域中或 $|z_1|<1$ 或 $|z_2|<1$ 的部分的函数 f 可全纯延拓到 Γ. *

推论. 如果函数 f 在某个 C^2 类 $(2n-2)$ 维子流形 $\Gamma\subset\mathbb{C}^n$ 的 $2n$ 维邻域中全纯, 并不能全纯延拓到 Γ 上, 则 Γ 是个全纯曲面.

证明. 设 $z^0 \in \Gamma$ 为任一点. 因为 $\Gamma \subset C^2$ 并为 $(2n-2)$ 维曲面, 则在 z^0 的邻域它由两个实方程 $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$ 给出, 其中 $\varphi_j \in C^2$, 并在此邻域中有 $d\varphi_1 \wedge d\varphi_2 \neq 0$. 因为 f 在 Γ 的邻域中的 $\min(\varphi_1, \varphi_2) < 0$ 部分确为全纯并不可延拓到 Γ 上, 从而 Γ 为全纯曲线. □

在推论的证明中, 奇点集合的解析性由其光滑性和余维 2 所保证. 在下面更加经典的结果 (1909 年) 中并没有假定奇点集的光滑性, 但却转而要求它与平行于某方向的直线最多交于一个点.

定理 2 (哈托格斯). 设 a 为函数 f 的奇点并对每点 $'z, \|'z - 'a\| < \varepsilon$, 在多圆盘 $U(a, \varepsilon)$ 中存在最多一个点 $('z, z_n)$ 为此函数的奇点. 于是存在多圆盘 $'V('a, \delta)$ 使得每个点 $'z \in 'V$ 恰好对应一个数 z_n, 使每个 $('z, z_n)$ 是 f 在 U 中的奇点, 并且函数 $z_n = g('z)$ 在 $'V$ 中全纯.

证明. a) 函数 g 的连续性. 不失一般性可设 $a = 0$. 因为 0 是 f 的唯一一个其射影为 $'0$ 的奇点, 故圆 $\gamma_0 = \{'z = '0, |z_n| = \eta\}, 0 < \eta < \varepsilon$, 属于 f 的全纯的区域. 圆盘族 $K_b = \{'z = 'b, |z_n| \leqslant \eta\}$ 在 $'b \to '0$ 时趋向于 $K_0 = \{'z = '0, |z_n| \leqslant \eta\}$, 并且 $\partial K_b \to \partial K_0 = \gamma_0$. 因为 K_0 包含了奇点 0, 故由连续性原理 (第 36 目) 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\|'b\| < \delta$ 时, 在圆盘 K_b 上至少有一个 f 的奇点. 由假设条件知, 最多只有一个这样的点, 因此, 函数 $z_n = g('z)$ 在 $'V = \{\rho('z, '0) < \delta\}$ 中被唯一确定. 同样的讨论证明 g 在点 $'0$ 的连续性: 我们有 $g('0) = 0$, 并且对任意 $\eta > 0$ 存在 $\delta > 0$ 使得当 $\|'z\| < \delta$ 时 $|g('z)| < \eta$. 因为作为 $'0$ 可以取 $'V$ 中的任意点, 故 g 在整个 $'V$ 中为连续.

b) 函数 g 的**全纯性**. 可以假定数 δ 为如此之小, 以致当 $'z \in 'V$ 时有 $|g('z)| < \varepsilon/3$, 并且当 f 在区域 $\left\{'z \in 'V, \frac{1}{3}\varepsilon < |z_n| < \frac{2}{3}\varepsilon\right\}$ 时为全纯. 选取数 $\rho, \frac{1}{3}\varepsilon < \rho < \frac{2}{3}\varepsilon$ 和点 $z_n^0 = \rho e^{i\theta}$; 于是 f 在多圆盘 $\{'z \in 'V, |z_n - z_n^0| < \rho - \varepsilon/3\}$ 中为全纯. 根据这些构造, 对于任意 $'z \in 'V$ 点 $('z, g('z))$ 是 f 的奇点, 而所有满足 $|z_n - z_n^0| < |g('z) - z_n^0|$ 的点 $('z, z_n)$ 为正则点. 因为函数 g 连续, 故

$$R('z) = |g('z) - z_n^0| \tag{5}$$

是哈托格斯半径 (参看第 39 目). 由于 $|g('z)| < \varepsilon/3$, 而 $|z_n^0| = \rho > \varepsilon/3$, 故 $R('z) \geqslant |z_n^0| - |g('z)| > 0$, 从而 $\ln R('z)$ 在 $'V$ 连续.

我们将用第 39 目中所证明的函数 $-\ln R('z)$ 的多重次调和性来证明 g 的全纯性. 只要证明当固定 $z_\mu = a_\mu, |a_\mu| < r, \mu \neq \nu$ 时, g 对每个变量 $z_\nu, \nu = 1, \cdots, n-1$ 在某个圆盘 $|z_\nu| < r$ 为全纯即可. 为简单起见, 我们以 $R(z_\nu)$ 替代 $R(a_1, \cdots, z_\nu, \cdots, a_{n-1})$, 以及类似的记号 $g(z_\nu)$. 因为 $-\ln R(z_\nu)$ 在圆盘 $\{|z_n| < r\}$ 为次调和并在 $\{|z_n| \leqslant r\}$

中连续, 故

$$\ln R(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln R(re^{it})dt$$

或者根据 (5),

$$\ln|g(0) - \rho e^{i\theta}| \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln|g(re^{it}) - \rho e^{i\theta}|dt^{1)} \tag{6}$$

这个不等式对所有 $\theta \in [0, 2\pi]$ 成立; 对其按 θ 进行积分并改变右端的积分顺序 (它显然是合理的), 我们有

$$\int_0^{2\pi} \ln|g(0) - \rho e^{i\theta}|d\theta \geqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} \ln|g(re^{it}) - \rho e^{i\theta}|d\theta. \tag{7}$$

由留数定理, 对任意 $w, |w| < \rho$ 有

$$\int_{\{|\zeta|=\rho\}} \ln\frac{\zeta - w}{\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{\zeta} = 0,$$

从此看出, 积分

$$\int_0^{2\pi} \ln|\rho e^{i\theta} - w|d\theta = \mathrm{Re}\int_{\{|\zeta|=\rho\}} \ln(\zeta - w)\frac{d\zeta}{\zeta} = \mathrm{Re}\int_{\{|\zeta|=\rho\}} \ln\zeta\frac{d\zeta}{\zeta}$$

与 w 无关, 即在圆盘 $\{|w| < \rho\}$ 上为常数. 因为对所有 $z' \in {}'V$ 我们有 $|g('z)| < \rho$, 故而可在 (7) 的右端以 $g(0)$ 替换 $g(re^{it})$. 但是由此我们看出 (7), 从而 (6), 对所有 θ 转变为等式, 即次调和函数 $-\ln|g(z_\nu) - \rho e^{i\theta}|$ 在点 $z_\nu = 0$ 等于它自己的调和优势函数. 由此得到 (参看卷 I, 附录的第 3 目), 函数 $\ln|g(z_\nu) - \rho e^{i\theta}|$ 在圆盘 $\{|z_\nu| < r\}$ 中对任意 $\theta \in [0, 2\pi]$ 为调和.

从 (5) 我们得到

$$R^2 = (g - \rho e^{i\theta})(\overline{g} - \rho e^{-i\theta}) = g\overline{g} - \rho\left(e^{-i\theta}g + e^{i\theta}\overline{g}\right) + \rho^2, \tag{8}$$

另外由于 $\ln R$ 的调和性, 这个函数属于 C^∞ 类 (相对于变量 z_ν 和 $\overline{z}_\nu$), 其中 θ 为任意. 构造 (8) 在 $\theta = \theta_0$ 和 $\theta = \theta_0 + \pi$ 的差值, 我们看到 $e^{-i\theta_0}g + e^{i\theta_0}\overline{g} \in C^\infty$, 而在此令 $\theta_0 = 0$ 和 $\pi/2$, 则求出 $g + \overline{g}, g - \overline{g} \in C^\infty$, 从而 $g \in C^\infty$. 还需证明 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} \equiv 0$.

为此, 我们利用的事实是, 替代 $\ln R, \ln R^2$ 是在任意 $\rho \in (\varepsilon/3, 2\varepsilon/3)$ 和任意 $\theta \in [0, 2\pi]$ 时对 z_n 为调和函数. 对于 $\ln R^2$ 的拉普拉斯方程的形式为

$$R^2\frac{\partial^2 R^2}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\nu} - \frac{\partial R^2}{\partial z_\nu}\frac{\partial R^2}{\partial \overline{z}_\nu} = 0,$$

并且函数 (8) 对上述区间中的 ρ 和 θ 应该满足它. 将表达式 (8) 代入并将 ρ^3 前的系数等于零, 我们发现

$$e^{-i\theta}\frac{\partial^2 g}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\nu} + e^{i\theta}\frac{\partial^2 \overline{g}}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\nu} = 0$$

---

1) 在此公式中, $g(0) = g(a_1, \cdots, 0, \cdots, a_{n-1})$ 不必等于 0.

其中 θ 为任意, 由此当 $|z_\nu| < r$ 时 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial z_\nu \partial \overline{z}_\nu} \equiv 0$. 让 ρ^2 前的系数等于 (将其考虑在内) 零我们得到

$$e^{2i\theta}\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}_\nu}\frac{\partial \overline{g}}{\partial z_\nu} + e^{-2i\theta}\frac{\partial g}{\partial z_\nu}\frac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} = 0$$

对任意 θ 成立, 因此对 $|z_\nu| < r, \dfrac{\partial g}{\partial z_\nu}\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} \equiv 0$.

于是, 在圆盘 $\{|z_\nu| < r\}$ 中每个点上或者 $\dfrac{\partial g}{\partial z_\nu} = 0$ 或者 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} = 0$. 为了排除第一种可能性, 以函数 $f(z_\nu, z_n + z_\nu)$ 代替 $f(z_\nu, z_n)$ (我们将不写出对其他变量 $z_\mu, \mu \neq \nu, \mu \neq n$ 的依赖关系). 它满足定理的所有假设条件，而它的奇点曲面方程由 $z_n = g(z_\nu)$ 换作 $z_n = g(z_\nu) - z_\nu$. 故而, 重复我们的讨论, 我们对在 $z_\nu = 0$ 的邻域中的 g 发现条件 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} = 0$ 和 $\dfrac{\partial g}{\partial z_\nu} - 1 = 0$ 中的一个能够被满足. 考虑到先前得到的结果我们得到在 $z_\nu = 0$ 的邻域中 $\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}_\nu} \equiv 0$. □

成立更一般的定理.

定理 3 (哈托格斯). 设 $a \in \mathbb{C}^n$ 为函数 f 的奇点并且对每个 $'z, \|'z - 'a\| < \varepsilon$, 在多圆盘 $U(a, \varepsilon)$ 中存在有限个点 $('z, z_n^{(\mu)})$, 它们是这个函数的奇点. 于是在 a 的某个邻域中 f 的奇点构成一个解析集, 其定义方程为

$$(z_n - a_n)^k + c_1('z)(z_n - a_n)^{k-1} + \cdots + c_k('z) = 0, \tag{9}$$

其中的函数 c_ν 在点 $'a$ 全纯.

问题

1. 所谓区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中的**亚纯曲线**是指映射 $f: D \to \overline{\mathbb{C}}^n$, 它的分量是 D 中的亚纯函数. 称点 $\zeta_0 \in D$ 为 f 的零点是说在其上所有的 $f_\nu(\zeta_0) = 0; f_\nu(\nu = 1, \cdots, n)$ 的零点阶数最低的那个被称做 f 的零点阶数. 称点 $\zeta_0 \in D$ 为曲线 f 的一个极点是说, 在此点至少有一个 $f_\nu(\zeta_0) = \infty$; 在此点 f_ν 的极点阶数中最高的被称做 f 在此极点的阶. 证明, 对于亚纯曲线的下列类似的辐角原理:

$$N - P = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{(f', f)}{(f, f)}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\iint_D \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}}\frac{(f', f)}{(f, f)}d\zeta \wedge d\overline{\zeta}$$

(在这里假设 ∂D 为光滑曲线, f 全纯地延拓到 ∂D 中 $f \neq 0$ 的地方; N 和 P 为 f 在 D 中的零点和极点个数, 包括它们的重数; (z, w) 为埃尔米特内积). 这时右端的第二项为非正与为零当且仅当曲线 f 位于通过 $0 \in \mathbb{C}^n$ 的直线.

2. 证明下面的广义马丁内利 – 博赫纳积分公式: 如果对多重指标 $k=(k_1,\cdots,k_n)$ 引进形式

$$\omega_k(z)=\frac{(n-k)!k!}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}\overline{z}^{k_\nu+1}}{\langle z,\overline{z}^{k+1}\rangle}d\overline{z}^{k+1}[\nu]\wedge dz,$$

故对任意函数 $f\in\mathscr{O}(D)$ 在点 $z\in D$ 有

$$\frac{d^k f(z)}{dz^k}=\int_{\partial D}f(\zeta)\omega_k(\zeta-z)$$

(Andreotti-Norguet 公式, 是对导数的柯西公式的高维类比).

3. 设 $\overline{\Pi}=\{z\in\mathbb{C}^n:|p_\mu(z)|\leqslant 1,\mu=1,\cdots,n\}$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的多项式多面体, 使得 $\det\left(\dfrac{\partial p_\mu}{\partial z_\nu}\right)$ 在它的骨架 Γ 上不等于 0. 证明, 任意函数 $f\in\mathscr{O}(\Gamma)\bigcap C(\Pi\bigcup\Gamma)$ 可被多项式一致逼近 (因此特别地, 可延拓到 $C(\overline{\Pi})$ 中的函数).

4. 设 $S\subset\mathbb{C}^m$ 为光滑的实超曲面, $f:S\to\mathbb{C}^n$ 为光滑映射. 证明其图像 $\{(z,f(z)):z\in S\}$ 为极大复流形当且仅当 f 的坐标为 CR – 函数.

5. 设 $M=\{z\in\mathbb{C}^n:\varphi_1(z)=\cdots=\varphi_k(z)=0\}$ 为一生成流形, φ_j 为定义函数. 证明 $f\in C^1(M)$ 为 M 上的 CR – 函数当且仅当 $\overline{\partial}f\wedge\overline{\partial}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\varphi_k=0$ 在 M 上成立.

6. 设 f 为在多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 上的全纯函数, 并且在集合 $U\bigcup\Gamma$ 上连续, 其中 Γ 为 U 中骨架. 证明 f 可延拓为 $C(\overline{U})$ 中的函数.

7. 设函数 f 在单位多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 的边缘 ∂U 上连续并在每个圆盘 $\Delta_{\nu,\alpha}=\{\zeta:\zeta_\mu=e^{i\alpha_\mu},\mu\neq\nu,|\zeta_\mu|<1\}\subset\partial U$ 中对 ζ_ν 全纯, $\nu=1,2,\cdots,n$. 证明 f 可延拓为 $\mathscr{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$ 中的函数.

8. 设函数 f 在单位多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 的骨架 Γ 上连续. 证明 f 可延拓为 $\mathscr{O}(U)\bigcap C(\overline{U})$ 中的函数当且仅当 $\int_\Gamma f(\zeta)\zeta^k d\zeta=0$ 对所有 $k=(k_1,\cdots,k_n)$, 其中 k_ν 为整数, 且其中至少有一个 $\geqslant 0$.

9. 设函数 f 在区域 $D\subset\mathbb{R}^{2n}$ 中对每个坐标 $x_1,\cdots,x_{2n}$ 为解析, 并且在某个球中对复坐标 $z_\nu=x_\nu+ix_{n+\nu},\nu=1,\cdots,n$ 全纯. 证明 f 在 D 中 (相对于坐标 z_ν) 全纯.

10. 证明, 广义单位圆盘 (参看第 10 目) 为凸域.

11. 证明, 连通紧集的多项式凸包仍为连通.

12. 证明下列集合为多项式凸:

a) 韦伊多项式多面体;

b) 任意位于 $\mathbb{C}^n$ 的实子空间中的紧集;

c) 在法图例子中映射下的像 $G=f(\mathbb{C}^2)$ (第 11 目).

13. 证明由多项式 (相应地, 有理函数) 组成的级数的收敛域是多项式 (有理) 凸的.

14. 证明, 紧集 $K \subset \mathbb{C}^n$ 的有理凸包 $\widehat{K}_R$ 与集合 $\{z \in \mathbb{C}^n : p(z) \in p(K)$ 对所有多项式 $p\}$ 重合.

15. 证明由缺一小段弧的圆 $\{z_1 = e^{it}, \delta \leqslant t \leqslant 2\pi, z_2 = 0\}$ 和圆柱 $\{z_1 = e^{it}, 0 \leqslant t \leqslant \delta; |z_2| = 1\}$ 组成的集合 $M \subset \mathbb{C}^2$ 的多项式凸包包含了圆盘 $\{|z_1| \leqslant 1, z_2 = 0\}$.

16. 证明, 区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + x_2^2 \geqslant \rho^2\}$ 不是全纯域.

17. 设 D 为全纯域, M 为 D 中的解析集; 证明对任意紧集 $K \subset M$, 其相关于 $\mathscr{O}(D)$ 的凸包属于 M.

18. 证明, 紧集 $K = \{|z_1| \leqslant 1, |z_2| \leqslant |z_1|\}$ 不能表示为全纯域的递降序列的极限.

19. 证明, 属于 C^2 的完全实流形 $M \subset \mathbb{C}^n$ 是全纯域的递降序列的极限.

20. 证明, 对于实函数 $\varphi \in C^2$, 所谓莱维行列式

$$-\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_k} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z_j} & \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \end{pmatrix}$$

等于 $H_z(\varphi, \omega)$ 在 $T_z^c\{\varphi = 0\}$ 上限制的特征值的乘积乘以 $|\bigtriangledown \varphi|^2$.

21. 证明第 37 目中定理 2 的下列条件: 如果区域 D 在点 $0 \in \partial D$ 为严格伪凸, 则在该点邻域中存在双全纯坐标变换把它的定义函数转变为形式

$$\varphi(z) = \operatorname{Re} z_n + |z|^2 + o(|z|^2).$$

22. 证明, 在点 $a \in \partial D$ 为严格伪凸的区域 D 可以从内部由全纯函数 f 的水平曲面切于它, 即 $\{f = 0\} \bigcap \partial D = \{a\}$.

23. 证明, 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 伪凸当且仅当对任意全纯圆盘 $S \subset D$, 距离 $\delta(S, \partial D) = \delta(\partial S, \partial D)$.

24. 设具 C^2 类边缘的区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 属于球 B; 证明 D 在其所有切于 $2B$ 的边缘点上为严格伪凸.

25. 证明, 区域 $D = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1, z_n \neq 0\}$ 是个伪凸域, 并且它不是由使多重次调和函数为负值的集合 [提示. 利用 Grauert-Remmert 定理 (见第 38 目的最后) 和极大值原理].

26. 次调和性的定义不加改变地转移到空间 $\mathbb{R}^m$ 的情形, 这时只要把优势函数假定为 m 个实变量的调和函数就可以了. 证明在区域 $D \subset \mathbb{C}^n (= \mathbb{R}^{2n})$ 多重次调和函数构成 D 中次调和函数的子类.

27. 证明每个在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中调和并在某个球 $B \subset D$ 中多重次调和的函数, 在 D 中为多重调和.

28. 紧集 $K \subset \mathbb{C}^n$ 的多项式凸包等于集合

$$\{z \in \mathbb{C}^n : u(z) \leqslant \sup_K u \text{ 对所有在 } \mathbb{C}^n \text{ 中为多重次调和的函数 } u\}.$$

第 IV 章
亚纯函数和留数

在本章中将考虑具最简单类型奇点的函数类, 即亚纯函数类. 我们将给予库赞(Cousin) 问题以特殊的关注, 这个问题是要按所给主部和零点去构造一个亚纯函数. 一开始, 我们将考虑这些问题在最简单情形下的初等解, 然后我们将使读者去认识那些导出一般性解的方法. 在最后一节中我们将致力于高维的留数论及其相关的分析问题.

§15. 亚纯函数

43. 亚纯函数的概念

称函数 f 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中的**亚纯**是说, 如果它: 1) 除了某个集合 P, 在 D 中处处全纯, 2) 不能解析延拓到 P 中的任一个点, 3) 对任意点 $z^0 \in P$ 存在邻域 U 以及在其中全纯的函数 $\psi \not\equiv 0$, 使得在 $D \bigcap \{U \backslash P\}$ 中的函数 $\varphi = f\psi$ 可全纯地延拓到 U 中.

显然, 在每个点 $z^0 \in P \bigcap U$ 有 $\psi(z^0) = 0$ (否则与 $f\psi$ 同时, 函数 f 被延拓到了点 z^0 的某个邻域). 如果假设对点 $z^0 \in P$, 函数 φ 和 ψ 在 z^0 的某个邻域中没有在其中全纯并在此点为 0 的公因子 (总可从 φ 和 ψ 中消去这些因子), 则 ψ 只可能在集合 P 上化零. 因此, P 是解析集: 在邻域 U_{z^0} 中的任意点上, 它由条件

$$P = \{z \in U_{z^0} : \psi(z) = 0\} \tag{1}$$

定义, 其中 $\psi \in \mathscr{O}(U_{z^0})$. 称集合 P 为函数 f 的**极集**.

但是并不是在极集 P 中所有点上亚纯函数 f 的性态都是一样的. 可将点 $z^0 \in P$ 分成*极点*, 这时函数 $\varphi = f\psi$ 在此处不为零; 以及*无定义点*, 这时有 $\varphi = 0$ (我们首先假定 φ 和 ψ 无在此点全纯且为零的公因子). 当逼近极点 z^0 时. 函数 $f = \varphi/\psi$ 无限增大, 而在无定义点的邻域中它可取任意复数值 (即解析集 $\{z \in U_{z^0} : \varphi(z) - w_0\psi(z) = 0\}$ 中的值 w_0, 这个集合显然包含了无定义点 z^0). 无定义点集合的复维数至少是极点集维数减 1, 这是因为无定义点由与条件 $\psi(z) = 0$ 无关的附加条件 $\varphi(z) = 0$ 刻画.

例题. 对在 $\mathbb{C}^2$ 上为亚纯的函数 $f = z_2/z_1$, 其极集为复直线 $\{z_1 = 0\}$. 此直线上除去 $\{z_1 = 0, z_2 = 0\}$ 外都是极点, 而后者是个无定义点.

我们现在来引进在任意复流形 M 上亚纯函数的一般定义; 利用层的概念 (第 28 目) 能方便地叙述这个定义. 对于固定的点 $p \in M$ 我们定义茎 $\mathscr{M}_p$ 为在 p 点的全纯函数芽的环 $\mathscr{O}_p$ 的一个商域. 对其的理解如下: 由 $\mathscr{O}_p$ 构成的偶对 $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ 和 $(\boldsymbol{\varphi}_1, \boldsymbol{\psi}_1)$, 其中 $\boldsymbol{\psi}$ 和 $\boldsymbol{\psi}_1$ 不是恒为 0 的函数芽, 被称为等价是指 $\boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\psi}_1 = \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\varphi}_1$ (验证其满足等价性的公理是初等的). 由此关系给出的等价类叫做在点 p 的*亚纯函数芽*; 包含了 $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ 的芽被记为 $\mathbf{f} = \boldsymbol{\varphi}/\boldsymbol{\psi}$. 在集合 $\mathscr{M}_p$ 中所有这些芽间引进了运算

$$\frac{\boldsymbol{\varphi}_1}{\boldsymbol{\psi}_1} + \frac{\boldsymbol{\varphi}_2}{\boldsymbol{\psi}_2} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{\psi}_2 + \boldsymbol{\varphi}_2\boldsymbol{\psi}_1}{\boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{\psi}_2}, \quad \frac{\boldsymbol{\varphi}_1}{\boldsymbol{\psi}_1} \cdot \frac{\boldsymbol{\varphi}_2}{\boldsymbol{\psi}_2} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_1\boldsymbol{\varphi}_2}{\boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{\psi}_2}, \tag{2}$$

其中右端运用了全纯函数芽之间的运算 (参看卷 I 第 29 目), 不难看出, 定义 (2) 是合理的 (首先. 因为如果 $\boldsymbol{\psi}_1 \neq 0$ 和 $\boldsymbol{\psi}_2 \neq 0$ 可推出 $\boldsymbol{\psi}_1\boldsymbol{\psi}_2 \neq 0$, 故右端属于 $\mathscr{M}_p$, 其次. 它们不依赖于类中代表元的选取). 对于这些运算 $\mathscr{M}_p$ 是个交换域, 我们称其为环 $\mathscr{O}_p$ 的*商域*.

域 $\mathscr{M}_p$ 的加法群的单位元为 $\mathbf{0} = \mathbf{0}/\boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi} \neq \mathbf{0}$; 它可以恒同于恒等于 0 的全纯函数芽. 不恒等于零的亚纯函数芽的集合 $\mathscr{M}_p^* = \mathscr{M}_p \setminus \mathbf{0}$ 构成域 $\mathscr{M}_p$ 的乘法群. 其单位元为 $\mathbf{1} = \dfrac{\boldsymbol{\varphi}}{\boldsymbol{\varphi}}$, 其中 $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$, 而元素 $\mathbf{f} = \boldsymbol{\varphi}/\boldsymbol{\psi}$ 的逆元为 $\dfrac{1}{\mathbf{f}} = \boldsymbol{\psi}/\boldsymbol{\varphi}$ (因为 $\boldsymbol{\varphi} \neq \mathbf{0}$ 它也属于 $\mathscr{M}_p$).

现在可以在复流形 M 上引进*亚纯函数层*, 即其空间为

$$\mathscr{M}(M) = \bigcup_{p \in M} \mathscr{M}_p \tag{3}$$

的域层, 而其投射和拓扑如在层 $\mathscr{O}(M)$ 中那样引进. 在此拓扑下运算 (2) 为连续. 层 $\mathscr{M}(M)$ 在域 $D \subset M$ 上的截影被称做在此区域上的*亚纯函数*; 这些亚纯函数的集记作 $\Gamma(D, \mathscr{M})$ 或简单地记作 $\mathscr{M}(D)$.

相对于亚纯函数 $f \in \mathscr{M}(D)$ 可将区域 D 中的点分为两种类型。我们说函数 f 在点 $p \in D$ *有定义*是指, 如果 f 对点 p 对应的芽 $\mathbf{f} \in \mathscr{M}_p$, 它有代表元 $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}), \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in \mathscr{O}_p$, 使它们在点 p 不能同时为零.[1)] 亚纯函数 f 有定义的每个点 p 具有复数值 $f(p) =$

[1)] 全纯函数芽在一点的值理解为在此点它的代表函数的值

$\boldsymbol{\varphi}(p)/\boldsymbol{\psi}(p)$, 当 $\boldsymbol{\psi}(p) \neq 0$ 时为有限, 而当 $\boldsymbol{\psi}(p) = 0$ 时为无穷 (显然, 这个值并不依于芽 $\mathbf{f}$ 的代表元 (φ, ψ) 的选取). 半纯函数 $f \in \mathscr{M}(D)$ 在 D 中无定义的点构成了这个函数的*无定义点集*. 这是那样的点 p, 对于芽 $\mathbf{f} \in \mathscr{M}_p$ 对应的所有代表元 $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi})$ 同时有 $\boldsymbol{\varphi}(p) = \boldsymbol{\psi}(p) = 0$.

函数 $f \in \mathscr{M}(D)$ 的 D 中有定义的点构成了 D 中一个开的并且稠密的集合. 这是因为它的补集是 f 的无定义点集, 而它是个解析集. 完全同样地, D 中函数 f 有定义并取有限值的点集也是开和稠的. 由形如 $\boldsymbol{\varphi}/\mathbf{1}$ 代表的芽 $\mathbf{f} \in \mathscr{M}$ 从而可等同于芽 $\boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{O}$, 它所对应的这个点集因而被称为函数 f 的*全纯集*. 称它在区域 D 中的补集为 f 的*极集*(它由 f 的无定义点和那些 f 有定义但取无穷值的点组成的集合).

作为例子, 我们考虑在 $\overline{\mathbb{C}}^n$ 和 $\mathbb{P}^n$ 上的亚纯函数. 在 $\overline{\mathbb{C}}^n$ 中对 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 的所有多项式和有理函数都是亚纯的.

例题. 对函数 z_1z_2 在 $\overline{\mathbb{C}}^2$ 中的无穷远点的集合是其极集, 在其上 $(0, \infty)$ 和 $(\infty, 0)$ 是无定义点. 对函数 $z_1z_2/(z_1 + z_2)$ 极集是直线 $\{z_2 = -z_1\}$, 无定义点为 $(0, 0), (\infty, \infty)$, 其他的无穷远点为全纯点.

在 $\mathbb{P}^n$ 中 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 的多项式不是函数 (如果它不是常数的话), 而在有理函数中只允许那些齐次函数, 它们在 z 到 λz 的变换下不变, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}_*$ (即同次齐次多项式的比); 后者是 $\mathbb{CP}^n$ 中的亚纯函数. 原来, 有理函数穷竭了在此区域中全部的亚纯函数.

定理 1. 任意在 $\mathbb{P}^n$ 或 $\overline{\mathbb{C}}^n$ 上的亚纯函数都是有理函数.

证明. 这两个空间的仿射部分都是 $\mathbb{C}^n$; 如果 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ 为 $\mathbb{C}^n$ 中的坐标, 则 f 在任意复直线 $\mathbb{C} = \{z_\nu\}$ 的限制在其他坐标固定时是单变量 z_ν 的亚纯函数, 它在点 $z_\nu = \infty$ 为极点或者可去点 $(\nu = 1, \cdots, n)$. 由卷 I 第 25 目的定理知这个限制是 z_ν 的有理函数. 但是在其他变量固定时对每一个变量的有理函数是对整个变量组的有理函数 (参看第 I 章的问题 10). 由唯一性定理, f 在整个空间 $\mathbb{P}^n$ 或 $\overline{\mathbb{C}}^n$ 上为有理函数. □

我们转向亚纯函数的除子概念. 对于单变量函数的除子, 这是函数带有阶数的零点和极点的集合. 并且零点的阶数设为正, 而极点的为负. 过渡到一般情形时, 我们假定在 n 维复流形 M 上给出了一个亚纯函数 f. 设局部地, 在点 $p_0 \in M$ 的邻域 U 中, 它被表示为 U 中全纯函数的比:

$$f(p) = \frac{\varphi(p)}{\psi(p)}, \tag{4}$$

其中 φ 和 ψ 没有公共的同时取 0 的全纯因子 (我们称这种表示为简约的). 我们以 A 记此函数 f 的零点集 N 和它的极点集 P 的并, 这显然是个余维 1 的解析集 (或为

空). 无定义点即交 $N\bigcap P$ 是 A 的临界点, 故任意正则点 $a\in A^0$ 要么属于 N. 要么属于 P (参看第 24 目). 另外, 这样的点只能属于 N 或 P 的一个不可约分支 (因为一些分支的交集中的点为临界点), 从而相应于它有完全确定的自然数, 即在函数 φ 或 ψ 分解为不可约因子的分解式中它的对应因子的指数 (参看第 24 目). 如果 $a\in N$ 我们约定取这个数以 $+$ 号, 而如果 $a\in P$, 加以符号 $-$, 并称其为这个分支的阶. 显然, 它不依赖局部代表式 (4) 的选取.

称偶对

$$\Delta_f=(A,k) \tag{5}$$

为亚纯函数 f 的除子, 它由余维 1 的解析集 $A=N\bigcup P$ 和整数函数 $k=k(p)$ 组成, 它在 A 的正则点集 A^0 上定义并在它的每个不可约分支上取常值, 并等于此分支的阶; 函数 k 在 A^0 连续.

44. 第一库赞问题

作为开始, 我们重新叙述按照其极点和主部构造单变量亚纯函数的问题 (卷 I, 第 45 目). 设在区域 $D\subset\mathbb{C}$ 中给出了点序列 a_ν, 它在 D 中没有极限点, 并设有函数序列 $g_\nu(z)=\sum\limits_{k=1}^{n_\nu}\dfrac{c_k^{(\nu)}}{(z-a_\nu)^k}$. 考虑区域 D 中由区域 $U_\alpha\subset D$ 组成的覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 它们中的每一个集只包含了有限个点 a_ν, 并且以 f_α 记对所有点 $a_\nu\in U_\alpha$ 对应的 g_ν 的和; 如果 U_α 不含有点 a_ν, 则令 $f_\alpha\equiv 0$. 所有 f_α 为亚纯函数, 另外, 如果 $U_\alpha\bigcap U_\beta\neq\varnothing$, 则在此交集上 $f_\alpha-f_\beta=h_{\alpha\beta}$ 为全纯函数. 这个问题化成了在整个区域 D 上构造一个亚纯函数 f, 使得差 $f-f_\alpha$ 在 U_α 上全纯. 其中 α 为 A 中的所有指标. 由米塔 – 列夫勒 (Mittag-Leffler) 定理 (卷 I, 第 45 目) 知此问题对任意平面区域可解.

可以对任意复流形 M 以这样的形式提出问题, 并称其为对于覆盖的第一或加法库赞问题.

以后, 我们对流形 M 上的一个覆盖理解为组 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 其开子集 U_α 使得 $\bigcup U_\alpha=M$ 并且每个点 $p\in M$ 只属于有限个 U_α(即局部有限性条件). 我们这样来提出问题:

给出复流形 M 的一个覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和在每个 U_α 给定的亚纯函数 f_α, 另外还满足下述的相容条件: 在任意非空交集 $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\bigcap U_\beta$ 上差

$$f_\alpha-f_\beta=h_{\alpha\beta}\in\mathscr{O}(U_{\alpha\beta}), \tag{1}$$

即为全纯函数. 要求在整个流形 M 上构造亚纯函数 f, 使得 $f-f_\alpha\in\mathscr{O}(U_\alpha)$ 对所有 $\alpha\in A$ 成立.

对维数大于 1 的情形, 这个问题不总有解.

例题. 设区域 $\mathbb{C}^2_*=\mathbb{C}^2\backslash\{0\}$ 被两个区域 $U_j=\mathbb{C}^2\backslash\{z_j=0\}, j=1,2$ 所覆盖. 作为 f_1 我们选取在 U_1 上的亚纯函数 $1/(z_1z_2)$, 而在 U_2 上令 $f_2\equiv 0$; 因为 $U_{12}=$

$\mathbb{C}^2\backslash\{z_1z_2=0\}$, 故这些库赞条件相容. 假设所提出的这个库赞问题有解, 即存在 $\mathbb{C}^2_*$ 上的亚纯函数 f, 使得 $f-f_1=g_1\in\mathscr{O}(U_1)$ 以及 $f\in\mathscr{O}(U_2)$. 因为 $z_2f_1=1/z_1\in\mathscr{O}(U_1)$, 故而 $z_2f\in\mathscr{O}(U_1)$, 从而函数 z_2f 在 $U_1\bigcup U_2=\mathbb{C}^2_*$ 全纯. 由紧奇点集的定理知 z_2f 可延拓为整函数. 而在 U_1 上 $1/z_1=z_2f-z_2g_1$. 特别, 在去掉一点的平面 $\{z_2=0\}\backslash\{0\}$ 上 $1/z_1=z_2f$. 但是函数 z_2f 在 0 连续, 而 $1/z_1$ 无界: 这是个矛盾.

我们来推导库赞问题可解的充要条件, 但是它十分接近于问题本身, 使得可以看作是一种不同的提法.

函数 $h_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta$ 显然对指标是反称的, 即 $h_{\beta\alpha}=-h_{\alpha\beta}$, 而在每个三重交集 $U_{\alpha\beta\gamma}=U_\alpha\bigcap U_\beta\bigcap U_\gamma\neq\varnothing$ 上, 它们满足条件

$$h_{\alpha\beta}+h_{\beta\gamma}+h_{\gamma\alpha}=0. \tag{2}$$

任意一组函数 $h_{\alpha\beta}\in\mathscr{O}(U_{\alpha\beta})$, 它对指标为反称并对所有三重交 $U_{\alpha\beta\gamma}$ 满足条件 (2) 时, 我们就称其为对所给流形的覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 的一个**全纯上闭链**.

如果这些函数以关系 (1) 给出库赞条件, 于是上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 被称做对应的库赞问题 $\{f_\alpha\}$. 最后, 我们称全纯上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 为一个**上边缘**是说, 如果对所有 $\alpha\in A$ 存在函数 $h_\alpha\in\mathscr{O}(U_\alpha)$, 使得在每个交集 $U_{\alpha\beta}$ 上

$$h_{\alpha\beta}=h_\beta-h_\alpha. \tag{3}$$

所引进的这些术语让我们可以阐述我们曾谈到过的可解性条件

定理 1. 对于流形 M 上给出的覆盖 $\mathscr{U}$ 的库赞问题 $\{f_\alpha\}$ 有解的充要条件是对应的这个问题的全纯上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 为上边缘.

证明. 如果库赞问题 $\{f_\alpha\}$ 可解, 则存在在 M 上亚纯函数 f, 使得所有的差 $f-f_\alpha=h_\alpha(\alpha\in A)$ 在 U_α 中全纯. 由此对对应的全纯上闭链 $h_{\alpha\beta}$ 有

$$h_{\alpha\beta}=f_\alpha-f_\beta=h_\beta-h_\alpha,$$

而这意味着 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 上同调于零.

反过来, 设对应于库赞问题 $\{f_\alpha\}$ 的全纯上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 是个上边缘, 于是存在函数 $h_\alpha\in\mathscr{O}(U_\alpha)$, 使得 $h_\beta-h_\alpha=h_{\alpha\beta}$ 在每个交集 $U_{\alpha\beta}$ 成立, 即在每个 $U_{\alpha\beta}$ 上有 $f_\alpha-f_\beta=h_\beta-h_\alpha$, 或者说, 对任意的 α,β 有

$$f_\alpha+h_\alpha=f_\beta+h_\beta.$$

因此函数 $f_\alpha+h_\alpha$ 在 U_α 中亚纯, 不依赖于邻域 U_α 的选取, 从而在整个 M 上整体定义了一个亚纯函数 f, 它在每个 U_α 上等于 $f_\alpha+h_\alpha$. 它解决了我们所考虑的库赞问题. □

对所证明的定理我们来重新措词. 对给定的流形 M 上的覆盖 $\{U_\alpha\}$, 全纯上闭链 $h_{\alpha\beta}$ 可以相加 (在每个交集 $U_{\alpha\beta}$ 逐点相加), 并且相对于这个运算它们构成了一个群, 我们记其为 $Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O})$, 并称做对所给覆盖 $\mathscr{U}$ 的**全纯上闭链群**. 在此群中有一个上边缘的子群 $B^1(\mathscr{U},\mathscr{O})$. 称商群

$$Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O})/B^1(\mathscr{U},\mathscr{O}) = H^1(\mathscr{U},\mathscr{O}) \tag{4}$$

为对流形 M 的覆盖 $\mathscr{U}$ 的 (第一) **上同调群** (具全纯系数)

$H^1(\mathscr{U},\mathscr{O})$ 中的元素是相互上同调的全纯上闭链的类 这个群为平凡表明,对所考虑覆盖所有全纯上闭链为上边缘. 因此定理 1 可如此叙述:

定理 1′. 对复流形 M 的覆叠 $\mathscr{U}$ 的任意第一库赞问题可解的充要条件是其具全纯系数的第一上同调群为平凡:

$$H^1(\mathscr{U},\mathscr{O}) = 0. \tag{5}$$

上面所引进的概念可以直接类推到光滑 (无限可微) 函数类和光滑流形上. 设光滑流形 M 由开集系 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖, 并且相伴于每个非空交 $U_{\alpha\beta}$ 对应了函数 $h_{\alpha\beta} \in \mathscr{F}(U_{\alpha\beta})$, 即在 $U_{\alpha\beta}$ 光滑使得 $h_{\beta\alpha} = -h_{\alpha\beta}$. 如果在每个三重交上满足条件 (2), 则我们称 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 为对覆盖 $\mathscr{U}$ 的**光滑上闭链**. 如果还满足类比的光滑条件 (3), 即对任意 $\alpha \in A$ 存在函数 $h_\alpha \in \mathscr{F}(U_\alpha)$ 使得在 $U_{\alpha\beta}$ 上有 $h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$ 对所有 $\alpha,\beta \in A$ 成立, 则称上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 为上边缘.

完全像在全纯情形可定义具光滑系数的第一上同调群 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$. 但是, 实际成立有

定理 2. 对光滑流形 M 上任意覆盖 $\mathscr{U}$, 具光滑系数的第一上同调群为平凡:

$$H^1(\mathscr{U},\mathscr{F}) = 0. \tag{6}$$

证明. 对 $\{U_\alpha\}$ 构造 1 的分解, 即一个函数族 $e_\alpha \in C^\infty(M)$ 使得 $\sum\limits_{\alpha\in A} e_\alpha(p) = 1$ 对所有点 $p \in M$ 成立, 并且每个 e_α 的支集闭包紧于 U_α. 利用这个 1 的分解, 我们变换 $h_{\alpha\beta}$ 为函数

$$h'_{i\alpha} = \begin{cases} e_i h_{i\alpha}, & \text{在 } U_{i\alpha} \text{ 中}, \\ 0, & \text{在 } U_\alpha \backslash U_{i\alpha}, \end{cases}$$

以将 $h_{\alpha\beta}$ 光滑化. 这时我们已将 $h_{i\alpha}$ 延拓到了整个 U_α, 然而它实际只在交集 $U_{i\alpha}$ 上不为零. 现在在每个 U_α 上我们可以定义函数

$$h_\alpha = \sum_i h'_{i\alpha}; \tag{7}$$

这里的取和遍及整个指标集, 但是在每个点 $p \in U_\alpha$ 只有有限个项不为零.

显然, 所有 $h_\alpha \in C^\infty$ 并且在每个交集 $U_{\alpha\beta}$ 中任意点有

$$h_\beta - h_\alpha = \sum_i (h'_{i\beta} - h'_{i\alpha}) = \sum_i e_i(h_{i\beta} - h_{i\alpha}). \tag{8}$$

但是因为 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 为上闭链, 于是在交集 $U_{\alpha\beta i}$ 中每个点由 (2) 有 $h_{i\beta}-h_{i\alpha} = h_{\alpha i}+h_{i\beta} = h_{\alpha\beta}$, 因此根据 (8), 在每个 $U_{\alpha\beta}$ 有

$$h_\beta - h_\alpha = \sum_i e_i h_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}.$$

故而族 $\{h_\alpha\}$ 为所需要的, 即 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 是个上边缘. □

读者无疑已注意到, 在这里所引进的术语类似于在第 14 目中所讨论微分形式时所引进的. 在下一目中我们将断言在微分形式和库赞问题之间的联系十分深刻, 而不是能由相似的术语所能彻底表达的.

45. 第一问题的解

在此将证明在多圆盘的最简单情形或者更一般的平面单连通区域的乘积情形中第一库赞问题的可解性. 求解将分两步实现, 其中的第一步已经准备好, 而第二步要求下面的准备.

引理. 在任意单连通区域 $D \subset \mathbb{C}$ 中, 对任意函数 $g \in C^\infty$ 的非齐次柯西 – 黎曼方程组

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = g(z) \tag{1}$$

在 $C^\infty(D)$ 类中可解. 如果在此 g 为某个参数的全纯 (或光滑) 的函数, 则解 f 也全纯 (或光滑) 地依赖于该参数.

证明. 先设函数 g 具有紧支集, 即在 D 中某个紧集外等于零. 由柯西 – 格林公式 (卷 I, 第 19 目) 于是有

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}} \frac{d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}. \tag{2}$$

考虑函数

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{g(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{\zeta - z}; \tag{3}$$

我们可以把 g 延拓到整个平面, 这只要令它在 $\mathbb{C}\backslash D$ 中为零即可, 并因此假定该积分取在整个 $\mathbb{C}$ 上. 我们再做积分变量的变换 $\zeta \mapsto \zeta + z$; 于是有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{g(z+\zeta)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{4}$$

在积分号下取微分 (显然这是合理的), 我们发现有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}\frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{\zeta}$$

或者恢复到老的积分变量, 有

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{\partial g}{\partial \bar{\zeta}}\frac{d\zeta\wedge d\bar{\zeta}}{\zeta-z}.$$

将其与 (2) 比较, 使我们确信 f 满足方程组 (1). 对积分 (4) 按 z 微分可进行任意次, 因而 $f\in C^\infty(D)$. 如果 g 全纯依赖于参数, 从而此积分也同样全纯依赖于它. 对具紧支集的 g 引理得证.

在一般情形我们取穷竭 D 的紧单连通区域 $G_\nu(G_\nu\Subset G_{\nu+1},\bigcup G_\nu=D)$, 并构造函数 $g_\nu\in C^\infty(D)$, 使得在 G_ν 中 $g_\nu=g$; 在 $D\backslash G_{\nu+1}$ 中 $g_\nu=0$. 由所证的结果知, 每个组 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=g_\nu$ 在 $C^\infty(D)$ 中有解. 我们要证明解 f_ν 可以被选择为使得在每个 G_ν 有

$$|f_{\nu+1}-f_\nu|<1/2^\nu,\quad \nu=1,2,\cdots. \tag{5}$$

事实上, 我们按公式 (3) 选取 f_1, 在其中以 g_1 替换 g, 然后按同一公式以 $g=g_2$ 取 $\widetilde{f}_2$ 并注意到 $\widetilde{f}_2-f_1$ 在 G_1 中全纯 (因为在那里有 $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}(\widetilde{f}_2-f_1)=g_2-g_1=0$). 由龙格定理 (卷 I, 第 23 目), 对任意区域 $G_0\Subset G_1$ 可以选取多项式 P_1 使得在 G_0 上有

$$|\widetilde{f}_2-f_1-P_1|<\frac{1}{2};$$

现在可看出, $f_2=\widetilde{f}_2-P_1$ 满足方程 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=g_2$ 和 $\nu=1$ 时的条件 (5). 完全相同方法可以应用于 $\nu=2,3,\cdots$.

在每个紧集 $K\Subset D$ 上所构造的序列一致收敛于函数

$$f=f_1+\sum_{\nu=1}^{\infty}(f_{\nu+1}-f_\nu).$$

在任意 G_μ 中函数 f 可表示为有限个 C^∞ 类的函数和, 并且是由全纯函数 $f_{\nu+1}-f_\nu,\nu\geqslant\mu$ 构成的级数的一致收敛的和 $\left(\text{当 } \nu\geqslant\mu \text{ 时在 } G_\mu \text{ 上有 } \dfrac{\partial f_{\nu+1}}{\partial \bar{z}}=\dfrac{\partial f_\nu}{\partial \bar{z}}=g\right)$. 因此, $f\in C^\infty(D)$ 和在 D 中处处有 $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}=\lim\limits_{\nu\to\infty}\dfrac{\partial f_\nu}{\partial \bar{z}}=g$; 由 g 对参数的全纯依赖性推导出 f 对其的全纯依赖性来自魏尔斯特拉斯定理 (卷 I, 第 23 目), 而光滑性的情形其证明是初等的. □

库赞问题求解的第二步的基础在于所谓的 $\bar{\partial}$- 问题可解性定理. 为了阐述它我们回忆一下, 任意一个关于算子 $\bar{\partial}$ 的恰当微分 ω (即可以表示为形式 $\omega=\bar{\partial}\omega_1$ 的 ω)

必定也是个闭形式, 即对它有 $\overline{\partial}\omega=0$: 这可由关系 $\overline{\partial}^2=0$ 得出 (参看第 15 目). 因此, 闭条件是形式为恰当的必要条件. $\overline{\partial}-$ 问题的可解性表达了在某些区域上这个条件也是充分的.

定理 1. 如果区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 为多圆盘, 或更一般地是平面单连通区域的乘积 $D_1\times\cdots\times D_n$, 则在其上每个对于算子 $\overline{\partial}$ 为闭的双阶 $(0,1)$ 的形式 ω 为恰当, 其中 ω 具有光滑系数, 就是说任意方程

$$\overline{\partial}f=\omega, \tag{6}$$

其中 $\omega=\sum\limits_{\nu=1}^{n}a_\nu d\overline{z}_\nu, a_\nu\in C^\infty(D)$ 且 $\overline{\partial}\omega=0$, 在函数类 $f\in C^\infty(D)$ 中有解

证明. 把 (6) 改写为形如下面的方程组

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_\nu}=a_\nu,\quad \nu=1,\cdots,n, \tag{7}$$

它在 $C^\infty(D)$ 类中的可解性将由对 n 的归纳来证明 当 $n=1$ 时论断由引理得证; 设当变量个数不超过 $n-1$ 时论断成立; 我们将证明方程 (7) 在 n 个变量的情形也成立.

考虑这个方程组中的最后一个方程

$$\frac{\partial f}{\partial\overline{z}_n}=a_n,$$

并以 g 表示它在区域 D_n 中的解, 这是一个关于 z_n 的函数, 它依赖于作为参数的 $'z=(z_1,\cdots,z_{n-1})$. 我们来求出方程组 (7) 的形如 $f=g+\varphi$ 的解; 于是 φ 应该对 z_n 在 D_n 中全纯, 而对其余的变量在区域 $'D=D_1\times\cdots\times D_{n-1}$ 中满足方程组

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}_\nu}=a_\nu-\frac{\partial g}{\partial\overline{z}_\nu}\equiv b_\nu,\quad \nu=1,\cdots,n-1. \tag{8}$$

因为形式 ω 为闭, 故 $\dfrac{\partial a_\mu}{\partial\overline{z}_\nu}=\dfrac{\partial a_\nu}{\partial\overline{z}_\mu}$ 和 $\dfrac{\partial^2 g}{\partial\overline{z}_\mu\partial\overline{z}_\nu}=\dfrac{\partial^2 g}{\partial\overline{z}_\nu\partial\overline{z}_\mu}$, 故对 $\mu,\nu=1,\cdots,n-1$ 有 $\dfrac{\partial b_\mu}{\partial\overline{z}_\nu}=\dfrac{\partial b_\nu}{\partial\overline{z}_\mu}$. 于是, 形式 $\sum\limits_{\nu=1}^{n-1}b_\nu d\overline{z}_\nu$ 也为闭, 并且由归纳假定, 存在方程组 (8) 的解 $\varphi\in C^\infty('D)$, 它依赖于参数 z_n. 还需验证 φ 全纯地依赖于 z_n, 为此只需断言方程组 (8) 的右端全纯依赖于 z_n 即可 [1]. 但是

$$\frac{\partial b_\nu}{\partial\overline{z}_n}=\frac{\partial a_\nu}{\partial\overline{z}_n}-\frac{\partial^2 g}{\partial\overline{z}_n\partial\overline{z}_\nu}=\frac{\partial a_\nu}{\partial\overline{z}_n}-\frac{\partial a_n}{\partial\overline{z}_\nu}=0$$

因形式 ω 为闭, 故对所有 $\nu=1,\cdots,n-1$ 成立. □

[1] 这个论断可利用引理对 n 归纳证明.

我们以记号

$$\widetilde{H}^1(D) = Z^{0,1}/B^{0,1} \tag{9}$$

表示双阶 (0,1) 的对算子 $\overline{\partial}$ 的具 D 中光滑系数的闭形式的群 $Z^{0,1}$ 对于其子群 $B^{0,1}$ 的商群, 其中 $B^{0,1}$ 为恰当 (0.1)– 形式的群 (与第 15 目相比较, 在那里相似的群是对算子 d 定义的). 于是定理 1 可阐述为

定理 1′. 对于平面单连通区域的乘积 D, 商群 (9) 平凡.

现在对库赞问题可解性的证明已全部就绪.

定理 2. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为平面单连通区域的乘积, 则对它的任意覆盖 $\{U_\alpha\}$, 任意一个加法库赞问题 $\{f_\alpha\}$ 有解.

证明. 像已经说过的, 证明分两步进行. 设 $h_{\alpha\beta} = f_\alpha - f_\beta$ 是相应的全纯上闭链问题 (即在覆盖区域的交集 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$ 上全纯函数组). 首先, 利用上一目的定理 2 我们分解这个上闭链为光滑函数, 即存在函数 $g_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$, 使得在 $U_{\alpha\beta}$ 上有

$$h_{\alpha\beta} = g_\beta - g_\alpha. \tag{10}$$

在第二步, 我们来修正这个解, 将 g_α 换为全纯函数. 为此我们注意到, 由于 $h_{\alpha\beta}$ 在每个交集 $U_{\alpha\beta}$ 上的全纯性, 我们有 $\overline{\partial} h_{\alpha\beta} = \overline{\partial} g_\beta - \overline{\partial} g_\alpha = 0$. 由此看出, 有一个在每个 U_α 上等于 $\overline{\partial} g_\alpha$, 实际上在整个区域 D 整体定义的双阶 (0,1) 形式 ω (因为在每个交集上 $\overline{\partial} g_\alpha = \overline{\partial} g_\beta$). 这个形式显然在 D 上为闭 (因为每个点 $z \in D$ 连同其某个邻域属于某个 U_α, 而在那里 $\omega = \overline{\partial} g_\alpha$, 从而 $\overline{\partial}\omega = 0$) 并具有光滑的系数.

由定理 1, 存在在 D 中的光滑函数 g 使得 $\overline{\partial} g = \omega$. 于是对所有 α, 函数 $h_\alpha = g_\alpha - g$ 在 U_α 中全纯. 这是因为在这里 $\overline{\partial} h_\alpha = \overline{\partial} g_\alpha - \omega = 0$. 还需替代 (10), 写出

$$h_{\alpha\beta} = (g_\beta - g) - (g_\alpha - g) = h_\beta - h_\alpha. \tag{11}$$

我们已分解上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 为全纯函数, 而由前一目的定理 1, 这对于相应的库赞问题的可解性已足够了. □

注. 求解第一库赞问题我们所根据的两个事实中的第一个是具光滑系数的上同调群 $H^1(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ 的平凡性, 它对任意光滑流形的任意开覆盖均成立 (参看第 44 目定理 2). 第二个事实是, 在流形 M 上 $\overline{\partial}$– 问题的可解性, 或者, 相同地, 闭 (0.1)– 形式相对于恰当形式的商群 $\widetilde{H}^1(M)$ 的平凡性则非常微妙并不总成立.

在解 $\overline{\partial}$– 问题时出现的困难是由于当 $n > 1$ 时方程组 $\overline{\partial} f = \omega$ 的超定引起的: 它化为在一个未知函数 f 上的 n 个复条件. 但是, 如果在右端的形式 ω 在区域 D 中具紧支集 (当然, 为 $\overline{\partial}$– 闭), 则此问题容易解决: 只需在支集外令其为零便延拓 ω 在任意包含 D 的多圆盘中, 并利用已证明了的定理 1. 因此, 在此问题中的主要困难在于要排除掉区域边界的影响.

许多涉及 $\overline{\partial}-$ 问题的研究由拉尔斯 · 赫尔曼德尔 (Lars Hörmander) 的工作所完成, 他证明了可以对所有伪凸域, 亦即意味着对所有全纯域 (对其边界的光滑性没有任何要求) 排除掉边界的影响. 我们不加证明地给出这个结果[1].

定理 (赫尔曼德尔). 在任意伪凸域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上方程 $\overline{\partial} f = \omega$ 在 $C^\infty(D)$ 类中对任意具 D 上光滑系数的 $\overline{\partial}-$ 闭的 $(0,1)-$ 形式有解, 即对这样的区域有

$$\widetilde{H}^1(D) = Z^{0,1}/B^{0,1} = 0. \tag{12}$$

根据这个所引述的事实, 我们可以重复定理 2 的证明从而得到对覆盖的第一库赞问题的可解性定理:

定理 3. 对于伪凸域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 上的任意覆盖 $\{U_\alpha\}$, 任一个第一库赞问题 $\{f_\alpha\}$ 都有解.

* 设区域 $D_1, D_2 \subset \mathbb{C}^n$, 使 $D_1 \bigcap D_2 = D$ 为全纯域. 证明, 任意 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可以表示为 $f_1 + f_2$ 的形式, 其中 $f_j \in \mathscr{O}(D_j), j = 1, 2$.*

§16. 层论的方法

在这一节里我们想使读者认识一些方法, 它出现在将复分析的思想与代数和拓扑思想的结合之中. 在这些方法的创建中的主要成果属于法国数学学派, 首要归功于 H. 嘉当和 J. P. 塞尔. 我们的目的不在于方法本身而是它们的应用. 所以有些论断将没有证明.

我们从在第 44 目中引进的术语的推广着手, 把它们从亚纯函数推广到某个代数结构的任意层的截影. 为了有确定性, 我们总把层看成是以加法为运算的阿贝尔群的层.

46. 上同调群

我们考虑拓扑空间 M 的覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, 在其中给出了一个阿贝尔群层 $\mathscr{S}$. 固定一个整数 $r \geqslant 0$ 并对任意一个多重指标 $\alpha = (\alpha_0, \cdots, \alpha_r) \in A^{r+1}$ 记

$$U_\alpha = U_{\alpha_0} \bigcap \cdots \bigcap U_{\alpha_r} \tag{1}$$

为此覆盖中 $r+1$ 个集合的交.

对空间 M 上所给覆盖 $\mathscr{U}$, 称以层 $\mathscr{S}$ 为系数的 r 阶上链指的是一个函数 h, 它把每个多重指标 $\alpha \in A^{r+1}$ 指派某个截影 $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \varphi)$ (参看第 28 目), 并且它对指标为反称, 即在指标的偶置换下不变, 而在奇置换下改变符号 (记住, 在茎上的运算

[1] 参看赫尔曼德尔书的定理 4.2.5, 其在 §14 中引述过

推广到了层的截影上) 如果 U_α 为空则假定 $h_\alpha \equiv 0$. 所有 r 阶上链的集合我们记之为 $C^r(\mathscr{U},\mathscr{S})$, 其中的上链是关于覆盖 $\mathscr{U}$, 且以层 $\mathscr{S}$ 为系数; 这是一个作用在茎上运算下的群.

我们现在来定义上边缘算子 δ. 它把每个 r 阶上链带到 $r+1$ 阶上链 δh, 其规则是

$$(\delta h)_{\alpha_0\cdots\alpha_{r+1}} = \sum_{\nu=0}^{r+1}(-1)^\nu h_{\alpha_0\cdots\widehat{\alpha}_\nu\cdots\alpha_{\nu+1}} \tag{2}$$

(右端指标 α_ν 略去). 映射

$$\delta : C^r(\mathscr{U},\mathscr{S}) \to C^{r+1}(\mathscr{U},\mathscr{S}) \tag{3}$$

显然是对应上链群的同态.

算子 δ 类似于边缘算子 ∂ (第 14 目), 像 ∂ 那样它也是等幂的, 即其平方为零:

$$\delta^2 = \delta\cdot\delta = 0. \tag{4}$$

称上链 $h \in C^r(\mathscr{U},\mathscr{S})$ 为**上闭链**是说, 如果它的上边缘 $\delta h = 0$; 称集合

$$Z^r(\mathscr{U},\mathscr{S}) = \{h \in C^r(\mathscr{U},\mathscr{S}) : \delta h = 0\} \tag{5}$$

为 (系数为 $\mathscr{S}$ 的) 第 r 个**上闭链群** 称上闭链 $h \in C^r$ **上同调于零**或者是个**上边缘**是说, 如果存在上链 $g \in C^{r-1}(\mathscr{U},\mathscr{S})$ 使得 $\delta g = h$; 这样的上闭链群被记以符号 $B^r(\mathscr{U},\mathscr{S})$. 它是群 (5) 的子群, 而称商群

$$H^r(\mathscr{U},\mathscr{S}) = Z^r(\mathscr{U},\mathscr{S})/B^r(\mathscr{U},\mathscr{S}) \tag{6}$$

为对覆盖 $\mathscr{U}$ 的 (系数为 $\mathscr{S}$ 的) 第 r 个**上同调群**.

在特殊情形 $r=1$, 上链 $\{h_{\alpha_0\alpha_1}\}$ 定义在覆盖集合的交集 $U_{\alpha_0\alpha_1}$ 上使得 $h_{\alpha_0\alpha_1} + h_{\alpha_1\alpha_0} = 0$ (对指标的反称性). 上边缘算子把它们转换为 2 阶上链, 使得 $(\delta h)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = h_{\alpha_1\alpha_2} - h_{\alpha_0\alpha_2} + h_{\alpha_0\alpha_1}$ 在 $U_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2}$ 中成立. 故而上闭链是那种上链, 对其有 $h_{\alpha_1\alpha_2} + h_{\alpha_2\alpha_0} + h_{\alpha_0\alpha_1} = 0$. 0 阶上链 $\{h_\alpha\}$ 的上边缘为上链 $(\delta h)_{\alpha_0\alpha_1} = h_{\alpha_1} - h_{\alpha_0}$, 因而, 一阶上边缘为那样的上闭链, 对其有 $h_{\alpha_0\alpha_1} = h_{\alpha_1} - h_{\alpha_0}$. 在这里对 $r=1$ 的情形引进的术语与在第 44 目中所考虑的相同, 而在那里所定义的上同调群就是群 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{O})$.

我们再考虑零阶上同调群. 在这里上闭链为上链 $\{h_\alpha\}$, 它在每个交集 $U_{\alpha_0\alpha_1}$ 上有 $h_{\alpha_1} - h_{\alpha_0} = 0$. 因此, 每个 0 阶上闭链 h 定义了**在整个空间** M 上的 $\mathscr{S}$ 的一个截影, 即一个**整体截影**: 群 $\Gamma(M,\mathscr{S})$ 中的一个元素, 它在每个 U_α 上的限制等于 h_α. -1 阶上链按定义是个空集, 从而 0 阶上边缘仅仅是零上链. 相对于它作商群是平凡的, 因而成立

定理 1. 在拓扑空间 M 上对任意覆盖 $\mathscr{U}$, 系数为 $\mathscr{S}$ 第 0 个上同调群等于这个层的整体截影群:

$$H^0(\mathscr{U},\mathscr{S}) \approx \Gamma(M,\mathscr{S}). \tag{7}$$

我们还注意到, 第 44 目的关于群 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 平凡性的定理 2 几乎可以原封不动地搬到前面上同调上. 就是说, 成立

定理 2. 对复流形 M 的任意开覆盖 $\mathscr{U}$. 系数为光滑的 $(0,s)$– 形式芽层 $\mathscr{F}^{0,s}$ 的上同调群为平凡:

$$\text{对所有 } r\geqslant 1 \text{ 和 } s\geqslant 0,\quad H^r(\mathscr{U},\mathscr{F}^{0,s})=0. \tag{8}$$

证明. 要求证明任一个上闭链 $\omega=\{\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_r},\alpha_\nu\in A\}$ 是个上边缘. 选取属于覆盖 $\mathscr{U}$ 的 1 的分解, 其满足在第 44 目定理 2 的证明中所指出的条件, 另外对 $\alpha=(\alpha_0,\cdots,\alpha_{r-1})\in A^r$ 和 $\beta\in A$, 我们令

$$\omega'_{\beta\alpha}=\begin{cases}e_\beta\omega_{\beta\alpha}, & \text{在 } U_{\beta\alpha} \text{ 上},\\ 0, & \text{在 } U_\alpha\backslash U_{\beta\alpha} \text{ 上}.\end{cases}\qquad \omega'_\alpha=\sum_{\beta\in A}\omega'_{\beta\alpha}.$$

我们得到了 $r-1$ 阶上链 ω'; 它的上边缘

$$(\delta\omega')_{\alpha,\alpha_r}=\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\omega'_{\alpha_0\cdots\widehat{\alpha}_\nu\cdots\alpha_r}=\sum_{\beta\in A}e_\beta\sum_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\omega_{\beta\alpha_0\cdots\widehat{\alpha}_\nu\cdots\alpha_r}.$$

但是 $\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_r}-\sum\limits_{\nu=0}^{r}(-1)^\nu\omega_{\beta\alpha_0\cdots\widehat{\alpha}_\nu\cdots\alpha_r}=0$, 这是因为 ω 是个上闭链, 因此

$$(\delta\omega')_{\alpha,\alpha_r}=\sum_{\beta\in A}e_\beta\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_r}=\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_r}\sum_{\beta\in A}e_\beta=\omega_{\alpha_0\cdots\alpha_r},$$

即 $\delta\omega'=\omega$. □

* 设 $\mathbb{P}^1=\{[w_0,w_1]\}$ 被标准的两个区域 $U_0=\{w_0\neq 0\}$ 和 $U_1=\{w_1\neq 0\}$ 所覆盖. 证明, 对此覆盖有 $H^0(\mathscr{U},\mathscr{O})=\mathbb{C},H^k(\mathscr{U},\mathscr{O})=0,k\geqslant 1$.[提示: 考虑函数按局部坐标 $z=w_1/w_0$ 的幂级数展开, 并比较在 U_0,U_1 和 $U_{01}=\{0<|z|<\infty\}$ 中的展式; 当 $k>1$ 时结果为平凡.] *

现在我们从对覆盖的上同调群过渡到空间本身的上同调群. 为此必须建立局部化过程, 这类似于第 28 目中从预层过渡到层的过程. 就是说, 我们赋予覆盖的集合以包含关系作为偏序, 并定义与这两个覆盖相关联的群之间的同态, 这两个覆盖中的一个细于另一个, 并利用这些同态过渡到正向极限.

设给出了两个覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 和 $\mathscr{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$; 称第二个覆盖为第一个的**加细** (记为 $\mathscr{V}\prec\mathscr{U}$) 是说, 如果存在映射

$$\rho: B\to A \tag{9}$$

使 $V_\beta\subset U_{\rho(\beta)}$ 对所有 $\beta\in B$ 成立. 在所给的 ρ 下, 每个上链 $h\in C^r(\mathscr{U})$ 可相伴于一个上链 $\rho h\in C^r(\mathscr{V})$: 对每个多重指标 $\beta\in B^{r+1}$, 令 $(\rho h)_\beta$ 等于 $h_{\rho(\beta)}$ 在 V_β 上的限

制 [1]. 因为我们对任意上链 h 有 $\delta(\rho h) = \rho(\delta h)$ (在这里 δ 为上边缘算子). 则 ρ 诱导出映射

$$\rho^* : H^r(\mathscr{U}, \mathscr{S}) \to H^r(\mathscr{V}, \mathscr{S}). \tag{10}$$

它显然是个群同态.

引理. 如果 $\mathscr{V} \prec \mathscr{U}$, 则同态 ρ^* 不依赖于映射 (9) 的选取

证明. 对 $r = 0$, 由定理 1 知, 引理的断言显然正确, 故可设 $r \geqslant 1$. 设除去 ρ 外还给出了映射 $\rho' : B \to A$ 使得 $V_\beta \subset U_{\rho'(\beta)}, \beta \in B$ 为任意. 我们定义映射 $\sigma : C^{r+1}(\mathscr{U}) \to C^r(\mathscr{V})$: 设对每个 $\beta \in B^{r+1}$ 具有序指标 $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_r$ 和对每个上链 $h \in C^{r+1}(\mathscr{U})$ 有

$$(\sigma h)_\beta = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu h_{\rho(\beta_0)\cdots\rho(\beta_\nu)\rho'(\beta_\nu)\cdots\rho'(\beta_r)}. \tag{11}$$

直接计算 [2] 证明, 对所有 $h \in C^{r+1}(\mathscr{U})$ 有

$$\sigma(\delta h) + \delta(\sigma h) = \rho' h - \rho h.$$

特别地, 如果 h 为上闭链 ($\delta h = 0$), 则 $\rho' h - \rho h = \delta(\sigma h)$. 从而 ρh 和 $\rho' h$ 属于按上边缘做商时同一个等价类. 由此看出, ρ 和 ρ' 对应了同一个从群 $H^r(\mathscr{U})$ 到 $H^r(\mathscr{V})$ 的同态. □

依照这个引理, $\rho^* = \rho_{\mathscr{U}\mathscr{V}}$ 只依赖于这两个覆盖 (在给定 M 和 $\mathscr{S}$ 时). 由其也可看出它满足可迁性: 如果 $\mathscr{W} \preceq \mathscr{V} \preceq \mathscr{U}$, 则

$$\rho_{\mathscr{U}\mathscr{W}} = \rho_{\mathscr{V}\mathscr{W}} \circ \rho_{\mathscr{U}\mathscr{V}}. \tag{12}$$

因此, 实际上我们处在与第 28 目中的相同的状况 (与其唯一的差别是将集合在这里换作考虑集合的族, 即覆盖), 从而可以实现想要的局部化.

为此我们考虑空间 M 的所有可能的覆盖并约定元素 $f \in H^r(\mathscr{U})$ 和 $g \in H^r(\mathscr{V})$ 等价是指, 如果存在覆盖 $\mathscr{W}$ 使得 $\mathscr{W} \prec \mathscr{U}, \mathscr{W} \prec \mathscr{V}$ 并且 $\rho_{\mathscr{U}\mathscr{W}}(f) = \rho_{\mathscr{V}\mathscr{W}}(g)$. 在此关系下的等价类的集合, 即正向极限

$$\lim_{\mathscr{U}} H^r(\mathscr{U}, \mathscr{S}) = H^r(M, \mathscr{S}) \tag{13}$$

---

[1] 对应对前面采用的记号, $\beta = (\beta_0, \cdots, \beta_r), \rho(\beta) = (\rho(\beta_0), \cdots, \rho(\beta_r))$ 和 $V_\beta = V_{\beta_0} \bigcap \cdots \bigcap V_{\beta_r}$; 层的记号 $\mathscr{S}$ 在群 C^r 和其他一些地方已被省略.

[2] 我们对 $r = 1$ 进行计算. 设 $\beta = (\beta_0, \beta_1), \rho(\beta_\nu) = \alpha_\nu, \rho'(\beta_\nu) = \alpha'_\nu$; 我们有 $(\rho' h - \rho h)_\beta = h_{\alpha'_0\alpha'_1} - h_{\alpha_0\alpha_1}$. 另一方面, $(\delta h)_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} = h_{\alpha_1\alpha_2} - h_{\alpha_0\alpha_2} + h_{\alpha_0\alpha_1}$, 从而由 (11) 有 $[\sigma(\delta h)]_\beta = (\delta h)_{\alpha_0\alpha'_0\alpha'_1} - (\delta h)_{\alpha_0\alpha_1\alpha'_1} = h_{\alpha'_0\alpha'_1} + h_{\alpha_0\alpha'_0} - (h_{\alpha_1\alpha'_1} + h_{\alpha_0\alpha_1})$. 但是对应于 $r = 0$ 时 (11) 的公式, 我们得到 $(\sigma h)_{\beta_0} = h_{\alpha_0\alpha'_0}$, 由此 $[\delta(\sigma h)]_\beta = (\sigma h)_{\beta_1} - (\sigma h)_{\beta_0} = h_{\alpha_1\alpha'_1} - h_{\alpha_0\alpha'_0}$ 因此, $[\sigma(\delta h) + \delta(\sigma h)]_\beta = h_{\alpha'_0\alpha'_1} - h_{\alpha_0\alpha_1}$.

被称做空间 M 的第 r 个上同调群 (系数为层 $\mathscr{S}$).

注. 由此定义看出, 如果对空间 M 存在任意细的覆盖 $\mathscr{U}$ 使得 $H^r(\mathscr{U},\mathscr{S})=0$, 则对此空间有 $H^r(M,\mathscr{S})=0$.

我们发现. 当 $r=1$ 时其逆也成立: 如果 $H^1(M,\mathscr{S})=0$, 则 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{S})=0$ 对任意覆盖 $\mathscr{U}$ 均成立. 这是因为当 $r=1$ 时, 同态 $\rho^*:H^1(\mathscr{U})\to H^1(\mathscr{V})$ 为单射, 即上边缘的原像仍是上边缘.

为证明这个事实, 我们考虑上闭链 $h\in Z^1(U)$, 满足 $\rho^*h=\delta h'$, 其中 $h'\in C^0(V)$. 于是对任意 $\beta_0,\beta_1\in B$, 在交集 $V_{\beta_0\beta_1}$ (而它包含在 $U_{\alpha_0\alpha_1}$ 中, 其中 $\alpha_j=\rho(\beta_j)$) 中我们有 $h_{\alpha_0\alpha_1}=h'_{\beta_1}-h'_{\beta_0}$. 因为 h 为上闭链, 则对任意 $\alpha\in A$, 在交集 $U_\alpha\bigcap V_{\beta_0\beta_1}$ 中成立关系 $h_{\alpha_0\alpha_1}-h_{\alpha_0\alpha}+h_{\alpha_1\alpha}=0$, 或者考虑到前面所说, 有

$$h'_{\beta_0}+h_{\alpha_0\alpha}=h'_{\beta_1}+h_{\alpha_1\alpha}.$$

这意味着它定义了 $\Gamma(U_\alpha)$ 中一个截影, 对任意 $\beta\in B$ 它在 $U_\alpha\bigcap V_\beta$ 上由等式 $h_\alpha=h_\beta+h_{\rho(\beta)\alpha}$ 给出. 因而在交集 $U_{\alpha_0\alpha_1}\bigcap V_\beta$ 上得到了

$$\begin{aligned}h_{\alpha_1}-h_{\alpha_0}&=h'_\beta+h_{\rho(\beta)\alpha_1}-h'_\beta-h_{\rho(\beta)\alpha_0}=h_{\rho(\beta)\alpha_1}-h_{\rho(\beta)\alpha_0}\\&=h_{\alpha_0\alpha_1}\end{aligned}$$

(我们在这里再一次利用了 h 是上闭链的性质), 即 h 是个上边缘.

由覆盖的上同调到空间上同调的一个简单的充分条件由勒雷 (Leray) 的一个定理给出: *如果覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 使得对所有 $k>0$ 和所有交集 $U_\alpha=U_{\alpha_1}\bigcap\cdots\bigcap U_{\alpha_k}$ 有群 $H^k(U_\alpha,\mathscr{S})=0$, 则 $H^r(\mathscr{U},\mathscr{S})=H^r(M,\mathscr{S}),r\geqslant 0$.*

47. 层的正合序列

我们从层之间的映射的概念开始, 这个概念完全类似于黎曼域间的映射 (参看第 22 目). 设在同一个空间 M 上给了两个层 $(\mathscr{S},\sigma)$ 和 $(\mathscr{T},\tau)$. 我们称从 $\mathscr{S}$ 的拓扑空间到 $\mathscr{T}$ 的空间的连续映射

$$\varphi:\mathscr{S}\to\mathscr{T} \tag{1}$$

为层映射是说, 在 $\mathscr{S}$ 上处处有

$$\tau\circ\varphi=\sigma. \tag{2}$$

如此引进的层的映射概念保持了纤维 (茎) 不变: 对任意点 $p\in M$ 有 $\varphi(\mathscr{S}_p)\subset\mathscr{T}_p$. 它也保持了截影不变: 如果 f 为层 $\mathscr{S}_U$ 在开集 $U\subset M$ 上的一个截影, 则映射 $\varphi\circ f$ 在 U 上连续并且 $\tau\circ(\varphi\circ f)=\sigma\circ f$ 为恒等映射 (由 $\mathscr{S}_U$ 的截影的定义). 而这表明 $\varphi\circ f\in\mathscr{T}_U$.

称映射 $\varphi:\mathscr{S}\to\mathscr{T}$ 为**层的同态**是说, 如果它是这两个层之间的映射, 并且除此之外还保持了茎之间的代数运算. 称层的同态为它们之间的一个**同构**是说, 如果 φ 是到 $\mathscr{T}$ 上的相互一一映射.

进一步. 设 $(\mathscr{S},\sigma)$ 为 M 上的阿贝尔群层, 且集合 $\mathscr{T}\subset\mathscr{S}$; 称 $(\mathscr{T},\sigma)$ 为层 $(\mathscr{S},\sigma)$ 的*子层*是说, 如果: 1) $\mathscr{T}$ 开于 $\mathscr{S}$, 2) $\sigma(\mathscr{T})=M$ 和 3) 对任意点 $p\in M$, 茎 $\mathscr{T}_p$ 是群 $\mathscr{S}_p$ 的子群.

如果 $\mathscr{T}$ 是阿贝尔群层 $\mathscr{S}$ 的子层, 则对每个点 $p\in M$ 可以构建商群 $\mathscr{F}_p=\mathscr{S}_p/\mathscr{T}_p$; 这些商群的并

$$\mathscr{S}/\mathscr{T}=\bigcup_{p\in M}\mathscr{S}_p/\mathscr{T}_p \tag{3}$$

在赋予商拓扑 [1] 时便被称为 M 上的*商层*.

例题.

(1) 设 0 是复流形 M 上的平凡层 (在每点 $p\in M$, 这个层的茎由单个元 0 组成), $\mathbb{C}$ 为常层, $\mathscr{O}$ 为全纯芽层, 而 $\mathscr{F}$ 为在同一流形 M 上的无限可微函数的芽层. 在这里的每一个前面的层就随后一个的子层 (验证子层定义中的开集条件).

(2) 在复流形 M 上层 $\mathscr{O}$ 是 M 上的亚纯函数芽层 $\mathscr{M}$ 的子层. 我们把 $\mathscr{O}$ 和 $\mathscr{M}$ 看成是*加法群* (关于函数相加); 于是对任意点 $p\in M$, 茎 $\mathscr{O}_p$ 是 $\mathscr{M}_p$ 的子群并可构成商层

$$\mathscr{M}/\mathscr{O}=\bigcup_{p\in M}\mathscr{M}_p/\mathscr{O}_p. \tag{4}$$

这个商层中的元素在点 $p\in M$ 的亚纯函数芽的类中, 两个元素的差是个全纯函数芽. (换句话说, $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 中元素是芽 $\mathbf{f}_p\in\mathscr{M}_p$ 的等价类, 其中 $\mathbf{f}'_p$ 和 $\mathbf{f}''_p$ 被认为是等价, 是指如果 $\mathbf{f}'_p-\mathbf{f}''_p\in\mathscr{O}_p$.) 就像我们马上就会看到的, 这个层与第一库赞问题有关.

(3) 从层 $\mathscr{M}$ 中除掉对应于零截影(即在 M 上恒等于零的函数) 的芽; 于是, $\mathscr{M}^*=\mathscr{M}\backslash\{0\}$ 可以被看成是以乘法为群运算的*乘法群*. 设 $\mathscr{O}^*$ 为在每点 $p\in M$ 的 $\mathscr{O}_p$ 中的可逆元组成的层, 即那些对应于在点 p 不化为零函数的元素. 显然, $\mathscr{O}^*$ 是 $\mathscr{M}^*$ 的子层, 并可构建商层

$$\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*=\bigcup_{p\in M}\mathscr{M}^*_p/\mathscr{O}^*_p. \tag{5}$$

它的元素是不恒等于零的亚纯函数芽的类, 这些亚纯函数的商是不为零的全纯函数芽 (换句话说, 这是芽 $\mathbf{f}\in\mathscr{M}^*$ 的等价类, 其中 $\mathbf{f}'$ 和 $\mathbf{f}''$ 被认为等价是说, 如果 $\mathbf{f}'(\mathbf{f}'')^{-1}\in\mathscr{O}^*$). 就像我们马上就会看到的, 这个层与所谓第二库赞问题相关.

我们转向在这一目中基本的概念, 即层的正合序列的定义. 设给了两个阿贝尔群层的同态:

$$\mathscr{S}_0\xrightarrow{\varphi_1}\mathscr{S}_1\xrightarrow{\varphi_2}\mathscr{S}_2; \tag{6}$$

[1] $\mathscr{S}/\mathscr{T}$ 中的拓扑是商拓扑的理解是, 在其上的一个开集必须是空间 $\mathscr{S}$ 中一个开集的等价类的集合.

称序列 (6) 在项 $\mathscr{S}_1$ 为正合是说, 如果

$$\operatorname{im}\varphi_1 = \ker\varphi_2. \tag{7}$$

我们记得, 符号 $\operatorname{im}\varphi_1 = \varphi_1(\mathscr{S}_0)$ 表示了 $\mathscr{S}_1$ 中元素的子群. 这些元素是 $\mathscr{S}_0$ 中元素的像 (同态 φ_1 的像), 而符号 $\ker\varphi_2$ 是由 $\mathscr{S}_1$ 中那些被 φ_2 带到 $\mathscr{S}_2$ 中零的那些元素组成 (即同态 φ_2 的核). 因此, 序列 (6) 的正合性表明 φ_2 变到 0 的元素正好是由 $\mathscr{S}_0$ 带过来的元素 (图 45).

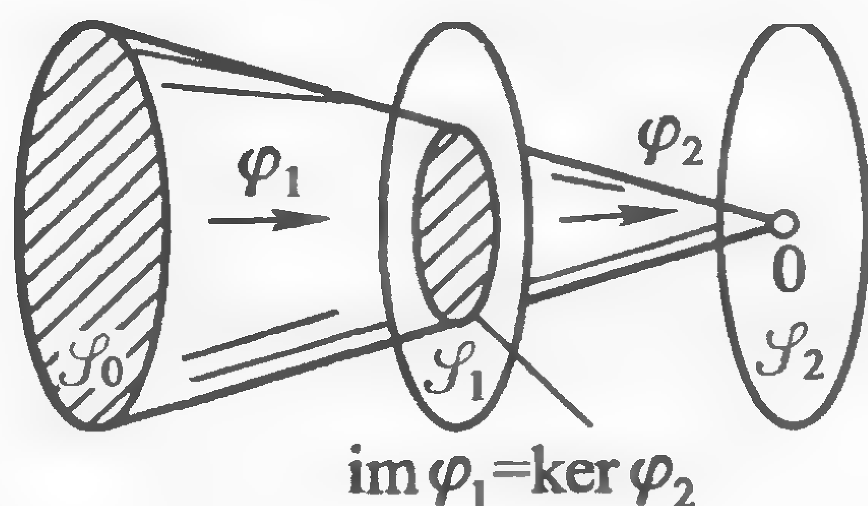


图 45

任意个阿贝尔群层组成的序列

$$\cdots \to \mathscr{S}_{i-1} \xrightarrow{\varphi_i} \mathscr{S}_i \xrightarrow{\varphi_{i+1}} \mathscr{S}_{i+1} \to \cdots. \tag{8}$$

被称为**正合**是说它在每个 $\mathscr{S}_i$ 正合.

例题.

(4) 序列

$$0 \xrightarrow{i} \mathscr{S}_1 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{S}_2 \xrightarrow{j} 0 \tag{9}$$

的正合性, 其中两端的元素为平凡层 (它们的所有茎为由单个零元组成的群), 而 $\imath$ 为嵌入映射, 这表明 φ 是 $\mathscr{S}_1$ 到 $\mathscr{S}_2$ 上的同构. 事实上. 因为 $\ker\varphi = \operatorname{im} i = 0$, 故映射 φ 为单, 而因为 $\operatorname{im}\varphi = \ker j = \mathscr{S}_2$, 故其为满.

(5) 序列

$$0 \to \mathscr{S} \xrightarrow{i} \mathscr{T} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{T}/\mathscr{S} \to 0, \tag{10}$$

其中 $\mathscr{S}$ 为 $\mathscr{T}$ 的子层, i 为嵌入映射, 而 φ 为自然同态, 它把 $\mathscr{T}$ 中每个元对应于包含这个元的等价类, 是正合的. 事实上, (10) 在 $\mathscr{S}$ 的正合性来自 i 为单射, 在项 $\mathscr{T}$ 则由 $\varphi\circ i$ 将 $\mathscr{S}$ 变为 0, 而在 $\mathscr{T}/\mathscr{S}$ 则因 φ 为满.

(6) 更一般地, 阿贝尔群层的序列

$$\mathscr{S}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \mathscr{S}_2 \xrightarrow{\varphi_2} \mathscr{S}_3 \to 0 \tag{11}$$

的正合性表明 φ_2 为满而

$$\mathscr{S}_3 \approx \mathscr{S}_2/\varphi_1(\mathscr{S}_1) \tag{12}$$

为群 $\mathscr{S}_2$ 的像 $\operatorname{im}\varphi_2 = \mathscr{S}_3$, 它同构于 $\mathscr{S}_2$ 对核 $\ker\varphi_2 = \varphi_1(\mathscr{S}_1)$ 的商群.

最后我们不加证明[1]地引进两个定理中的一个, 这两个定理是层论在分析中应用的基础. 至于第二个定理我们将在下一目中谈到它.

定理 I (序列的正合性). 设空间 M 为豪斯多夫的并具有可数的开集基. 于是在 M 上任意层的正合序列

$$0 \to \mathscr{S}' \xrightarrow{\varphi} \mathscr{S} \xrightarrow{\psi} \mathscr{S}'' \to 0 \tag{13}$$

对应于上同调群的正合序列

$$\begin{aligned}
&0 \to H^0(M,\mathscr{S}') \xrightarrow{\varphi_*} H^0(M,\mathscr{S}) \xrightarrow{\psi_*} H^0(M,\mathscr{S}'') \xrightarrow{\delta_*} \\
&H^1(M,\mathscr{S}') \xrightarrow{\varphi_*} H^1(M,\mathscr{S}) \xrightarrow{\psi_*} H^1(M,\mathscr{S}'') \xrightarrow{\delta_*} \\
&H^2(M,\mathscr{S}') \to \cdots
\end{aligned} \tag{14}$$

等等, 对所有维的上同调群.

48. 局部化的第一库赞问题

在复流形 M 上的亚纯函数芽层 $\mathscr{M}$ 可以由在这个流形的覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的区域上截影 $\Gamma(U_\alpha,\mathscr{M})$ 的预层得到了局部化的结果: 覆盖的收缩系统的极限过程 (参看第 28 目). 对覆盖 $\mathscr{U}$ 给出了的第一库赞问题, 这是截影 $f_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,\mathscr{M})$ 的组, 它们满足相容条件: 在所有覆盖的区域的交集 $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\bigcap U_\beta$ 中差 $f_\alpha-f_\beta\in\Gamma(U_{\alpha\beta},\mathscr{O})$, 即全纯, 而问题在于求函数 $f\in\Gamma(M,\mathscr{M})$ 使得 $f-f_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,\mathscr{O})$ 在每个 $U_\alpha,\alpha\in A$ 成立. 因此, 问题的表述具有预层的特性.

但是, 不难给出它的*局部化*的翻版, 这时替代截影的预层我们考虑层 $\mathscr{M}$ 本身. 在这个形式中, 相容的库赞条件是商层 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 在整个流形 M 上的截影, 即群 $\Gamma(M,\mathscr{M}/\mathscr{O})$ 中的元素. 事实上, 每个点 $p\in M$ 该截影给出了商群 $\mathscr{M}_p/\mathscr{O}_p$ 中一个芽即一个亚纯函数芽, 它确定到在此点的一个全纯函数芽的项. 问题便是求出截影 $f\in\Gamma(M,\mathscr{M})$, 在这样的意义下对应于所给出的那个截影: 对每个点 $p\in M$, 芽 $\mathbf{f}_p$ 等于所给出的那个芽, 但可以相差一个全纯函数芽的项.

对于局部第一库赞问题的解需要关于 $\overline{\partial}-$ 问题可解性的赫尔曼德尔的一般性定理, 其特殊情形已在第 45 目的末尾引述过: 代替其中 $(0,1)-$ 形式的叙述要进行有关 $(0,s)-$ 形式的叙述, 而代替伪凸域的是任意的施坦 (Stein) 流形 (参看第 41 目).

定理 II ($\overline{\partial}-$ 问题的可解性). 在任意施坦流形上第 s 个关于算子 $\overline{\partial}$ 的上同调群 (即关于 $\overline{\partial}$ 的双阶 $(0,s)$ 的 M 上具光滑系数的闭形式群 $Z^{0,s}$ 对于恰当 $(0,s)-$ 形式子群 $B^{0,s}$ 的商群) 对任意 $s\geqslant 1$ 是平凡的:

$$\widetilde{H}^s(M)=Z^{0,s}/B^{0,s}=0,\quad s=1,2,\cdots. \tag{1}$$

[1] 见第 41 目末尾的脚注所引的赫尔曼德尔的书的推论 5.2.6

换句话说, 在施坦流形上方程

$$\overline{\partial}\sigma = \omega \tag{2}$$

在类 $\mathscr{F}^{0,s-1}$ 中对于任意形式 $\omega \in \mathscr{F}^{0,s}$. $\overline{\partial}\omega = 0$, 有解. 证明略去[1]. 利用定理 II 便证明了

定理 1 (多比尔特 (Dolbeault)). 对任意复流形 M, 具全纯系数的 s 维, $s \geqslant 1$, 上同调群同构于群 $\widetilde{H}^s(M)$:

$$H^s(M, \mathscr{O}) \simeq Z^{0,s}/B^{0,s}, \quad s = 1, 2, \cdots. \tag{3}$$

证明. 以 $\widetilde{\mathscr{F}}^s$ 和 Z^s 分别表示流形 M 上光滑的和 (对算子 $\overline{\partial}$) 闭的双阶 $(0, s)$ 的形式的层, 并将它们看成是对于加法的阿贝尔群层. 层的序列

$$0 \xrightarrow{i} \widetilde{Z}^{s-1} \xrightarrow{i} \widetilde{\mathscr{F}}^{s-1} \xrightarrow{\overline{\partial}} \widetilde{Z}^s \to 0, \tag{4}$$

其中 i 为嵌入, 对任意 $s \geqslant 1$ 为正合. 事实上, 在第一项有 $\operatorname{im} i = \ker i = 0$. 在这二项有 $\operatorname{im} i = \ker \overline{\partial} = \widetilde{Z}^{s-1}$, 而在第三项有 $\operatorname{im} \overline{\partial} = \widetilde{Z}^s$; 最后面的这个论断来自这样的事实, 即在每点 $p \in M$ 有可缩的邻域系而这些邻域是施坦流形 (例如, 是局部坐标空间中球的双全纯像), 而由定理 II, 这样的邻域中每个闭形式为恰当.

由前一目的定理 I 有上同调群的正合序列

$$\begin{aligned} 0 &\to H^0(\widetilde{Z}^{s-1}) \to H^0(\widetilde{\mathscr{F}}^{s-1}) \to H^0(\widetilde{Z}^s) \to H^1(\widetilde{Z}^{s-1}) \\ &\to H^1(\widetilde{\mathscr{F}}^{s-1}) \to H^1(\widetilde{Z}^s) \to H^2(\widetilde{Z}^{s-1}) \to \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

(在这些群的记号中我们略去了符号 M). 我们回忆, 第 0 个上同调是整体截影. 并由第 46 目的定理 2 $H^r(\widetilde{\mathscr{F}}^s) = 0$, 对所有 $r \geqslant 1$ 和 $s \geqslant 0$, 故由 (5) 得到

$$\Gamma(\widetilde{\mathscr{F}}^{s-1}) \to \Gamma(\widetilde{Z}^s) \to H^1(\widetilde{Z}^{s-1}) \to 0$$

从而, 由于前一目的公式 (12) 有

$$H^1(\widetilde{Z}^{s-1}) \simeq \Gamma(\widetilde{Z}^s)/\operatorname{im}\Gamma(\widetilde{\mathscr{F}}^{s-1}) = \widetilde{H}^s(M). \tag{6}$$

由同一个序列 (5), 我们进一步对 $r \geqslant 1$ 和 $s \geqslant 1$ 有

$$0 \to H^r(\widetilde{Z}^s) \to H^{r+1}(\widetilde{Z}^{s-1}) \to 0,$$

由此得到 (参看前一目的公式 (9)),

$$H^r(\widetilde{Z}^s) \simeq H^{r+1}(\widetilde{Z}^{s-1}). \tag{7}$$

[1] 参看前面所引赫尔曼德尔的书, 推论 5.2.6.

根据 (6) 和 (7) 最后得到序列:

$$\widetilde{H}^s(M) \simeq H^1(\widetilde{Z}^{s-1}) \simeq H^2(\widetilde{Z}^{s-2}) \simeq \cdots \simeq H^s(\widetilde{Z}^0).$$

还要注意, $\widetilde{Z}^0$ 是光滑复函数 f 的芽层, 其中的 f 满足 $\overline{\partial} f = 0$, 即 M 上的全纯函数芽层 $\mathscr{O}$. □

结合 (1) 和 (3) 给出

推论. 对任意施坦流形有

$$H^s(M, \mathscr{O}) = 0 \text{ 对所有 } s \geqslant 1 \text{ 成立.} \tag{8}$$

现在不难给出第一库赞问题的局部形式的可解性的证明.

定理 2 (H. 嘉当). 对于任意施坦流形 M, 任意第一库赞问题可解.

证明. 我们考虑 M 上的阿贝尔群层的序列

$$0 \xrightarrow{i} \mathscr{O} \xrightarrow{i} \mathscr{M} \xrightarrow{\varphi} \mathscr{M}/\mathscr{O} \to 0, \tag{9}$$

其中 i 为嵌入, 而 φ 为自然同态, 它将每个芽 $\mathbf{f} \in \mathscr{M}$ 对应于 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 中包含 $\mathbf{f}$ 的类. 按照上一目的定理 I, 序列

$$H^0(M, \mathscr{M}) \xrightarrow{\varphi_*} H^0(M, \mathscr{M}/\mathscr{O}) \to H^1(M, \mathscr{O})$$

正合, 而因为 M 为施坦流形, 故 $H^1(M, \mathscr{O}) = 0$, 从而映射

$$\varphi_* : \Gamma(M, \mathscr{M}) \to \Gamma(M, \mathscr{M}/\mathscr{O})$$

为满射, 即层 $\mathscr{M}/\mathscr{O}$ 的每个截影对应了一个亚纯函数 $f \in \Gamma(M, \mathscr{M})$. 而这即表明了问题的可解性. □

因此, 第一库赞问题 (局部形式或对于覆盖的) 对所有的施坦流形可解, 特别地对 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯域可解.

我们发现原来 $\mathbb{C}^2$ 中所有对此问题可解的区域被全纯域所穷竭:

定理 3. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^2$ 对任意第一库赞问题可解, 则 D 为全纯域.

证明. 如果 D 不是全纯域, 则存在中心在边界点 $\zeta \in \partial D$ 的球 B, 所有的函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可解析延拓到其上. 取任意点 $z \in D \bigcap B$ 并在线段 $z\zeta$ 选取点 $\zeta^0 \in \partial D$ 逼近于 z. 不失一般性可设 $\zeta^0 = 0$ 且直线 $\{z_2 = 0\}$ 包含了线段 $z\zeta^0 \subset D \bigcap B$. 利用在 D 中库赞问题的可解性, 我们现在可以构建一个函数 $g \in \mathscr{O}(D)$ 它不可解析延拓到球 B 中, 而这导致了矛盾.

函数 g 的构建可以像在第 44 目的例子那样进行. 像在这个例子中那样, 我们选取 U_1 和 U_2, 并考虑相容的库赞条件: 在 $D\bigcap U_2$ 中 $f_1=1/(z_1z_2)$; 而在 $D\bigcap U_2, f_2\equiv 0$. 如果 f 对此问题有解, 则函数 $g=z_2f$ 在 D 中全纯. 但是在 $g=\dfrac{1}{z_1}$ 的区域 $D\bigcap\{z_2=0\}$ 包含了线段 $[0,z]\subset B$, 从而. g 不能解析延拓到 B 中. □

这个定理不能推广到空间 $\mathbb{C}^n, n\geqslant 3$.

例题. 考虑区域 $D\subset\mathbb{C}^3$, 它由单位多圆盘 U 中去掉了集合 $\{z:|z_1|\leqslant 1/2,\ |z_2|\leqslant 1/2,\ |z_3|\geqslant 1/2\}$ 得到; 换句话说, D 是多圆盘. 在其上的边缘 $|z_3|=1$ 就像图 46 那样被向内压缩. 以三个全纯域覆盖 D:

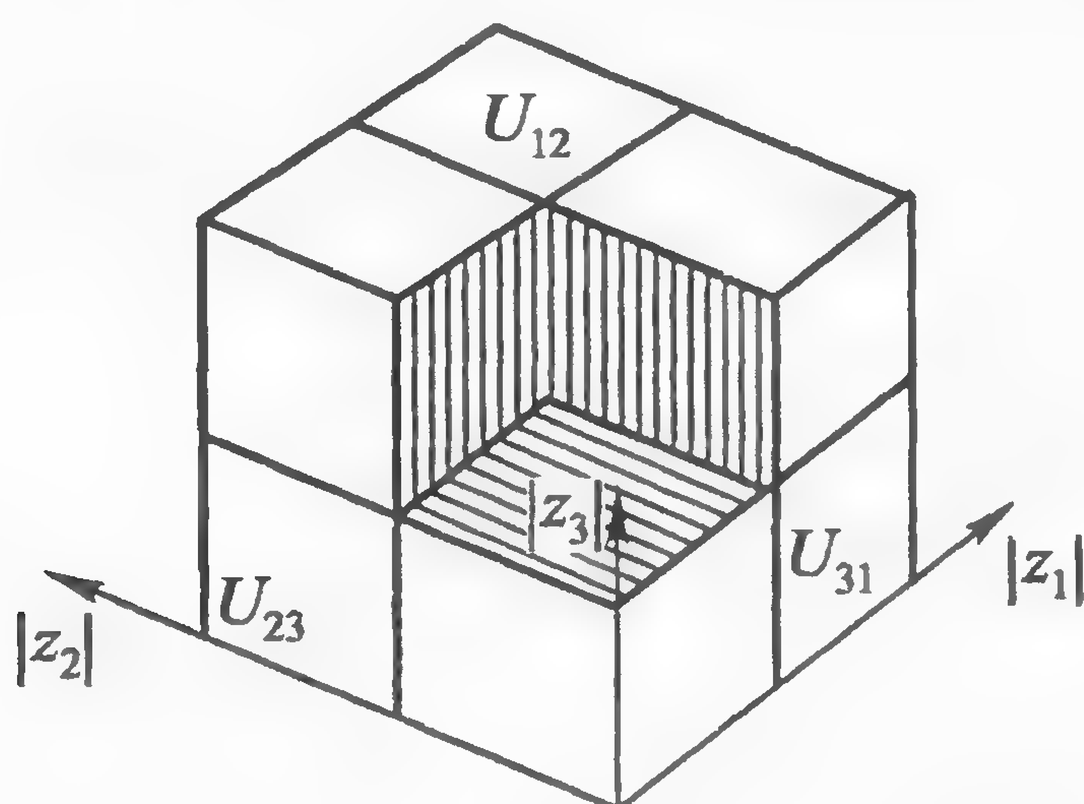


图 46

$$U_1=\{z:1/2<|z_1|<1,|z_2|<1,|z_3|<1\},$$
$$U_2=\{z:|z_1|<1,1/2<|z_2|<1,|z_3|<1\} \tag{10}$$
$$U_3=\{z:|z_1|<1,|z_2|<1,|z_3|<1/2\},$$

并考虑相应的全纯上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$. 将 $h_{\alpha\beta}$ 在区域 U_{123} 中展开为洛朗级数. 因为这个展式在 $U_{\alpha\beta}$ 中收敛, 故得到 h_{23} 和 h_{31} 展式的主部分别等于这些函数对 z_2 和 z_1 展成洛朗级数的主部. 因此, 由在 U_{123} 中的等式

$$h_{12}+h_{23}+h_{31}=0, \tag{11}$$

我们得知函数 h_{12} 的洛朗级数的主部可分解为两部分, 其中一部分对 z_1 为全纯, 故被延拓到 U_1, 另一部分对 z_2 全纯从而延拓到 U_2. 但是由等式(11) 从而得出函数 h_{23} 和 h_{31} 的洛朗展式的主部分别延拓到 U_2 和 U_1. 类似地我们得到这些函数的正则部分也可延拓到相应的区域. 以 h_1 表示 h_{31} 在 U_1 中的延拓, h_2 表示 h_{32} 在 U_2 中的延拓, 并令在 U_3 中 $h_3=0$. 于是在 U_{12} 中有

$$h_2-h_1=h_{32}-h_{31}=h_{12},$$

并且因此知 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 是上链 $\{h_\alpha\}$ 的上边缘, 即对于覆盖 (10) 的第一库赞可解. 由我们已指出过的不难得出的结论, 局部形式的库赞问题在 D 中有解. 还要注意, D 本身不是个全纯域, 因为它不是一个对数凸的赖因哈特区域.

49. 第二库赞问题

这个问题推广了按所给零点构造全纯函数的问题, 在单变量情形它由魏尔斯特拉斯定理所解决 (卷 I, 第 46 目). 称它为对覆盖的*第二或乘法库赞问题*, 并叙述于后:

给出复流形 M 的覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 并在每个 U 上给出了函数 $f_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,\mathscr{M}^*)$, 即不恒等于零的亚纯函数. 并且满足下述的*相容条件*: 在任意的交集 $U_{\alpha\beta}=U_\alpha\bigcap U_\beta$ 上分式 $f_\alpha/f_\beta\in\Gamma(U_{\alpha\beta},\mathscr{O}^*)$, 即为没有零点的全纯函数. 要求构造流形 M 上一个亚纯函数 f, 使得 $f/f_\alpha\in\Gamma(U_\alpha,\mathscr{O}^*)$, 其 $\alpha\in A$ 为任意.

这个问题的解函数 f, 在每个 U_α 上有与所给亚纯函数 f_α 相同的零点和极点 (计算上重数). 该问题的局部形式可规定如下: 对所给层 $\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 的截影 (相容条件) 求对应于它的在整个流形 M 上层 $\mathscr{M}$ 的截影.

我们还引进库赞第二问题的另一种阐述. 在第 43 目中我们曾引进所给亚纯函数的除子概念. 我们现在一般地称流形 M 上的偶对 $\Delta=(A,k)$ 为*除子*是说, 它由余维 1 的解析集 A (除子的*支集*) 和整数值函数 k (除子的*次数*) 组成, 其中 k 在 A 的正则点集 A^0 上连续. 称除子为*正*是说处处有 $k>0$, 为*负*如果处处 $k<0$ (与第 43 目比较). 我们约定当 $p\in M\backslash A^0$ 时 $k(p)\equiv 0$, 于是可以引进除子 $\Delta_1=(A_1,k_1)$ 与 $\Delta_2=(A_2,k_2)$ 的和 (差) 为除子 $\Delta_1\pm\Delta_2=(A_1\bigcup A_2,k_1\pm k_2)$. 称 $\Delta_1=\Delta_2$ 是说, 如果 $\Delta_1-\Delta_2$ 具有次数 $k\equiv 0$.

称除子 Δ 为*主除子*是说, 如果存在 M 上的亚纯函数 f, 使得 $\Delta=\Delta_f$, 即这个函数的除子 (参看第 43 目). 在任意平面区域 $D\neq\mathbb{C}$ 中任意除子都是主除子, 这是由卷 I 的魏尔斯特拉斯定理和米塔 – 列夫勒定理得到的. 但是对 $\overline{\mathbb{C}}$ 这已不是这样的了: 除子 $(\infty,1)$ 不是个主除子, 这是因为在 $\overline{\mathbb{C}}$ 上不存在这样的全纯函数, 它在无穷远点具有一阶零点 (所有这样的函数为常数). 在 $\mathbb{C}^2$ 上也存在这样的区域, 它不是这样的.

例题. 设 D 为 $\mathbb{C}^2$ 去掉圆 $\gamma=\{|z_1|=1,z_2=0\}$. 考虑除子 $\Delta=(\{z_2=0\},k)$, 其中当 $|z_1|<1$ 时 $k=0$, 当 $|z_1|>1$ 时 $k=1$. 它为非负, 故使得它只能对应于 $D=\mathbb{C}^2\backslash\gamma$ 中的全纯函数. 由紧奇点定理, 这个函数可以延拓为整函数, 但是因它在 $\{z_2=0\}$ 上的限制不能在 γ 内等于零, 并在 γ 之外也不为零, 因此 Δ 不是主除子.

定理 1. 对复流形 M 上的任意覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, 第二库赞问题有解当且仅当在这个流形上任意除子是主除子.

证明. a) 设在 M 上任意除子都是主除子且设 $\{f_\alpha\}$ 为对覆盖 $\mathscr{U}$ 的任意第

二库赞问题的条件. 设 $\Delta_{f_\alpha} = (A_\alpha, k_\alpha)$ 为函数 f_α 的除子; 因为对任意交 $U_{\alpha\beta}$ 有 $f_\alpha/f_\beta \in \mathscr{O}^*(U_{\alpha\beta})$, 则在此交集上有 $A_\alpha = A_\beta$ 和 $k_\alpha = k_\beta$. 因此 $A = \bigcup\limits_{\alpha\in A} A_\alpha$ 为余维 1 的 M 的解析子集, 且在 U_α 上 $k = k_\alpha$ 是在 A^0 上整体给出的整数函数, 即 $(A,k) = \Delta$ 是 M 上的除子.

取函数 $f \in \mathscr{M}(M)$, 使其 $\Delta_f = \Delta$. 于是 f/f_α 对任意 $\alpha \in A$ 在 $U_\alpha \backslash A_\alpha$ 和在 A_α 的正则点中全纯且不为零, 而因为 A_α 的临界点集的余维不小于 2, 故按第 32 目的定理 4 f/f_α 被延拓为 $\mathscr{O}(U_\alpha)$ 中的函数, 显然并不取零值. 因此 f 是对具条件 $\{f_\alpha\}$ 的问题的解.

b) 设在 M 上该问题可解且 $\Delta = (A,k)$ 为任意一个除子. 因为 $\operatorname{codim} A = 1$, 故对任意 $\alpha \in A$ 存在有限个函数 $h_{\alpha j} \in \mathscr{O}(U_\alpha)$ 使得

$$A \bigcap U_\alpha = \bigcup_j \{h_{\alpha_j} = 0\}.$$

不失一般性可设 $A_{\alpha_j} = \{h_{\alpha_j} = 0\}$ 为不可约集, 而 h_{α_j} 为不可约函数 (与第 24 目相比较). 次数 k 在 A_{α_j} 的正则点集上为常数, 设其为 k_{α_j}. 我们令 $f_\alpha = \prod\limits_j (h_{\alpha_j})^{k_{\alpha_j}}$ 对那些 $U_\alpha \bigcap A \neq \varnothing$ 的 α, 同时对其他的 α 有 $f_\alpha \equiv 1$. 这是第二库赞问题的相容条件, 并且由假设条件, 存在函数 $f \in \mathscr{M}(M)$ 为它的解. 按构造 $\Delta_f = \Delta$. □

因此, 对于覆盖的第二库赞问题被证明原来等价于按所给除子构造亚纯函数的问题. 对于局部的阐述情况类似. 在这种情形, 该问题的相容条件可作为层 $\mathscr{D} = \mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$ 在 M 上截影来处理, 称 $\mathscr{D}$ 为*除子芽层*, 而这个问题便化为寻找对应于这个截影的函数 $f \in \Gamma(M, \mathscr{M}^*)$.

转到可解性问题. 有了第二库赞问题的相对于流形 M 上覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 的条件 $\{f_\alpha\}$, 则可以在每个交集 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$ 上考虑公式

$$h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha}{f_\beta} \in \Gamma(U_{\alpha\beta}, \mathscr{O}^*). \tag{1}$$

函数 $h_{\alpha\beta}$ 满足条件

$$h_{\alpha\beta} h_{\beta\alpha} = 1, \quad h_{\alpha\beta} h_{\beta\gamma} h_{\gamma\alpha} = 1, \tag{2}$$

它是第 44 目中条件的乘法类比, 它定义了全纯上闭链, 我们称对所给覆盖 $\mathscr{U}$ 的它们的组为一个*乘法上闭链*. 如果 $\{h'_{\alpha\beta}\}$ 和 $\{h''_{\alpha\beta}\}$ 为两个这样的上闭链, 则它们的乘积即函数组 $h_{\alpha\beta} = h'_{\alpha\beta} h''_{\alpha\beta}$ 也是个乘法上闭链. 这样的上闭链构成了一个群, 以记号 $Z^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}^*)$ 代表它.

像在第 44 目中那样, 第二库赞问题是可解的当且仅当存在函数 $h_\alpha \in \Gamma(U_\alpha, \mathscr{U}^*)$ 使得在每个 $U_{\alpha\beta}$ 上有

$$h_{\alpha\beta} = h_\beta / h_\alpha. \tag{3}$$

这样的组 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 被称做乘法上边缘; 这些组组成了 $Z'(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)$ 的子群, 以符号 $B^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)$ 记之. 称商群

$$H^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)=Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)/B^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*) \tag{4}$$

为对覆盖 $\mathscr{U}$ 的以层 $\mathscr{O}^*$ 为系数的第一上同调群, 在这里的群运算像在 $\mathscr{O}^*$ 那样是乘法而不是在 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{O})$ 中作用的加法. 由 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)$ 的平凡性显然得到对覆盖 $\mathscr{U}$ 的任意第二库赞问题的可解性.

产生的自然想法是利用对数映射把库赞第二问题化成第一问题. 因为函数 $h_{\alpha\beta}$ 全纯并不同于零, 故当假定交集 $U_{\alpha\beta}$ 为单连通时, 我们可以在它们中每一个中选取 $\ln h_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$ 的一个全纯分支, 并且由于 (2) 的第一个条件使得 $g_{\alpha\beta}+g_{\beta\alpha}=0$. 由 (2) 的第二个条件, 我们于是得到, 在交集 $U_{\alpha\beta\gamma}$ 上有

$$g_{\alpha\beta}+g_{\beta\gamma}+g_{\gamma\alpha}=2\pi i k_{\alpha\beta\gamma},$$

其中 $k_{\alpha\beta\gamma}$ 为某个整数. 如果所有这些数等于零, 我们便到达了第一库赞问题, 而解此问题就得到了第二问题的解. 但是, 一般说来情况并非如此, 而且在流形 M 上除了第一库赞问题的可解性条件外, 还需要附加某些拓扑的限制条件, 它应该能保证选取 $\ln h_{\alpha\beta}=g_{\alpha\beta}$ 的分支, 使得所有的 $k_{\alpha\beta\gamma}$ 最后被证实都为零.

这个限制条件可表达为对于覆盖 $\mathscr{U}$ 的整系数的第二上同调群为平凡的条件, 按照在第 46 目中所采用的系统, 它以符号 $H^2(\mathscr{U},\mathbb{Z})$ 表示. 它表明任意二阶整数上闭链, 即三指标的整值函数 $k_{\alpha\beta\gamma}$ 对指标为反称, 并在四重交 $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 上满足条件 $k_{\beta\gamma\delta}-k_{\alpha\gamma\delta}+k_{\alpha\beta\delta}-k_{\alpha\beta\gamma}=0$, 可表示为

$$k_{\alpha\beta\gamma}=k_{\beta\gamma}-k_{\alpha\gamma}+k_{\alpha\beta}, \tag{5}$$

其中 $k_{\alpha\beta},\cdots$ 为整数.

定理 2 (塞尔 (Serre)). 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 为复流形 M 的一个单覆盖, 即所有交集 $U_{\alpha\beta}$ 连通且单连通. 如果对这个覆盖有

$$H^1(\mathscr{U},\mathscr{O})=H^2(\mathscr{U},\mathbb{Z})=0, \tag{6}$$

则任意第二库赞问题对于它有解.

证明. 设 $\{h_{\alpha\beta}\}\in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)$ 为乘法上闭链, 按公式 (1) 所对应的第二库赞问题的条件为 $\{f_\alpha\}$. 由相交集的单连通性, 可选取 $g'_{\alpha\beta}=\ln h_{\alpha\beta}$ 的全纯分支, 使它们能做到对所有 α,β 为 $\ln h_{\beta\alpha}=-\ln h_{\alpha\beta}$.

在三重交集上我们有

$$g'_{\alpha\beta}+g'_{\beta\gamma}+g'_{\gamma\alpha}=2\pi i k_{\alpha\beta\gamma}, \tag{7}$$

其中 $\{k_{\alpha\beta\gamma}\}$ 为 $Z^2(\mathscr{U},\mathbb{Z})$ 中的整数上闭链. 按条件 $H^2(\mathscr{U},\mathbb{Z})=0$, 表明我们可以以形 (5) 代表这个上闭链, 并令在 $U_{\alpha\beta}$ 上

$$g_{\alpha\beta}=g'_{\alpha\beta}-2\pi ik_{\alpha\beta}.$$

于是在每个三重交集 $U_{\alpha\beta\gamma}$ 上由 (7) 和 (5) 有

$$g_{\alpha\beta}+g_{\beta\gamma}+g_{\gamma\alpha}=2\pi ik_{\alpha\beta\gamma}-2\pi i(k_{\alpha\beta}+k_{\beta\gamma}+k_{\gamma\alpha})=0.$$

因此, $\{g_{\alpha\beta}\}$ 是 $Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O})$ 中的全纯上闭链. 按照定理的条件 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{O})=0$, 因此, 它也是个上边缘, 即存在 $g_\alpha\in\mathscr{O}(U_\alpha)$ 使得 $g_{\alpha\beta}=g_\beta-g_\alpha$. 我们令 $h_\alpha=e^{g_\alpha}$; 于是 $h_\alpha\in\mathscr{O}^*(U_\alpha)$ 和 $h_{\alpha\beta}=e^{g'_{\alpha\beta}}=e^{g_{\alpha\beta}}=h_\beta/h_\alpha$. 这表明 $\{h_{\alpha\beta}\}\in B^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)$; 我们便证明了 $H^1(\mathscr{U},\mathscr{O}^*)=0$, 从而定理得证. □

转到局部问题, 我们发现如在拓扑中证明那样, 整系数上同调对于空间的同伦变换不变 (这反映了它们的拓扑特征). 我们已知, 拓扑空间的两个连续映射 $f,g:X\to Y$ 被称做同伦是说, 如果存在连续映射族 $f_t:X\to Y$, 它连续地依赖于参数 $t\in[0,1]$, 并且使得 $f_0=f, f_1=g$ (与第 21 目的同伦方法相比较). 称两个空间同伦是说, 如果存在连续映射 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to X$, 使得 $g\circ f$ 同伦于空间 X 的恒同映射, 而 $f\circ g$ 同伦于 Y 的恒同映射.

* 证明,

1. 球 $B^n=\{z\in\mathbb{C}^n:|z|<1\}$ 同伦于一个点, 而球环 $\{z\in\mathbb{C}^n:r<|z|<R\}$ 同伦于球面 $\{|z|=1\}$.

2. 对于球, 当 $s>0$ 时有 $H^s(B^n,\mathbb{Z})=0$, 而对 n 维球面当 $0<s<n$ 时 $H^s(S^n,\mathbb{Z})=0$, 而 $H^n(S^n,\mathbb{Z})=\mathbb{Z}$.

3. 如果对流形 M 有 $H^s(M,\mathbb{Z})=0$, 则对它的任意单覆盖有 $H^s(\mathscr{U},\mathbb{Z})=0$.*

现在来进行定理 2 的局部不变性的证明.

定理 3 (塞尔). 在施坦流形 M 上, 如果它的第二个整系数上同调群平凡:

$$H^2(M,\mathbb{Z})=0, \tag{8}$$

则 M 上的任意一个第二库赞问题可解.

证明. 考虑乘法群层的正合序列

$$1\to\mathscr{O}^*\xrightarrow{i}\mathscr{M}^*\xrightarrow{\varphi}\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*\to 1,$$

其中 i 为嵌入, 而 φ 为自然同态 (其正合性来自 $\operatorname{im} i=\ker\varphi$ 和 $\operatorname{im}\varphi=\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*$). 对应于它有正合序列

$$\Gamma(M,\mathscr{M}^*)\to\Gamma(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)\to H^1(M,\mathscr{O}^*). \tag{9}$$

所考虑问题的可解性条件是映射

$$\varphi_*:\Gamma(M,\mathscr{M}^*)\to\Gamma(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$$

为满. 因为序列 (9) 正合, 故这个条件化为

$$H^1(M,\mathscr{O}^*)=0. \tag{10}$$

我们对此条件给出另一种形式. 为此我们再考虑一个正合序列

$$0\to\mathbb{Z}\xrightarrow{i}\mathscr{O}\xrightarrow{e}\mathscr{O}^*\to 1, \tag{11}$$

其中 i 为嵌入同态, 而 $e:\mathbf{f}\mapsto e^{2\pi i\mathbf{f}}$ 为从加法群层 $\mathscr{O}$ 到乘法群层 $\mathscr{O}^*$ 的同态 [1]. 对应于它的序列

$$H^1(M,\mathscr{O})\to H^1(M,\mathscr{O}^*)\to H^2(M,\mathbb{Z})\to H^2(M,\mathscr{O})$$

也正合, 而因为 M 为施坦流形, 故它两端的群均平凡. 由此得知中间的两个群同构, 并由条件 (8), 等式 (10) 的确成立. □

注. 由此证明看出, 对于对应于 $\Gamma(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$ 的某个截影, 具体第二问题的可解性的充分必要条件是在同态

$$\sigma:\Gamma(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)\to H^1(M,\mathscr{O}^*)$$

下这个截影的像为群 $H^1(M,\mathscr{O}^*)$ 中的单位元. 塞尔还证明了对于施坦流形, σ 总是满的 (另外, 对于任意元 $g\in H^1(M,\mathscr{O}^*)$ 存在对应于它的元素 $f\in\Gamma(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$ 只由全纯函数芽组成). 因此, 如果群 $H^1(M.\mathscr{O}^*)\neq 0$, 则存在 $\Gamma(M,\mathscr{M}^*/\mathscr{O}^*)$ 中截影, 对它而言第二问题无解, 即对施坦流形. 条件 (8) 对任意第二问题也是个必要条件.

例题. 存在不是施坦的流形, 但是第二库赞问题也可解. 空间 $\mathbb{C}^2$ 中的区域 $D=\{0<|z_1|<1;|z_2|<1\}\bigcup\{z_1=0,|z_2|<1/2\}$ 可以作为这种例子: 它不是全纯域, 但可以证明, 在其中任意一个第二库赞问题都可解. 由前一目的定理 3 看出, 区域 D 也可以作为对第二问题有解但对第一库赞问题无解的例子 在前一目的例子 (参看图 46 的例子) 的区域 $D\subset\mathbb{C}^3$ 中第一和第二库赞问题都可解, 虽说 D 并不是全纯域. 第二问题的可解性来自 $H^1(\mathscr{D}.\mathscr{O})=0$ 和 $H^2(D,\mathbb{Z})=0$, 这是因为 D 同胚于球.

塞尔定理的简单推论是下面的定理.

定理 4 (冈洁). 如果 $D=D_1\times\cdots\times D_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆形区域, 其中可能除去一个外其余所有的 D_ν 都是单连通的, 则在 D 中任意第二库赞问题可解.

[1]序列 (11) 的正合性由后面事实可以看出: 恒等于整数的函数在映射 e 下映到了 1 并且每个函数 $f\neq 0$局部地可以表示为 $e^{2\pi ig}$ 的形式, 就是说, 映射 $e:\mathscr{O}\to\mathscr{O}^*$ 为满

证明. 首先, D 显然是个全纯域. 设 $D_2, \cdots, D_n$ 为单连通区域, 于是 $H^2(D,\mathbb{Z}) = H^2(D_1,\mathbb{Z})$, 这是因为整系数的上同调群在与单连通平面区域作 (笛卡儿) 乘积时不变 (我们不打算进入这个拓扑事实的证明). 但是对任意平面区域 D_1, 群 $H^2(D_1,\mathbb{Z})$ 平凡 (这至少可由卷 I, 第 46 目的魏尔斯特拉斯定理得到); 因此 $H^2(D,\mathbb{Z}) = 0$. □

例题. 特别. 由定理 4 得到第二库赞问题在任意单连通多圆形区域中可解. 但是对任意单连通的全纯域还不足以保证这个问题的可解性, 这里是相应的例子 (塞尔). 区域

$$D = \{z \in \mathbb{C}^3 : |z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1| < 1\}$$

是一个全纯域. 这是因为在每个点 $\zeta \in \partial D$ 存在障碍: 函数 $f_\zeta(z) = \{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 - (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)\}^{-1} \in \mathscr{O}(D)$ 当 $z \to \zeta$ 时无界. 该区域为单连通, 这是因为它同胚于曲面 $M = \{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - 1 = 0\}$ 和单位圆盘的乘积. 但是并不是任意的第二库赞问题都在 D 有解. 事实上, 区域 D 同伦于曲面 M. 而它是个二维球面 $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0\}$(请证明!), 因此 $H^2(D,\mathbb{Z}) = H^2(S^2,\mathbb{Z}) \neq 0$.

§17. 应用

我们将考虑在上一节中得到的一些结果的某些应用.

50. 库赞问题的应用

作为第一个应用我们考虑函数从施坦流形 M 的解析子集的全纯延拓问题.

定理 1. 设 M 为施坦流形, 并且

$$A = \{p \in M : \varphi(p) = 0\} \tag{1}$$

为余维 1 的解析集, $\varphi \in \mathscr{O}(M)$ 为它的定义函数 [1]. 于是 A 的任意点上局部全纯的函数 f 可延拓为 $\widetilde{f} \in \mathscr{O}(M)$.

证明. 因为 f 在 A 的点局部全纯, 则流形 M 上存在开覆盖 $\{U_\alpha\}$ 如此细, 使得对任意满足 $U_\alpha \bigcap A \neq \varnothing$ 的 α 存在函数 $f_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$, 满足条件

$$f_\alpha|_{U_\alpha \cap A} = f|_{U_\alpha \cap A}. \tag{2}$$

在剩余的 U_α 中, 我们令 $f_\alpha \equiv 0$, 并且我们取函数组 $f_\alpha/\varphi \in \mathscr{M}(U_\alpha)$ 为对于覆盖 $\{U_\alpha\}$ 的第一库赞问题的给定条件.

[1] 参看第 25 目.

因为在任意交集 $U_{\alpha\beta} = U_\alpha \bigcap U_\beta$ 上, 由于 (2), 差 $f_\alpha - f_\beta$ 在 A 上为零, 故由定义函数的性质存在函数 $h_{\alpha\beta} \in \mathscr{O}(U_{\alpha\beta})$, 使 $f_\alpha - f_\beta = h_{\alpha\beta}\varphi$. 由此看出所考虑的这些条件相容, 并且

$$h_{\alpha\beta} = \frac{f_\alpha - f_\beta}{\varphi} \tag{3}$$

为对应于这个问题的全纯上闭链. 依据第 48 目的定理 2, 这个问题可解, 即存在函数 $h_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$, 使得 $h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$. 将其与 (3) 比较, 我们发现在任意交集 $U_{\alpha\beta}$ 上有 $f_\alpha + \varphi h_\alpha = f_\beta + \varphi h_\beta$. 因此 在 M 上整体定义了一个全纯函数 $\widetilde{f}$, 使得 $\widetilde{f}|_{U_\alpha} = f_\alpha + \varphi h_\alpha$ 对所有 α 成立. 因为在 A 上 $\varphi = 0$, 故 $\widetilde{f}|_A = f$. □

* 设 $M = \{z \in \mathbb{C}^2 : 1 < |z| < 2\}$ 和 $A = \{z \in M : z_2 = 0\}$; 证明. 函数 $f(z) = 1/(z_1 - 1)$ 全纯于 A, 但不能延拓至 M. 为什么在这里不能应用定理 1? *

定理 1 让我们得到赫费尔 (Hefer) 展开式. 我们在第 30 目推导韦伊积分公式时曾不加证明地应用过它. 这个展式的基础是下面的引理

引理. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯域, 并且 $(n-k)$ 维复平面 $\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n : z_1 = \cdots = z_k = 0\}$ 与它有非空交. 于是任意在 $\Pi \bigcap D$ 为零的函数 $f \in \mathscr{O}(D)$ 可在 D 中有表达式

$$f(z) = \sum_{\nu=1}^{k} z_\nu g_\nu(z), \tag{4}$$

其中所有 $g_\nu \in \mathscr{O}(D)$.

证明. 证明将由对 k 的归纳进行. 在 $k=1$ 的情形此论断是显然的, 这是因为作为 g_1 我们可取为函数 f/z_1; 设论断对 $k-1$ 成立. 记 $G = D \bigcap \{z_k = 0\}$; 这个交集的所有连通分支显然是变量 $z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots, z_n$ 的空间 $\mathbb{C}^{n-1}$ 中的全纯域. 限制 $f\big|_{\{z_k=0\}} \in \mathscr{O}(G)$ 并且按所设条件它在 $G \bigcap \{z_1 = \cdots = z_{n-1} = 0\}$ 上为零. 根据归纳假定, 由此推导出在 G 上成立表示

$$f\big|_{\{z_k=0\}} = \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu g_\nu^0(z_1, \cdots, z_{k-1}, z_{k+1}, \cdots, z_n),$$

其中所有 $g_\nu^0 \in \mathscr{O}(G)$. 根据定理 1, 所有 g_ν^0 可从 $G = D \bigcap \{z_k = 0\}$ 延拓到整个区域 D 为函数 $g_\nu(z)$.

我们现在考虑差

$$\varphi(z) = f(z) - \sum_{\nu=1}^{k-1} z_\nu g_\nu(z);$$

显然, $\varphi\big|_{\{z_k=0\}} = 0$, 并且因为 z_k 为定义函数, 故存在 $g_k \in \mathscr{O}(D)$, 使得 $\varphi(z) = z_k g_k(z)$. 其中 $z \in D$ 为任意. 由此看出表示式 (4) 对 k 成立. □

由此引理可十分简单地推导出

定理 2 (赫费尔). 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯域且 $W(z) \in \mathscr{O}(D)$ 为任意函数. 于是存在这样的函数 $P_\nu(\zeta, z) \in \mathscr{O}(D \times D), \nu = 1, \cdots, n$, 使得对所有 $\zeta, z \in D$ 成立表达式

$$W(\zeta) - W(z) = \sum_{\nu=1}^{n} (\zeta_\nu - z_\nu) P_\nu(\zeta, z). \tag{5}$$

证明. 函数差 $W(\zeta) - W(z) \in \mathscr{O}(D \times D)$, 且因为 $D \times D$ 为 $\mathbb{C}^{2n}$ 中的全纯域, 而这个差在 n 维复平面 $\Pi = \{z, \zeta : z_\nu = \zeta_\nu, \nu = 1, \cdots, n\}$ 上为零, 故令 $Z_\nu = \zeta_\nu - z_\nu, Z_{n+\nu} = z_\nu (\nu = 1, \cdots, n)$ 时, 我们可以应用引理到所考虑的这个函数差上. 我们得到了所需要展式 (5). □

定理 1 可以强化. 在其中假设集合 A 具有在整个流形 M 上有整体全纯的定义函数; 我们现在指出, 对于某些流形 M, 这种假设自动满足

定理 3. 设对复流形 M 有

$$H^1(M, \mathscr{O}) = H^2(M, \mathbb{Z}) = 0. \tag{6}$$

于是对任意余维 1 的解析子集 $A \subset M$ 存在整体定义函数 $\varphi \in \mathscr{O}(M)$.

证明. 任意余维 1 的解析子集都具有局部定义函数 (第 25 目) 故而存在流形 M 的覆盖 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$ 如此之细, 使得在每个满足 $U_\alpha \bigcap A \neq \varnothing$ 的 U_α, 存在函数 $\varphi_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$ 定义了集合 $U_\alpha \bigcap A$; 在剩下的 U_α 中我们令 $\varphi_\alpha \equiv 1$. 不失一般性, 可设覆盖 $\mathscr{U}$ 为单的 (参看上一目中定理 2 中的叙述) 并使得 [1)]

$$H^1(\mathscr{U}, \mathscr{O}) = H^2(\mathscr{U}, \mathbb{Z}) = 0. \tag{7}$$

可以把函数组 $\{\varphi_\alpha\}$ 看成是对覆盖 $\mathscr{U}$ 的第二库赞问题的条件; 它们是相容的, 这是因为按照定义函数的性质, 在任一个交集上有 $\varphi_\alpha/\varphi_\beta \in \mathscr{O}^*(U_{\alpha\beta})$. 由上一目定理 2, 这个问题可解, 即存在在 M 上全纯的函数 φ (由于库赞条件的全纯性) 使得 $\varphi/\varphi_\alpha \in \mathscr{O}^*(U_\alpha)$ 在任意 U_α 上成立. 并且这个函数 φ 是集合 A 的整体定义函数. □

我们还要推导出所谓庞加莱问题的解: 把流形上的亚纯函数表示成在此流形上全纯函数的比 (局部地这样的表示来自亚纯函数的定义, 而此问题在于整体表示.)

就像在单变量的情形那样 (见卷 I 第 46 目的定理 3), 可以证明在第二库赞问题可解的流形上庞加莱问题也可解. 利用前一目定理 3 之后的注中所叙述的塞尔的结果可以证明, 对于任意施坦流形的这个可解性问题成立:

定理 4. 每个在施坦流形 M 的亚纯函数 f 可表示为在这个流形上的全纯函数的比.

[1)] 利用第 46 目末尾的注和上一目的习题.

证明. 我们把函数 f 的除子 Δ_f 表示为 $\Gamma(M,\mathscr{D})$ 中两个正除子之差: $\Delta'-\Delta''$, 取元 $\sigma(\Delta'')\in H^1(M,\mathscr{O}^*)$, 并利用所提到塞尔的结果可以找到正除子 Δ''', 使得 $\sigma(\Delta''')=-\sigma(\Delta'')$. 因为 σ 是个同态, 故 $\sigma(\Delta''+\Delta''')=0$. 从而 (由第 49 目定理 3 后面的注解) 对应的库赞问题可解. 并存在函数 $\psi\in\Gamma(M,\mathscr{M}^*)$, 使其除子 $\Delta_\psi=\Delta''+\Delta'''$. 但是这个除子为正. 因此 ψ 为全纯函数. 最后, 我们考虑乘积的除子 $\Delta_{f\psi}=(\Delta'-\Delta'')+(\Delta''+\Delta''')=\Delta'+\Delta'''$; 它也是正的, 因而函数 $\varphi=f\psi$ 在 M 上全纯. 故所给函数 $f=\varphi/\psi$. □

51. 莱维问题的解

我们从推广由解析集延拓函数的问题着手, 这是我们上一目所关注的问题. 它的意思是说, 代替余维 1 的集合我们去考虑任意余维的集合, 而代替全纯函数的是光滑的形式但它是关于算子 $\overline{\partial}$ 的闭形式.

以 X 代表复流形 M 的一个闭子集, 而以 $\widetilde{Z}^s(X)$ 表示定义在 X 的某个邻域中对算子 $\overline{\partial}$ 为闭的双阶 $(0,s)$ 的形式的集合 (其中每个形式有它自己的邻域). 设 $\widetilde{B}^s(X)\subset\widetilde{Z}^s(X)$ 为对于 $\overline{\partial}$ 的恰当形式的子群, 并令 $\widetilde{H}^s(X)=\widetilde{Z}^s(X)/\widetilde{B}^s(X)$ 为商群我们需要下面的引理.

引理. 设 X 为复流形 M 的一个闭子集. 函数 φ 在 X 的邻域中全纯, $A=\{p\in X:\varphi(p)=0\}$. 如果对某个 $s\geqslant 0$ 有

$$\widetilde{H}^{s+1}(X)=0, \tag{1}$$

则对任意形式 $\omega\in\widetilde{Z}^s(A)$, 存在形式 $\Omega\in\widetilde{Z}^s(X)$, 它的限制 $\Omega\big|_A=\omega$. 另外有

$$\widetilde{H}^s(X)=0\Rightarrow\widetilde{H}^s(A)=0. \tag{2}$$

证明. 取任一形式 $\omega\in\widetilde{Z}^s(A)$ 并构造一个函数 $\eta\in C^\infty(X)$, 它在 A 的某个邻域外等于零, 且它及其闭包同属于一个使 ω 有定义的邻域中, 而它在较 A 的那个邻域更小的邻域中等于 1. 于是形式 $\eta\omega$ 在 $\eta=0$ 处扩充定义为 0, 从而在整个 X 为光滑 因为在 $X\backslash A,\varphi\neq 0$ 并全纯 (从而, φ 在那里当对 $\bar{z}$ 微分时就像常数一样), 故形式 $\omega'=\dfrac{1}{\varphi}\overline{\partial}(\eta\omega)$ 在此处为闭.

在 $\eta\equiv 1$ 的那个 A 的邻域中, 我们有 $\overline{\partial}(\eta\omega)=0$, 这是因为 ω 为闭. 故可令 ω' 在 A 上等于零, 从而扩充了 ω' 的定义, 于是得到 $\omega'\in\widetilde{Z}^{s+1}(X)$. 因条件 (1), 存在在 X 上光滑的形式 Ω', 使 $\overline{\partial}\Omega'=\omega'$. 由此推出, 在 X 上

$$\overline{\partial}(\eta\omega-\varphi\Omega')=0,$$

即形式 $\Omega=\eta\omega-\varphi\Omega'\in\widetilde{Z}^s(X)$. 因为在 A 上函数 $\varphi=0$ 而 $\eta=1$, 故限制 $\Omega\big|_A=\omega$, 从而引理的第一个论断得证.

如果还有 $\widetilde{H}^s(X)=0$, 则形式 Ω 在 X 上为恰当, 因此 ω 在 A 上为恰当. 因为 $\omega\in\widetilde{Z}^s(A)$ 是任意取的, 故 $\widetilde{H}^s(A)=0$. □

现在已不难证明关于延拓的一般性定理了.

定理 1. 设 M 为复流形, 且

$$A=\{p\in M:\varphi_1(p)=\cdots=\varphi_m(p)=0\},\tag{3}$$

其中所有 $\varphi_\nu\in\mathscr{O}(M)$. 如果

$$\widetilde{H}^{s+1}(M)=\cdots=\widetilde{H}^{s+m}(M)=0,\tag{4}$$

则任意闭于 A 的邻域中的双阶 $(0,s)$ 形式 ω, 是在 M 上的一个闭形式 Ω 在 A 上的限制.

证明. 记 $A_1=\{p\in M:\varphi_1(p)=0\}$. 由条件 (4) 按引理所有 $\widetilde{Z}^j(A_1),j=s,\cdots,s+m-1$ 的形式可从 A_1 延拓到 M, 并且除此之外, $\widetilde{H}^{s+1}(A_1)=\cdots=\widetilde{H}^{s+m-1}(A_1)=0$. 记 $A_2=\{p\in A_1:\varphi_2(p)=0\}=\{p\in M:\varphi_1(p)=\varphi_2(p)=0\}$; 由这后面的条件按同一个引理得到, 所有 $\widetilde{Z}^j(A_2),j=s,\cdots,s+m-2$, 从 A_2 延拓至 A_1, 并且 $\widetilde{H}^{s+1}(A_2)=\cdots=H^{s+m-2}(A_2)=0$. 继续同一讨论, 最后得到所有 $\widetilde{Z}^s(A)$ 中形式从 $A_m=A$ 延拓到 $A_{m-1}=\{p\in M:\varphi_1(p)=\cdots=\varphi_{m-1}(p)=0\}$. 因为在前一步我们曾得到 $\widetilde{H}^{s+1}(A_{m-1})=0$, 故被延拓了的形式又被延拓到 A_{m-2}, 等等. 沿所构造过的步骤链返回, 我们得到这些形式被延拓为在整个流形 M 上的闭形式. □

推论. 如果对某个复流形 M 有

$$\widetilde{H}^s(M)=0,\quad s=1,\cdots,m\tag{5}$$

则在解析集 $A=\{p\in M:\varphi_1(p)=\cdots=\varphi_m(p)=0\}$ 的邻域中全纯的任意函数 f 可延拓到 M 上全纯的函数, 这里的 $\varphi_j\in\mathscr{O}(M)$.

现在可以转向在 §13 中谈到的莱维问题的解, 它在于证明任何不能全纯扩张到它自己的每个边界点的区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 是个全纯域 (第 37 目). 在第 39 目我们已看到为了这个问题可解只要证明: $\mathbb{C}^n$ 中任意伪凸域是全纯域 (即在第 39 目的图示中的蕴含关系 $\mathrm{V}\Rightarrow\mathrm{I}$).

定理 2. 区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 为全纯域当且仅当

$$\widetilde{H}^s(D)=0,\quad s=1,\cdots,n-1.\tag{6}$$

证明. *必要性*. 像在第 39 目中所证明过的, 任意全纯域为伪凸. 但是按照赫尔曼德尔关于 $\bar\partial-$ 问题的可解性定理, 对任意伪凸域条件 (6) 满足.

充分性. 由第 33 目的定理 2 知, 如果在处处稠密的集合的点 $\zeta \in \partial D$ 存在障碍, 则区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 是个全纯域, 其中 $\zeta \in \partial D$ 为障碍, 表示在 D 中全纯的函数当 $z \to \zeta$ 时无限增大. 设点 $\zeta \in \partial D$, 使得在这点 ∂D 可被球 $B \subset D$ 相切 (于是 $\zeta \in \partial B \bigcap \partial D$). 这样的点集稠于 ∂D, 这是因为对任意 $\zeta^0 \in \partial D$ 和任意 $\varepsilon > 0$ 可取点 $z^0 \in D$, 满足 $|z^0 - \zeta^0| < \varepsilon$; 于是逼近 z^0 时, 点 $\zeta \in \partial D$ 便具有所要的性质且 $|\zeta - \zeta^0| < 2\varepsilon$.

以 l 表示通过 ζ 和球 B 中心的复直线. 这条直线是个解析集并交 D 为 (l 上) 一开集 A, 其实维数等于 2. 点 $\zeta \in \partial A$, 并且可以构造一个在 A 中全纯的函数, 它以 ζ 为极点 (对任意平面开集都存在这样的函数). 由条件 (6), 按照定理 1 的推论, 这个函数可延拓为函数 $F \in \mathscr{O}(D)$, 它在 $z \to \zeta$ 时无限增大, 即在点 ζ 有障碍. □

* 证明区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为全纯域当且仅当 $H^s(D, \mathscr{O}) = 0$ 对 $s = 1, \cdots, n-1$ 成立. *

52. 其他的应用

我们在前面曾不止一次地用过的 $\bar{\partial}-$ 问题的可解性可以被用于复分析中一系列其他的问题. 我们在这里给出这类应用中的两个例子

作为第一个例子我们考虑 CR – 函数的局部延拓问题的解, 而我们曾在第 31 目中考虑过它的整体延拓问题. 如果在整体形式中问题总可解 (在某些自然的条件下), 那么从超曲面延拓函数的局部形式则需要再加上对超曲面的补充条件. 例如, 在实超平面 $\{y_n = 0\}$ 上任意只依赖于 x_n 的 C^1 类函数都满足柯西 – 黎曼切条件, 但是显然可看出, 并非所有这些函数可从超平面上全纯地延拓.

我们来给出一个结果, 在 $n = 2$ 时它由莱维在 1956 年得到; 我们现在要讲述的证明属于赫尔曼德尔.

定理 1. 设实超曲面 S 在它自己的点 a 的邻域 U 中由方程 $\varphi(z) = 0$ 给出, 其中 $\varphi \in C^\infty(U)$, 且 $\nabla\varphi \neq 0$. 如果莱维形式 $H_a(\varphi, \omega)$ 在复切平面 $T_a^c(S)$ 上的限制至少有一个正特征值, 则在 S 上满足柯西 – 黎曼切条件的任意函数 $f \in C^1(S)$ 可全纯延拓到点 a 的某个邻域中使 $\varphi < 0$ 的部分 [1].

证明. 不失一般性可设 $a = 0$, 平面 $T_a(S)$ 等同于 $\{x_1 = 0\}, T_a^c(S)$ 等同于 $\{z_1 = 0\}$, 而 φ 在点 0 的泰勒展式具有形式

$$\varphi(z) = x_1 + H_0(\varphi, z) + o(|z|^2) \tag{1}$$

(参看第 37 目). 在附加一个非退化的 $\mathbb{C}-$ 线性变量 $(z_2, \cdots, z_n)$ 的变换后, 还可假定对应 H_0 的正特征值的特征向量指向 z_n- 轴的方向, 于是展式 (1) 具有形式

$$\varphi(z) = x_1 + |z_n|^2 + P('z, '\bar{z}) + o(|z|^2), \tag{2}$$

其中 P 是关于变量 $'z = (z_1, \cdots, z_{n-1})$ 和 $'\bar{z}$ 的二次齐次多项式.

[1] 关于术语和记号参看第 37 目.

于是 $\varphi('0,z_n)=|z_n|^2+o(|z_n|^2)$, 因而可选取 $\delta>0$ 如此之小, 而随后可选 $\eta>0$ 使得在多圆盘

$$V='V\times\{|z_n|<\delta\},\quad 'V=\{\|'z\|<\eta\},$$

中有 $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z_n\partial\overline{z}_n}>0$, 而靠近它的边界 $\{|z_n|=\delta\}$ 函数 $\varphi(z)>0$. 在这样的选取下, 对任意固定的 $'z\in' V$ 使得集合 $\{z_n:|z_n|<\delta,\varphi('z,z_n)>0\}$ 包含了圆 $\{|z_n|=\delta\}$ 的邻域并且连通, 这是因为作为 z_n 的次调和函数的 φ 在圆盘 $\{|z_n|<\delta\}$ 中没有局部极大.

函数 f 可以光滑地延拓到 V, 而由于在 S 上它满足柯西 – 黎曼切方程, 故在 V 上有

$$\overline{\partial}f=h_0\overline{\partial}\varphi+\varphi\omega_1,\tag{3}$$

其中 h_0 为光滑函数. 而 ω_1 为双阶 $(0,1)$ 的形式 (参看第 37 目开头部分的习题). 我们将在 V 中构造一个光滑函数 g_0, 使得

$$g_0|_S=f\ \text{以及}\ \overline{\partial}g_0=O(\varphi^2)\tag{4}$$

在 S 的邻域中成立. 这可按下面的方式来进行. 首先我们注意到, 由于有 (3), 故 $\overline{\partial}(f-h_0\varphi)=\varphi(\omega_1-\overline{\partial}h_0)\overset{\text{def}}{=}\varphi\omega_2$, 由此 $0=\overline{\partial}(\varphi\omega_2)=\overline{\partial}\varphi\wedge\omega_2+\varphi\overline{\partial}\omega_2$. 故而 $\overline{\partial}\varphi\wedge\omega_2|_S=0$, 因此, $\omega_2=h_1\overline{\partial}\varphi+\varphi\omega_3$, 其中 h_1 为某个函数, 而 ω_3 为形式. 还需令 $g_0=f-h_0\varphi-h_1\varphi^2/2$, 于是

$$\overline{\partial}g_0=\varphi\omega_2-h_1\varphi\overline{\partial}\varphi-(\varphi^2/2)\overline{\partial}h_1=\varphi^2\left(\omega_3-\frac{1}{2}\overline{\partial}h_1\right)$$

从而这个函数满足条件 (4).

我们记 $D=\{z\in V:\varphi(z)<0\}$, 以及

$$\Omega=\begin{cases}\overline{\partial}g_0, & \text{在 } D \text{ 中}\\ 0, & \text{在 } V\backslash D \text{ 中};\end{cases}\tag{5}$$

因为在 $\partial D\bigcap V$ 有 $\varphi=0$, 由 (4) 知此形式属于 $C^1(V)$, 并且为 $\overline{\partial}-$ 闭. 对任意 $'z\in' V$, 形式 Ω 对 z_n 具紧支集 (因为在 $\{|z_n|=\delta\}$ 的邻域中 $\varphi>0$, 从而 $\Omega=0$), 另外我们考虑函数

$$\begin{aligned}\widehat{f}(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{a_n('z,\zeta_n)}{\zeta_n-z_n}d\zeta_n\wedge d\overline{\zeta}_n\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}}\frac{a_n('z,z_n+\zeta_n)}{\zeta_n}d\zeta_n\wedge d\overline{\zeta}_n,\end{aligned}\tag{6}$$

其中 a_n 为 $d\overline{z}_n$ 在 Ω 的表达式中的系数.

由于形式 Ω 为 $\overline{\partial}-$ 闭, 所以

$$\overline{\partial}\widehat{f}=\Omega\tag{7}$$

(参看第 45 目). 而因为在 $\overline{D}$ 之外 $\Omega=0$, 故在那里 $\widehat{f}$ 为全纯函数. 但是, 从 (2) 可看出的, 存在点 $'z^0\in' V$ 其具有正的 x_1^0, 靠近这个点总没有 D 中点, 使得在其上有 $a_n('z,z_n)=0$ 对所有 z_n 成立, 并且根据 (6) 函数 $\widehat{f}(z)=0$. 这样的点的集合为开, 而因为由前面的证明, 对任意固定的 $'z\in' V$, 集合 $\{z_n:\varphi('z,z_n)<0\}$ 连通并包含了 $\{|z_n|=\delta\}$, 故在 D 之外 $\widehat{f}(z)\equiv 0$.

现在我们考虑函数 $F=g_0-\widetilde{f}\in C^2(V)$. 在 $V\backslash D$ 中它等于 g_0, 并且根据 (4), 它在 $\partial D\bigcap V$ 中等于 f, 而在区域 D 由于 (5) 和 (7) 我们有 $\overline{\partial}F=\overline{\partial}g_0-\Omega=0$. 故而 F 是函数 f 从 $S=\partial D$ 到区域 D 的点 $z=0$ 的邻域中的 $\varphi(z)<0$ 部分的全纯延拓. □

作为第二个应用, 我们考虑在第 16 目中得到的麦克斯韦方程解的积分表示的一种修订. 我们在这里将要得到的公式对于应用来说非常方便. 在第 16 目中我们曾证明, 彭罗斯变换 $\mathscr{P}$ 把扭转子空间 $\mathbb{P}^3$ 的区域 D_+ 中系数为对变量 w_j 为 -4 齐次的 $\overline{\partial}-$ 闭 (0,1) 形式联系到麦克斯韦方程

$$F^+(Z)=f_1\Phi_{\mathrm{I}}+f_2\Phi_{\mathrm{II}}+f_3\Phi_{\mathrm{III}}$$

的自对偶解, 其中 $\Phi_{\mathrm{I}},\Phi_{\mathrm{II}}$ 和 Φ_{III} 为双阶 (2,0) 的特定形式, 而系数可表达为在射影直线 $l=p(Z)$ 上的积分, 并在区域 M_+^c 上全纯 [1]:

$$f_k(Z)=\int_{p(Z)} w_0^{3-k}w_1^{k-1}\omega\Big|_l(w_0dw_1-w_1dw_0),\quad k=1,2,3. \tag{8}$$

同样注意到 (参看第 16 目定理 1 后面的注解), $\overline{\partial}-$ 恰当形式对应于零解, 使得变换 $\mathscr{P}$ 实际上不是由形式 ω 而是由它的上同调类决定. 由多比尔特定理, 在 D_+ 中具 -4 次齐次系数的 $\overline{\partial}-$ 闭的 (0,1) 阶形式对于同样的 $\overline{\partial}-$ 恰当形式的商群同构于区域 D_+ 上的 -4 次齐次系数的第一上同调群 $H^1(D_+,\mathscr{O}(-4))$.

区域 D_+ 不是全纯域 (它包含了多条射影直线, 并且在它的边界 N 的每个点上莱维形式在 $T^c(N)$ 上的限制具有不同符号的特征值), 并且甚至也不能被全纯域有限覆盖. 所以上面所提到的商群不能实现为区域 D_+ 的有限覆盖 (参看第 48 目). 但是这个区域可以被仅仅两个区域所覆盖, 使得这样的实现对于限制在 D_+ 中射影直线也是可能的. 就是说, 因为 $\mathrm{Im}(w_0\overline{w}_2+w_1\overline{w}_3)$ 在 D_+ 中不等于零 (参看第 13 目), 故在那里没有同时使 $w_0=w_1=0$ 的点, 从而这个区域被两个区域 $U^\alpha=\{w\in D_+: w_\alpha\neq 0\},\alpha=0,1$ 所覆盖. 对于点 $Z\in M^c$, 对应于射影直线 $l=p(Z)$ 的方程有形式

$$w_3=z_{00}w_0+z_{01}w_1,\quad w_3=z_{10}w_0+z_{11}w_1, \tag{9}$$

其中对 $Z\in M_+^c$, 此直线完全位于 D_+ 之中 (见第 13 目). 因为在每条这样的直线 l 没有具 $w_0=w_1=0$ 的点, 故它也被两个区域 $u^\alpha=U^\alpha\bigcap l$ 所覆盖, 其中每一个由 l 去掉一个点得到.

[1] 问题是要考虑区域 D_+ 和 M_+^c 的确定性; 也可将其换作 M_-^c 和 D_-.

我们将证明, 在任意固定的直线 $l \subset D_+$ 上, 对于这个覆盖的, 系数为 -4 齐次全纯函数的第一上同调群同构于对应的微分形式的商群. 其证明在于构建形式和全纯函数之间对应关系. 与其相关地, 我们所得到的形式 F^+ 的系数 f_k 的新表达式对于应用而言更加方便.

对于所考虑的覆盖只存在一个交集 $U^{01} = U^0 \bigcap U^1$, 并且在其上任意全纯的 -4 齐次函数, 即齐次坐标 $w_0, \cdots .w_3$ 那样的函数, 使得 $w_0^4 f$ 和 $w_1^4 f$ 在 U^{01} 中可通过局部坐标全纯表出的函数是个上闭链　上闭链 $f|_l$ 当存在函数 f_l^α 使得 $w_\alpha^4 f_l^\alpha \in \mathscr{O}(u^\alpha), \alpha = 0, 1$, 且在 $u^{01} = u^0 \bigcap u^1$

$$f|_l = f_l^1 - f_l^0 \tag{10}$$

时为上边缘.

定理 2. 分解式 (10) 成立当且仅当对任意闭路径 $\gamma_l \subset l$ 有

$$\int_{\gamma_l} w_0^{3-k} w_1^{k-1} f(w)(w_0 dw_1 - w_1 dw_0) = 0, \quad k = 1.2.3. \tag{11}$$

证明. 如果 $\zeta = w_1/w_0$ 为 u_0 上的局部参数, 于是在 $u^{01} = \{0 < |\zeta| < \infty\}$ 上函数 $w_0^4 f|_l$ 被表为洛朗级数

$$w_0^4 f|_l = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \zeta^n.$$

(11) 中的被积表达式可写为 $\zeta^{k-1} w_0^4 f d\zeta$ 并选取 $\gamma_l = \{|\zeta| = \rho\}$ 时, 我们由 (11) 得到 $c_{-1} = c_{-2} = c_{-3} = 0$. 由 (11) 因而得到在 u^{01} 中有

$$f|_l = \frac{1}{w_0^4} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n + \frac{1}{w_1^4} \sum_{n=0}^{\infty} c_{-n-4} \left(\frac{1}{\zeta}\right)^n;$$

这里的第一个和式在 u^0 全纯, 而第二个在区域 u^1 全纯, 其中 $1/\zeta$ 是参数, 使得 $f|_l = f_l^1 - f_l^0$, 从而上闭链 $f|_l$ 为上边缘.

反过来, 如果 $f|_l$ 为上边缘, 则 (10) 成立, 从而函数 $w_0^4 f_l^0$ 在 γ_l 内为全纯, 而 $w_0^4 f_l^1 = w_1^4 \zeta^{-4} f_l^1$ 按 $1/\zeta$ 的幂的展式从 $1/\zeta^4$ 开始, 故使 (11) 的积分等于 0. □

我们发现, 作为使上闭链 $f|_l$ 为上边缘的障碍的积分 (11) 可同时作为满足麦克斯韦方程的形式的系数.

定理 3. 对任意 -4 齐次并在 U^{01} 全纯的函数 f, 具系数

$$f_k(Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_l} w_0^{3-k} w_1^{k-1} f(w)(w_0 dw_1 - w_1 dw_0), \quad k = 1, 2, 3 \tag{12}$$

的形式 F^+ 是在区域 M_+^c 中麦克斯韦的解, 其中 γ_l 为在射影直线 $l = p(Z)$ 上闭路径, 并且在 M_+^c 上这些方程的任意自对偶解都可以如此表示.

证明. 我们进行证明的方式是建立全纯函数和 $\overline{\partial}-$ 闭形式之间的对应关系, 使得系数公式 (12) 和 (8) 实际上恒等: 于是所有的都化为第 16 目中的证明.

设给出了函数 f, 它满足定理的条件, 又给出了直线 $l=p(Z)$ 和其上的闭路径, 它包住了点 $\zeta=0$, 其中的 $\zeta=w_1/w_0$ 是 $U^0\bigcap l$ 上的参数. 我们以 χ 代表一个光滑函数. 它在 γ_l 上和其范围之外为 1, 而在点 $\zeta=0$ 的邻域中为 0. 微分形式

$$\omega_l=f|_l\frac{\partial\chi}{\partial\overline{\zeta}}d\overline{\zeta}=f|_l\overline{\partial}\chi,$$

它为双阶 (0,1) 并为 -4 齐次; 它被延拓为 l 上的 $\overline{\partial}-$ 闭形式. 按照它和公式 (8) 所构造的系数为

$$\begin{aligned}f_k(Z)&=\int_{\mathbb{C}}\zeta^{k-1}w_0^4\omega|_l\wedge d\zeta=\int_{\mathbb{C}}\zeta^{k-1}w_0^4f|_l\overline{\partial}\chi\wedge d\zeta\\&=\int_{\mathbb{C}}d(\zeta^{k-1}\chi w_0^4f|_ld\zeta)\end{aligned}$$

(我们利用的事实是, $w_0^4f|_l$ 作为 ζ 的函数全纯). 根据斯托克斯定理并考虑到函数 χ 在 γ_l 上等于 1 并在 $\zeta=0$ 的邻域等于 0, 我们得到

$$f_k(Z)=\int_{\gamma_l}\zeta^{k-1}w_0^4f|_ld\zeta,$$

而它 (由于麦克斯韦方程的线性性其准确到一个因子)等于 (12). 还需对所 $l\subset D$ 选光滑依赖于 l 的闭路径族 γ_l, 并由 ω_l, 像前面所构造的那样构造 D_+ 中的一个形式 ω (我们略去这个构造的细节).

反过来, 如果在 D_+ 中给出了一个 $\overline{\partial}-$ 闭的 (0,1) − 形式 ω, 其为 -4 齐次, 则对固定的直线 $l\subset D_+$ 它的限制 $\omega|_l=b_0d\overline{w}_0+b_1d\overline{w}_1$, 并由于它的定义的合理性, 则 $b_0\overline{w}_0+b_1\overline{w}_1\equiv 0$ (参看第 16 目). 在区域 $u^0=U^0\bigcap l$ 和 $u^1=U^1\bigcap l$ 中其局部坐标分别为 $\zeta=w_1/w_0$ 和 $\eta=w_0/w_1$, 我们分别有

$$w_0^4\omega|_l=w_0^4\overline{w}_0b_1d\overline{\zeta},\quad w_1^4\omega|_l=w_1^4\overline{w}_1b_0d\overline{\eta}.$$

而由于在这些区域中 $\overline{\partial}-$ 问题的可解性, 存在光滑函数 φ_0 和 φ_1, 使得

$$w_0^4\overline{w}_0b_1=\partial\varphi_0(\zeta)/\partial\overline{\zeta},\quad w_1^4\overline{w}_1b_0=\partial\varphi_1(\eta)/\partial\overline{\eta}.$$

由关系式 $b_0\overline{w}_0+b_1\overline{w}_1=0$ 我们得到在交集 $u^{01}=u^0\bigcap u^1$ 中有

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial\overline{\zeta}}=\zeta^{-4}\frac{\partial\varphi_1(1/\zeta)}{\partial\overline{\zeta}},$$

从而函数

$$g(\zeta)=\varphi_0(\zeta)-\frac{1}{\zeta^4}\varphi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)\tag{13}$$

在这里全纯.

对应于此的公式 (8) 的系数按两种方式被变换为:

$$f_k(Z) = \int_{\mathbb{C}} \zeta^{k-1} w_0^4 \omega|_l \wedge d\zeta = \int_{\mathbb{C}} \zeta^{k-1} \frac{\partial \varphi_0(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$$
$$= \int_{\mathbb{C}} d(\zeta^{k-1}\varphi_0(\zeta)d\zeta),$$
$$f_k(Z) = -\int_{\mathbb{C}} \eta^{3-k} w_1^4 \omega|_l \wedge d\eta = -\int_{\mathbb{C}} \eta^{3-k} \frac{\partial \varphi_1(\eta)}{\partial \bar{\eta}} d\bar{\eta} \wedge d\eta$$
$$= -\int_{\mathbb{C}} d(\eta^{3-k}\varphi_1(\eta)d\eta),$$

或者应用斯托克斯定理,

$$f_k(Z) = \int_{\gamma_R} \zeta^{k-1}\varphi_0(\zeta)d\zeta + \alpha = -\int_{\gamma_R} \eta^{3-k}\varphi_1(\eta)d\eta + \beta,$$

其中 γ_R 为半径 R 中心在原点的圆, 而当 $R \to \infty$ 时 $\alpha \to 0$ 和 $\beta \to 0$. 在第二个表达式中作变换 $\eta = 1/\zeta$ 并与第一个表达式相结合, 我们得到

$$2f_k(Z) = \int_{\gamma_R} \zeta^{k-1}\varphi_0(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_{1/R}} \zeta^{k-5}\varphi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right)d\zeta + \alpha + \beta.$$

最后, 在第二个积分中替换 (13) 中的 $\frac{1}{\zeta^4}\varphi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \varphi_0(\zeta) - g(\zeta)$, 我们有

$$2f_k(Z) = \int_{\gamma_R} \zeta^{k-1}\varphi_0(\zeta)d\zeta - \int_{\gamma_{1/R}} \zeta^{k-1}\varphi_0(\zeta)d\zeta + \int_{\gamma_{1/R}} \zeta^{k-l}g(\zeta)d\zeta + \alpha + \beta.$$

在这里的第三个积分可以被沿任意一条闭路径 $\gamma_l \subset l$ 的积分所替代, 并且此闭路径包含了点 $\zeta = 0$; 当 $R \to \infty$ 时第一个积分趋向 $f_k(Z)$, 而第二个趋向于 0, 从而取极限我们得到了

$$f_k(Z) = \int_{\gamma_l} \zeta^{k-1}g(\zeta)d\zeta = \int_{\gamma_l} \zeta^{k-1}w_0^4 f_l(w)d\zeta; \quad k = 1, 2, 3, \tag{14}$$

其中 $f_l(w) = g(\zeta)/w_0^4$ 为 -4 次齐次函数. 这个函数 (相差一个非本质的因子) 与 (12) 相同. 还需要由这些 f_l 构造一个函数 $f \in \mathscr{O}(D_+, \mathscr{O}(-4))$, 但我们不再把注意力停留在此了. □

注. 代替 $\{w_0 = 0\}$ 和 $\{w_1 = 0\}$ 可取两个任意的复超平面 $\Pi_1, \Pi_2 \subset \mathbb{P}^3$, 使它们的相交直线位于 D_+ 之外.于是任意直线 $l \subset D_+$ 将与它们交于两个点. 作为 u^0 和 u^1 可选取 l 去掉这两个点, 而作为 f 为 -4 次齐次函数, 它全纯于没有 Π_1 和 Π_2 的 D_+; 于是定理 3 的证明没有实质性的改变.

例题.

(1) 设 $f(w)=1/(w_0^3w_3)$; 因为在直线 $l=p(Z)$ 上根据 (9)$w_3=z_{10}w_0+z_{11}w_1$, 于是在 (14) 中的函数 $g(\zeta)=w_0^4f|_l=(z_{10}+z_{11}\zeta)^{-1}$. 因此系数

$$f_k(Z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{\zeta^{k-1}d\zeta}{z_{10}+z_{11}\zeta},\quad k=1,2,3.$$

在这里的被积函数在点 $\zeta=-z_{10}z_{11}$ 有单极点, 以标准的留数方法我们求出

$$f_1=1/z_{11},\quad f_2=-z_{00}/z_{11}^2,\quad f_3=z_{00}^2/z_{11}^2. \tag{15}$$

现在回想一下, $F_k=E_k+iH_k$ 可以通过 f_j 以下面公式表达:

$$F_1=2f_2,\quad F_2=f_3-f_1,\quad F_3=i(f_3+f_1) \tag{16}$$

(参看第 16 目). 对于 (15) 的解 $f_1f_3=f_2^2$. 由此有 $F_1^2+F_2^2+F_3^2=0$. 后面这个等式意味着电场强度向量和磁场强度向量的模相等并且这些向量正交: $|E|=|H|,(E,H)=0$. 称麦克斯韦方程这样的解为迷向的.

(2) 设 $f(w)=w_2/(w_0^3w_3^2)$; 于是在直线 l 上有 $g(\zeta)=\dfrac{z_{00}+z_{01}\zeta}{(z_{10}+z_{11}\zeta)^2}$, 从而 (14) 中的被积函数具有二阶极点. 以标准公式计算留数我们求出

$$f_1=\frac{z_{01}}{z_{11}^2},\quad f_2=\frac{z_{00}}{z_{11}^2}-2\frac{z_{01}z_{10}}{z_{11}^2}.\quad f_3=\frac{z_{10}}{z_{11}^2}\left(3\frac{z_{01}z_{10}}{z_{11}}-2z_{00}\right).$$

(3) 在前面的例子中的解在 M_+^c 中全纯, 它们在实的闵可夫斯基空间中有奇点. 为了要得到在 M 上无奇点的解. 需要选取函数 f, 使得它的奇点超平面不与 D_+ 的边缘相交 (像是前一个例题中的 $\{w_0=0\}$ 和 $\{w_3=0\}$), 但在 D_- 中. 例如, 可令 $f(w)=(w_3+iw_1)^{-3}(w_2+iw_0)^{-1}$; 于是

$$f_1=z_{01}^2/\Delta^3,\quad f_2=-(z_{00}+i)z_{01}/\Delta^3,\quad f_3=(z_{00}+i)^2/\Delta^3,$$

其中在 M 上 $\Delta=z_{01}z_{10}-(z_{00}+i)(z_{11}+i)=1-\|x\|^2-2ix_0\neq 0$ (这里的 $\|x\|^2=x_0^2-x_1^2-x_2^2-x_3^2$).

最后我们发现, 在第 13 和 16 目以及这里所谈到的彭罗斯的扭转子方法不但在麦克斯韦方程解方面. 而且在许多其他重要的数学物理课题中都富有成效 [1].

§18. 高维留数

回忆一下. 所谓单复变函数 f 在孤立奇点 a 的有独特性质的留数是, f 沿以 a 为中心的半径足够小的任意圆 γ 的积分除以 $2\pi i$:

$$R_a=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f dz.$$

[1] 参看. 譬如, 文集 Twistors and gauge fields (M.: Мир, 1983).

如果函数 f 在区域 D 中除去有限个奇点 a_ν 外处处全纯. 则以 a_ν 为中心的充分小的圆 γ_ν 构成了区域 $D' = D\setminus\bigcup\{a_\nu\}$ 的一维同调的基. 如果对任一个一维闭链 (闭道路) $\gamma \subset D'$ 知道了按该基的展式 $\gamma \sim \sum\limits_{\nu=1}^{N} k_\nu\gamma_\nu$ ($\sim$ 表示同调), 并已知函数 f 在点 a_ν 的留数 R_ν, 则

$$\int_\gamma f dz = 2\pi i\sum_{\nu=1}^{N} k_\nu R_\nu$$

(留数定理).

在空间中成立类似的情形. 但是在过渡到空间情形时, 实际的积分计算会遇到许多困难, 主要是拓扑特征方面的.

53. 马丁内利理论

为了阐述这个理论需要某些拓扑概念.

设 M 为 m 维定向流形, 称 $\alpha : Q^r \to M$ 和 $\beta : Q^s \to M$ 互为补维 (即 $r + s = m$) 的胞腔, 并在点 $p \in \alpha\bigcap\beta$ 为横截相交. 后面的这个词表示, 切向量的基 $v_1, \cdots, v_r \in T_p(\alpha)$ 连同切向量基 $v_{r+1}, \cdots, v_m \in T_p(\beta)$ 构成了 $T_p(M)$ 的基, 并且特别地, 由此得出 α 和 β 在点 p 的邻域中为 M 的子流形. 设 α 和 β 为定向且形式 ω', ω'' ($\deg\omega' = r, \deg\omega'' = s$) 分别在它们的子流形上的 p 点的邻域中为正. 我们称 α 和 β 在点 p 的相交指数为 $+1$ 是说, 如果 $m-$ 形式 $\omega = \omega'\wedge\omega''$ 在 M 上 p 点的邻域中为正, 为 -1 如果它们为负 (图 47).

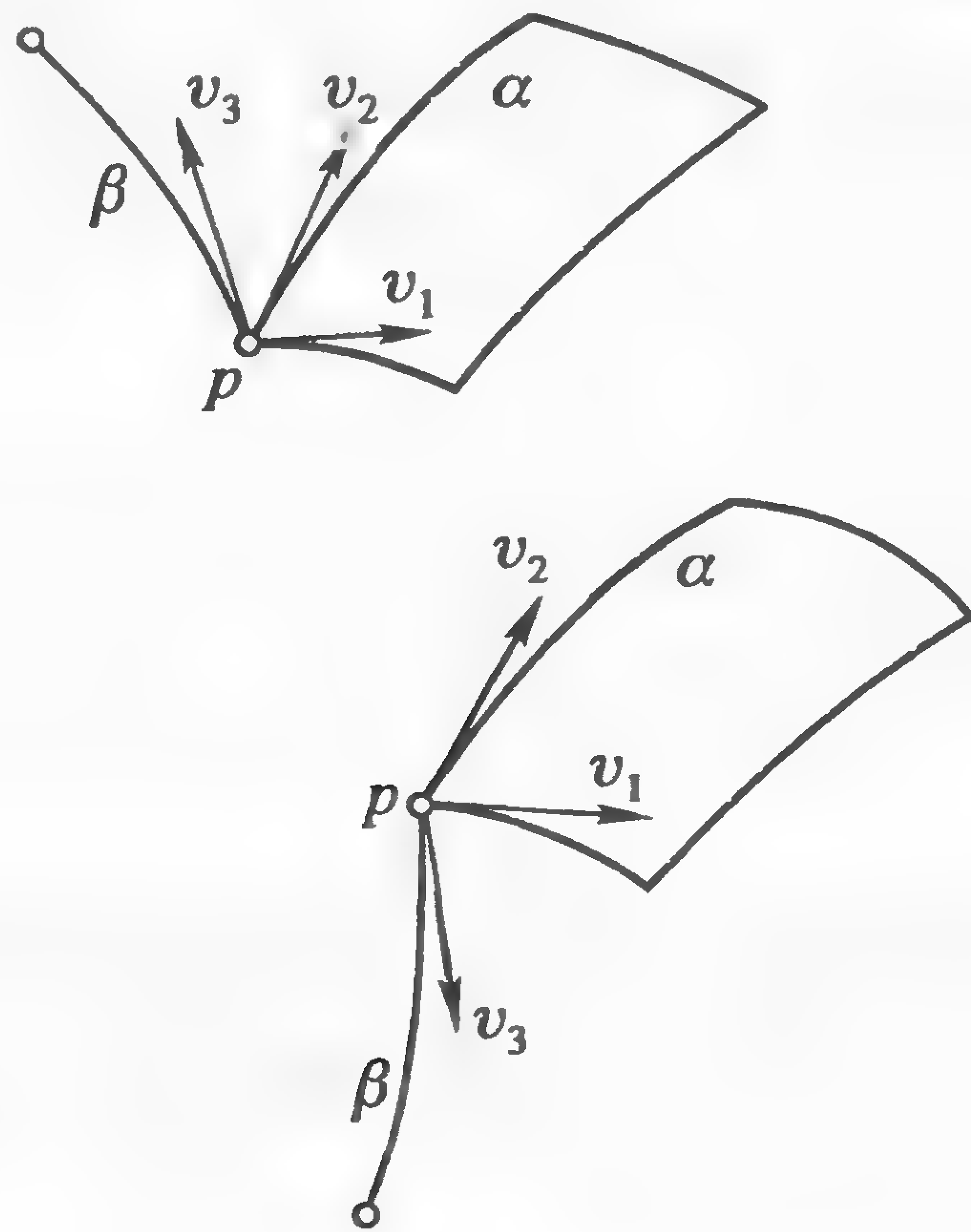


图 47

如果 $\sigma^r = \sum k_\nu\alpha_\nu$ 和 $\tau^s = \sum l_\nu\beta_\nu$ 为 M 上互为补维的链 ($\dim\sigma^r = r, \dim\tau^s = s, r + s = m$) 并在有限个点 p_j 横截相交, 则我们定义它们的相交指数 $i(\sigma^r, \tau^s)$ 为相应的胞腔在所有点 p_j 的相交指数乘以相应系数的积之和, 这里的系数是那些出现在链中的胞腔的系数. (例如, 如果在点 p_j 胞腔 α_μ 和 β_ν 具相交指数 -1, 则在对链所定义的相交指数的和式中, 由此点引进的项为 $-k_\mu l_\nu$.)

我们注意到, 有下列关于相交指数的简单性质:

1) $i(\sigma^r, \tau^s) = -i(-\sigma^r, \tau^s) = -i(\sigma^r, -\tau^s)$;

2) $i(\sigma^r, \tau^s) = (-1)^{rs}(\tau^s, \sigma^r)$;

3) $i(\sigma^r, \tau_1^s + \tau_2^s) = i(\sigma^r, \tau_1^s) + i(\sigma^r, \tau_2^s)$.

我们还注意到一个在几何上显然的性质: 如果二个链 σ^r, τ^s 为闭链 (即边缘 $\partial\sigma^r, \partial\tau^s$ 等于零) 并且其中至少有一个在 M 上同调于零 (即某个属于 M 的链的边缘), 则 $i(\sigma^r, \tau^s) = 0$.

更进一步考虑在定向流形 M 上的两个同调于零的闭链 σ^r 和 τ^{s-1}(首先设 $r + s = m$); 假设它们不相交. 存在链 $T^s \subset M$ 使得 $\tau^{s-1} = \partial T^s$, 并且如果 $T_1^s \subset M$ 是另一个边缘为 τ^{s-1} 的任意链, 则已提到的相交指数的性质有

$$i(\sigma^r, T^s) - i(\sigma^r, T_1^s) = i(\sigma^r, T^s - T_1^s) = 0.$$

这是因为 $T^s - T_1^s$ 为 M 上的闭链 [1], 而 σ^r 为同调于零的闭链. 因此在所考虑的条件下闭链 σ^r 与任意链 $T^s \subset M, \partial T^s = \tau^{s-1}$, 相交指数并不依赖于这个链的选取, 而只由闭链 τ^{s-1} 决定 (在所给出的 M 和 σ^r 下). 我们称这个指数为闭链 σ^r 和 τ^{s-1} 的环绕系数, 以符号 $c(\sigma^r, \tau^{s-1})$ 记之; 因此由定义

$$c(\sigma^r, \tau^{s-1}) = i(\sigma^r, T^s). \tag{1}$$

(在图 48 中两个在 $\mathbb{R}^3$ 中同调于 0 的闭链 τ^1 和 σ^1 的环绕系数等于 2.)

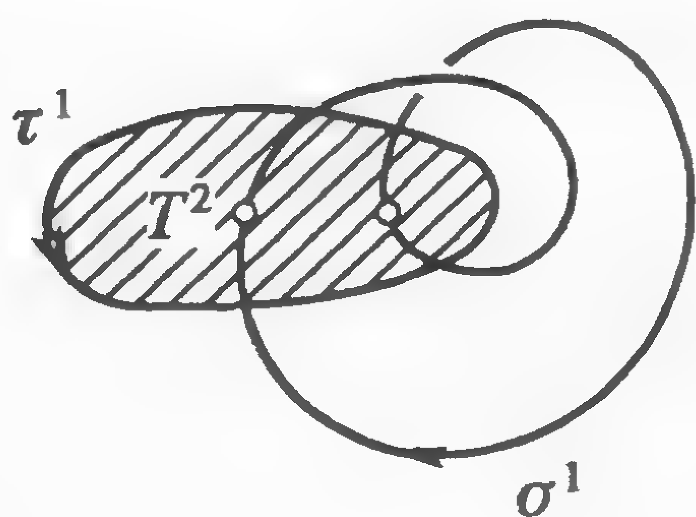


图 48

我们注意到, 有下列关于环绕系数的简单性质:

1) $c(\sigma^r, \tau^{s-1}) = -c(-\sigma^r, \tau^{s-1}) = -c(\sigma^r, -\tau^{s-1})$;

2) $c(\sigma^r, \tau^{s-1}) = (-1)^{r(s-1)}c(\tau^{r-1}, \sigma^s)$;

3) $c(\sigma^r, \tau_1^{s-1} + \tau_2^{s-1}) = c(\sigma^r, \tau_1^{s-1}) + c(\sigma^r, \tau_2^{s-1})$.

我们还注意到另一个性质: 如果两个闭链 σ_1^r 和 σ_2^r 在 M 上同调于零, 并且在 $M \backslash \tau^{s-1}$ 上相互同调 (其中 τ^{s-1} 为在 M 上同调于零的闭链), 则

$$c(\sigma_1^r, \tau^{s-1}) = c(\sigma_2^r, \tau^{s-1}). \tag{2}$$

最后我们不加证明地叙述下面的

[1] 边缘 $\partial(T^s - T_1^s) = \tau^{s-1} - \tau^{s-1} = 0$.

对偶原理 (阿历克山大 (J. Alexander), 庞特里亚金 (L. S. Pontryagin) [1]). 设 S 为维数 m 的实球面, 并且 $K \subset S$ 为某个多面体. 于是对复形 $S \backslash K$ 的 r 维同调群的基 $\{\sigma_\mu^r\}$ 存在多面体 K 的 $(s-1)$ 维同调对偶基 $\{\tau_\nu^{s-1}\}$ (这时有 $r+s=m$), 使得对所有 μ, ν 有

$$c(\sigma_\mu^r, \tau_\nu^{s-1}) = \delta_{\mu\nu}, \tag{3}$$

其中 $\delta_{\mu\nu}$ 为克罗内克符号.

转向积分的计算问题 设在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 给出一个亚纯函数 f, 其极集为 P, 要求计算形式 $\omega = fdz = f(z)dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ 沿某个 n 维闭链 $\sigma \subset D \backslash P$ 的积分. 如果 σ 在 $D \backslash P$ 中同调于零, 则由柯西 - 庞加莱定理有

$$\int_\sigma fdz = 0.$$

按照同一定理和积分的性质知, 如果闭链 σ' 在 $D \backslash P$ 中同调于 σ, 则

$$\int_{\sigma'} fdz = \int_\sigma fdz.$$

由此得出, 如果已知集合 $D \backslash P$ 的 n 维同调基 $\{\sigma_\mu\}$ 及按这个基的展开式

$$\sigma \sim \sum_{\mu=1}^{\rho} k_\mu \sigma_\mu, \tag{4}$$

则 f 沿 σ 的积分的计算化为沿基闭链的积分计算:

$$\int_\sigma fdz = \sum_{\mu=1}^{\rho} k_\mu \int_{\sigma_\mu} fdz.$$

与单变情形类似, 我们称为函数 f 关于基闭链 σ_μ 的**留数**的是指数

$$R_\mu = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\sigma_\mu} fdz. \tag{5}$$

于是成立

定理 1 (留数定理). 如果函数 f 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中亚纯, 且 P 为这个函数的极集, 则对任意 n 维闭链 $\sigma \subset D \backslash P$,

$$\int_\sigma fdz = (2\pi i)^n \sum_{\mu=1}^{\rho} k_\mu R_\mu, \tag{6}$$

其中 k_μ 为 σ 按 $D \backslash P$ 的 n 维同调基展开式的系数, 而 R_μ 是 f 关于这个基闭链的留数.

---

[1] 多面体的定义及对偶原理的证明可见亚历克山大罗夫 P. S. Aleksandrov 的《组合拓扑学》(有英译本). 称 K 上一组 r 维闭链 $\{\sigma_\mu^r\}$ 为多面体 K 的一个 r 维同调基是说, 如果 1) 它们同调无关, 即由它的某个 K 上链 $\sum k_\mu \sigma_\mu^r$ 同调于零, 则得到所有 $k_\mu = 0$. 以及 2) 在 K 上任意 r 维闭链 σ 同调于 σ_μ^r 的某个线性组合.

在空间情形, 与平面情形不同, 寻找基 $\{\sigma_\mu\}$ 和按此基的展式 (4) 远不是那么简单的问题, 马丁内利在 1953 年注意到, 如果利用上面提到的对偶原理, 在许多情形这个问题能有实质性的简化 [1]. 为了能够应用这个原理. 我们假定区域 D 同胚于 $2n$ 维球. 我们把 D 边缘的所有点等化为一个点并以此点补充 D: 我们得到了一个 $2n$ 维球面 $\dot{D}$. 完全一样的方式, 把函数 f 的集合 P 与 ∂D 的交集等化为一点并以此点补充 P 并记其为 $\dot{P}$. 所描述的这个过程显然没有改变 n 维同调基 $\{\sigma_\mu\}$ 和按此基的分解式 (4). 换句话说, $\{\sigma_\mu\}$ 仍然是 $\dot{D}\backslash\dot{P}$ 的 n 维同调基, 且 (4) 仍是按它们的闭链的分解式.

根据对偶原理, 我们可以不用集合 $\dot{D}\backslash\dot{P}$ 的 n 维同调基 $\{\sigma_\mu\}$ 而去寻找这个极集 P 的 $(n-1)$ 维同调对偶基 $\{\tau_\nu\}$, 它与前一个基以关系

$$c(\sigma_\mu, \tau_\nu) = \delta_{\mu\nu} \tag{7}$$

相联系. 闭链 τ_ν 被简称为奇异闭链.

我们还注意到闭链 σ 对基 $\{\sigma_\mu\}$ 的分解式的系数 k_μ 与这个链和对偶基的闭链的环绕数相等. 事实上, 因为 σ 在 $\dot{D}\backslash\dot{P}$ 中同调于 $\sum\limits_{\mu=1}^{\rho} k_\mu\sigma_\mu$, 故由上面所提到的环绕系数的性质我们有

$$c(\sigma, \tau_\nu) = c\left(\sum_{\mu=1}^{\rho} k_\mu\sigma_\mu, \tau_\nu\right),$$

由此, 并利用性质 3) 和关系式 (7), 我们发现

$$c(\sigma, \tau_\nu) = k_\nu. \tag{8}$$

这个评注让我们能在不知道基 $\{\sigma_\mu\}$ 的情形下求出 k_μ. 沿基闭链 σ_μ 的积分 (函数 f 的留数) 也可以不需找出这些闭链便能计算. 事实上, 设在 $\dot{D}\backslash\dot{P}$ 中成功地找到了 ρ 个同调无关的 n 维闭链 γ_μ, 由此我们可计算积分

$$\int_{\gamma_\mu} f dz = I(\gamma_\mu), \quad \mu = 1, \cdots, \rho.$$

又设已知这些闭链与对偶基闭链 $\{\tau_\nu\}$ 的环绕系数 $c(\gamma_\mu, \tau_\nu) = a_{\mu\nu}$. 按上面所做的评注, $a_{\mu\nu}$ 是 γ_μ 对基 $\{\sigma_\nu\}$ 分解式中的系数, 因此由留数定理对任意 $\mu = 1, \cdots, \rho$

$$I(\gamma_\mu) = (2\pi i)^n \sum_{\nu=1}^{\rho} a_{\mu\nu} R_\nu, \tag{9}$$

其中 R_ν 为 f 对于闭链 σ_ν 的留数.

---

[1] 这个方法在 A. P. Yuzhakov 的工作中得到进一步的发展, 特别地, 进行了某类有理函数计算的研究, 见 L. A. Aizenberg 和 A. P. Yuzhakov 的书 *Integral representations and residues in multidimensional complex analysis*, "Nauka", Novosibirsk. 1979; 英译本, Transl. Math. Monographs, vol. 58, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.

系统 (9) 可以看成是关于未知留数 R_ν 的线性式并且它的行列式与 $\det(a_{\mu\nu})$ 成比例. 由于闭链 γ_μ 的同调无关性它不为零. 故容易求出此系统的留数.

考虑到前面所提到的对偶性, 我们约定称 f 沿 n 维闭链 σ_ν 的积分除以 $(2\pi i)^n$ 为关于奇异闭链τ_ν (对偶于 σ_ν) 的留数. 我们留意到, 这个定义强调了空间情形与平面情形的类似, 在平面情形时沿一维闭链 γ_ν 的积分除以 $2\pi i$ 被称为 f 对于奇点 a_ν (零维闭链) 的留数. 留数定理现在可阐述为

定理 2. 设函数 f 为区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的亚纯函数, 其中 D 同胚于 $2n$ 维球, $\dot{P}$ 为 f 的极集, 它是由 $P\bigcap D$ 附加上将 $\dot{P}\bigcap\partial D$ 等化为一点的集合. 设 $\tau_\nu,\nu=1,\cdots,\rho$ 为集合 $\dot{P}$ 的 $(n-1)$ 维同调基, R_ν 为 f 对于奇异闭链 τ_ν 的留数. 于是对于任意 n 维闭链 $\sigma\subset D\backslash P$ 有

$$\int_\sigma f dz=(2\pi i)^n\sum_{\nu=1}^{\rho}k_\nu R_\nu, \tag{10}$$

其中 $k_\nu=c(\sigma,\tau_\nu)$ 为 σ 与奇异闭链 τ_ν 的环绕系数.

例题.

(1) 如果 f 为 n 个复变量的整函数, $n>1$, 而 $l(z)=\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu z_\nu+\beta$ 为线性函数, 则对任意 n 维闭链 $\sigma\subset\mathbb{C}^n\backslash\{l(z)=0\}$ 和任意整数 m

$$\int_\sigma\frac{f(z)dz}{\left(\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu z_\nu+\beta\right)^m}=0.$$

事实上, 区域 $\mathbb{C}^n$ 的边缘为无穷远点, 它必须被等化为一个点. 极集 $P=\{l(z)=0\}$ 在加上无穷远点的等化点后成为一个 $(2n-2)$ 维球面 $\dot{P}$. 当 $n>1$, 在 $\dot{P}$ 上任意 $(n-1)$ 维闭链都同调于零 $(\rho=0)$, 故基 $\{\tau_\nu\}$ 平凡, 从而所考虑的积分为零.

(2) 考虑积分

$$I=\int_\sigma\frac{e^{zw}dz\wedge dw}{(z-2w)(w-2z)},$$

其中 σ 为 $\mathbb{C}^2$ 中任意一个二维闭链, 它不与极集 $P=P_1\bigcup P_2$ 相交, 其中 $P_1=\{z=2w\},P_2=\{w=2z\}$.

补充了点的极集 $\dot{P}$ 由两个二维球面 $\dot{P}_1$ 和 $\dot{P}_2$ 组成, 它们相交于两个点: $\{z=0,w=0\}$ 和被等化的无穷远点. 需要求出 $\dot{P}$ 的一维同调基. 显然, 任意一个完全位于其中的一个球面的一维闭链同调于零　故而不同调于零的闭链必定从点 (0,0) 沿一个球面过渡到 ∞, 然后沿第二球面回到同一个点. 所有这样的闭链都同调于沿闭链 τ 通过若干次的链, 它由某条从 (0,0) 引向无穷远的射线 $l_1\subset\dot{P}_1$ 和另一条由无穷远引到 (0,0) 的射线 $l_2^-\subset\dot{P}_2$ 组成. 例如, 假设 l_1 通过点 (2,1), 而 l_2 通过了点 (1,2),

于是这些射线的参数方程有形式

$$l_1:\left.\begin{array}{l} z=2t_1,\\ w=t_1\end{array}\right\}\quad 当\ 0\leqslant t_1\leqslant\infty;\quad l_2:\left.\begin{array}{l} z=t_2,\\ w=2t_2,\end{array}\right\}\quad 当\ 0\leqslant t_2\leqslant\infty.$$

在这里 $\rho=1$. 因此只要沿某一个在 $\mathbb{C}^2\backslash P$ 中不同调于零的二维闭链 γ 计算 f 的积分就可以了. 我们选取 γ 为环面 $\{e^{i\varphi},e^{i\psi}\}$, 其中 $0\leqslant\varphi,\psi\leqslant 2\pi$, 于是

$$\int_\gamma f dz\wedge dw=\int_{\{|w|=1\}}\int_{\{|z|=1\}}\frac{e^{zw}dz\wedge dw}{(z-2w)(w-2z)}.$$

因为 $|w|=1$, 则在计算里层的积分时只需要考虑在点 $z=w/2$ 处的留数. 从而这个积分等于 $\dfrac{2\pi i}{3w}e^{\frac{w^2}{2}}$, 而整个积分则等于 $-\dfrac{4}{3}\pi^2$ (由此积分不等于零, 得出 γ 不同调于零的结论).

我们来求环绕系数 $c(\gamma,\tau)=a$; 按定义它等于 γ 和二维膜片 T^2 的相交指数, 其中的膜片张在 τ 上. T^2 的参数方程是

$$\left.\begin{array}{l} z=2t_1+t_2,\\ w=t_1+2t_2,\end{array}\right\}\quad 0<t_1,t_2<\infty.$$

而这个膜片交环面 γ 只有一个点 (1,1), 其对应于参数值 $t_1=t_2=1/3,\varphi=\psi=0$. 在此点 $\dfrac{\partial(x,y,u,v)}{\partial(t_1,t_2,\varphi,\psi)}>0$ (我们已设 $z=x+iy,w=u+iv$), 由此看出, 相交数 $i(\gamma,T^2)=c(\gamma,\tau)=1$. 由公式 (10) 我们发现, f 对于奇异闭链 τ 的留数等于

$$R=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_\gamma f dz\wedge dw=\frac{1}{3},$$

于是由定理 2 我们得所想要的积分值

$$I=-\frac{4\pi^2}{3}c(\sigma,\tau),$$

$c(\sigma,\tau)$ 为 (二维的) 取积分的闭链 σ 和 (一维的) 奇异闭链 τ 的环绕系数.

54. 勒雷理论

我们考虑积分计算的另一个方法, 它属于勒雷 (Leray). 在许多情形中这个方法可以把对 r 次微分形式 ω 沿 r 维闭链 σ 的积分计算化成 $(r-1)$ 次形式 $\operatorname{res}\omega$ 沿一个 $(r-1)$ 维闭链的积分计算, 其中的形式 $\operatorname{res}\omega$, 即所谓的留数形式, 而这个 $r-1$ 维闭链位于形式 ω 的奇异流形之中. 勒雷的方法也可以看成是经典的留数方法的推广, 这个经典方法对应于 $r=1$ 的情形并把对微分形式 $\omega=fdz$ 沿闭曲线的积分计算化为在 f 的奇点上留数值 $\operatorname{res}f$ 的计算 (即对 $\operatorname{res}f$ 沿这些点的零维积分). 我们将叙述这个方法的最简单的形式 [1].

[1] 完整的阐述可参看勒雷的文章 *Le calcul différentiel et integral sur une variété analytique complex (Problème de Cauchy* III), Bull. Soc. Math. France 87 (1959), no.2, 81 – 180, 或者 Aĭzenberg 和 Yuzhakov 的书 (在前面已引述).

设在 n 维复流形 M 上给出了一个余维 1 的复子流形 P, 在其每个点 z^0 的邻域 $U_{z^0}\subset M$ 中作为在此邻域中的解析函数 ψ_{z^0} 的零点给出, 使得在 U_{z^0} 中 $\nabla\psi_{z^0}\neq 0$:

$$P\bigcap U_{z^0}=\{z\in U_{z^0}:\psi_{z^0}(z)=0\}. \tag{1}$$

设在 $M\backslash P$ 上给出了 k 次微分形式 $\omega, 0<k\leqslant 2n$, 属于 C^∞ 类, 并在 P 上具有**一阶极奇异性**. 后面这个词表明, 在每个 $U_{z^0}, z^0\in P$ 中, 乘积 $\psi_{z^0}\omega$ 可延拓为 U_{z^0} 上的全纯形式.

引理. 形式 $\alpha\in C^\infty(M)$ 在点 $z^0\in P$ 的邻域 U 中可以表示为形式 [1)]

$$\alpha=d\psi\wedge\beta, \tag{2}$$

其中 $\beta\in C^\infty(U)$ 当且仅当在此邻域中有

$$d\psi\wedge\alpha=0. \tag{3}$$

证明. 让我们假定 ψ 为在邻域 U 中定义 P 的一个局部坐标, 譬如作为变量z_1 (由上面赋予 ψ 的条件, 这是可以做到的). 在这些坐标下, α 的表达式可以分解为两项:

$$\alpha=\sum\alpha_{i_1\cdots i_p}dZ_{i_1}\wedge\cdots\wedge dZ_{i_p}=dz_1\wedge\beta+\alpha',$$

其中 α' 不包含 dz_1 (像经常那样, 我们令 $Z_\nu=z_\nu, Z_{n+\nu}=\bar{z}_\nu, \nu=1,\cdots,n$). 因此, 如果 α 以形如 (2) 的表达式表示, 其中 $\psi=z_1$, 则 $\alpha'=0$, 从而 $dz_1\wedge\alpha=0$. 即 (3) 成立. 反之, 如果 $dz_1\wedge\alpha=0$, 故 $dz_1\wedge\alpha'=0$, 而因为 α' 不包含 dz_1, 故这只可能有 $\alpha'=0$. □

定理 1. 如果形式 $\omega\in C^\infty(M\backslash P)$ 在 P 上具有一阶极奇异性, 并在 $M\backslash P$ 上为闭, 则在任意点 $z^0\in P$ 的邻域中在 P 外具有形式

$$\omega=\frac{d\psi}{\psi}\wedge r+\omega_1, \tag{4}$$

其中形式 $r,\omega_1\in C^\infty(U)$. 在这种情形下, 限制 $r|_P$ 不依赖于函数 ψ 的选取并为闭形式.

证明. 因为我们有 $\psi\omega\in C^\infty(U)$, 故 $d(\psi\omega)=d\psi\wedge\omega+\psi\wedge d\omega$; 但是在 $M\backslash P$ 上有 $d\omega=0$ (因 ω 为闭), 表明, 由连续性 $d(\psi\omega)=d\psi\wedge\omega$ 在整个 U 成立. 故而, $d\psi\wedge\omega$ 被延拓到了 P 上成为形式 $\alpha\in C^\infty(U)$, 而由引理知, 存在形式 $\beta=\omega_1\in C^\infty(U)$ 使得

$$d\psi\wedge\omega=d\psi\wedge\omega_1.$$

[1)] 为简化记号, 我们在记号 U,ψ 和 β 中略去了指标 z^0.

此等式乘以 ψ, 我们得到 $d\psi\wedge(\psi\omega-\psi\omega_1)=0$, 其中 $\psi\omega-\psi\omega_1\in C^\infty(U)$; 这表明, 由同一个引理知存在形式 $r\in C^\infty(U)$, 使得 $\psi\omega-\psi\omega_1=d\psi\wedge r$. 这个等式在 P 外等价于 (4).

我们要证明, 限制 $r\big|_P$ 唯一地被 ω 决定 先假设定义极奇集 P 的函数 ψ 已知, 我们将证明由等式

$$0=\frac{d\psi}{\psi}\wedge r+\omega_1 \tag{5}$$

得出等式 $r\big|_P=0$. 但是从 (5) 我们得到 $d\psi\wedge r+\psi\omega_1=0$, 从而 $d\psi\wedge\psi\omega_1=0$. 而因为 ψ 是在 $U\backslash P$ 中不为零的函数, 故在此处有 $d\psi\wedge\omega_1=0$; 由于 $d\psi\wedge\omega_1\in C^\infty(U)$, 最后面的这个等式在整个 U 中成立. 于是我们可应用引理找出形式 ω_2, 使得 $\omega_1=d\psi\wedge\omega_2$. 将其代入 (5) 得到 $d\psi\wedge(r+\psi\omega_2)=0$; 由同一引理有 $r+\psi\omega_2=d\psi\wedge\omega_3$, 其中 $\omega_3\in C^\infty(U)$. 于是可看出, 因为我们有 $\psi\big|_P=(d\psi)\big|_P=0$, 故限制 $r\big|_P=0$.

现在我们来证明 $r\big|_P$ 与函数 ψ 的选取无关, 这里的 ψ 定义了极集. 设此集合 (在邻域 U 的范围内) 还被函数 $\widetilde{\psi}$ 定义; 于是分式 $\widetilde{\psi}/\psi=\chi$ 全纯并不同于零 (参看第 50 目). 设有

$$\omega=\frac{d\widetilde{\psi}}{\widetilde{\psi}}\wedge\tilde{r}+\widetilde{\omega}_1,$$

其中 $\widetilde{r},\widetilde{\omega}_1\in C^\infty(U)$. 在其中代入 $\widetilde{\psi}=\psi\chi$, 有

$$\omega=\frac{d\psi}{\psi}\wedge\widetilde{r}+\frac{d\chi}{\chi}\wedge\widetilde{r}+\widetilde{\omega}_1=\frac{d\psi}{\psi}\wedge\widetilde{r}+\omega_1;$$

这里的 $\omega_1=\dfrac{d\chi}{\chi}\wedge\widetilde{r}+\widetilde{\omega}_1\in C^\infty(U)$, 由上面所证的, 有 $\widetilde{r}\big|_P=r\big|_P$.

还要证明形式 $r\big|_P$ 的闭性质. 但在 P 外, 由于 ω 的闭性, 我们有 $d\omega=-\dfrac{d\psi}{\psi}\wedge dr+d\omega_1=0$. 这与 (5) 相同, 只是把那里的 r 换作 $-dr,\omega_1$ 换作 $d\omega_1$. 由上面所证的唯一性得到 $dr\big|_P=0$ 的结论. □

定义 1. 在 P 上具一阶极奇集的闭形式 $\omega\in C^\infty(M\backslash P)$ 的**留数形式**称为在 P 上的一个闭形式, 是指它在每点 $z^0\in P$ 的邻域中等于在分解式 (4) 中形式 r 在 P 上的限制:

$$\operatorname{res}\omega=r\big|_P. \tag{6}$$

因此, 算子 res 把 s 次闭 $C^\infty-$ 形式的群 $Z^s(M\backslash P)$ 变换为 $s-1$ 次闭 $C^\infty-$ 形式的群 $Z^{s-1}(P)$:

$$\operatorname{res}:Z^s(M\backslash P)\to Z^{s-1}(P). \tag{7}$$

注. 如果形式 ω 在 $M\backslash P$ 上全纯 [1], 则 $\operatorname{res}\omega$ 在 P 上全纯. 这可由如下事实推出: 当 ω 全纯时, 在定理 1 的证明中形式 r 和 ω_1 也可以选成是全纯的.

---

[1] 全纯形式的定义可参看第 14 目的内容.

例题. 设 s 等于流形 M 的 (复) 维 n, 而形式 ω 在 $M\backslash P$ 上全纯并在点 $z^0 \in P$ 的邻域里有效的局部坐标 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 下可表示为

$$\omega = \frac{\varphi}{\psi}dz = \frac{\varphi}{\psi}dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n, \tag{8}$$

其中 $\varphi, \psi \in \mathscr{O}(U)$, 而 $\psi|_P = 0, \left.\frac{\partial \psi}{\partial z_\nu}\right|_P \neq 0$. 于是可以写成

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\varphi}{\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu}}(-1)^{\nu-1}\frac{\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu}dz_\nu}{\psi} \wedge dz[\nu] \\ &= (-1)^{\nu-1}\frac{\varphi}{\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu}}\frac{d\psi}{\psi} \wedge dz[\nu]\Bigg|_P\end{aligned}$$

由此看出

$$\operatorname{res}\omega = (-1)^{\nu-1}\left.\frac{\varphi}{\frac{\partial\psi}{\partial z_\nu}}dz[\nu]\right|_P. \tag{9}$$

(回忆一下: $dz[\nu] = dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_{\nu-1} \wedge dz_{\nu+1} \wedge \cdots \wedge dz_n$). 当 $n=1$ 时我们得到了通常的在一阶极点的留数公式: $\operatorname*{res}_a \frac{\varphi}{\psi}dz = \frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$.

我们现在转向描述那个被称做勒雷上边缘算子的 δ, 它把每个点 $z^0 \in P$ 相伴于一个圆的同胚像 $\delta z^0 \subset M\backslash P$ (从而这样的像的实维数增加了 1). 这个算子应该具有如下性质:

(1) 在某个邻域 U_{z^0} 中存在局部坐标 $(z_1,\cdots,z_n)=z$, 它以 z^0 为原点, 在此坐标下, $P\bigcap U_{z^0}$. 由方程 $z_n=0$ 定义, 而 $\delta z^0 \subset U_{z^0}$ 并由方程 $|z_n|=1$ 定义.

(2) 集合 $\bigcup\limits_{z\in P}\delta z$ 构成 $M\backslash P$ 中的一个连续的曲面.

(3) 当 $z' \neq z''$ 时, 曲线 $\delta z'$ 和 $\delta z''$ 没有公共点.

因此, 集合 $\bigcup\limits_{z\in P}\delta z$ 形成了流形 P 的一个管状邻域的边界 (参看图 49, 其中 P 为曲线, 而 M 为三维空间).在上面所采取的条件下, 构造这样的算子 δ 总是可能的, 这是因为 P 和 M 的实维数相差 2.

现设 σ 为 P 上实维数为 $s-1$ 的闭链; 我们假定这个闭链的支集 (即它相应的多面体) 闭包紧 [1] 于 P. 我们记

$$\delta\sigma = \bigcup_{z\in\sigma}\delta z;$$

[1] 这个假设是为了考虑奇异积分的需要.

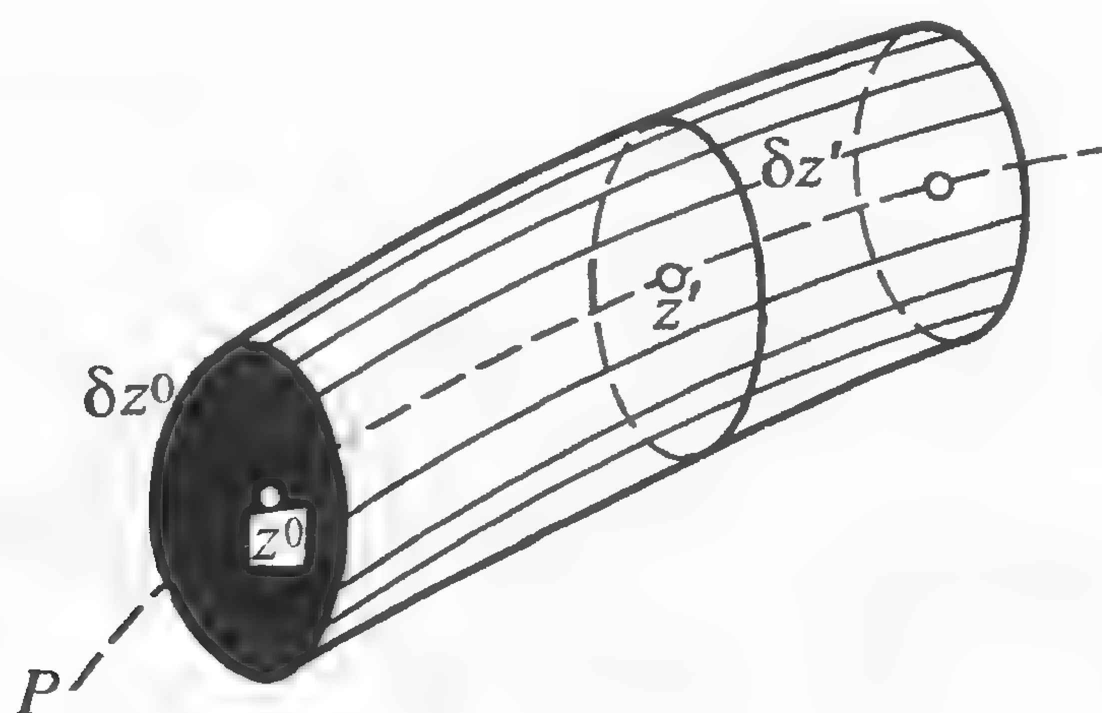


图 49

如果在 $\delta\sigma$ 中引进对应于 σ 定向的自然定向, 则我们可以将 $\delta\sigma$ 看作是 $M\backslash P$ 的 s 维链. 为此只要在每条曲线 δz 上引进定向就可以了. 譬如可以这样做: 我们假定在邻域 U_z 中给出了局部坐标的有序排列 $z_1, \cdots, z_n$ (形式 $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n$ 为正), 而在流形 $U_z \bigcap P$ 则其次序为 $z_1, \cdots, z_{n-1}$; 于是在 δz 上的正向环绕对应于在圆 δz 的表示 $z_n = e^{it_n}$ 中 t_n 的增大方向 (参看算子 δ 的性质 (1)).

容易看出, 算子 δ 与取边缘的算子 ∂ 交换 ($\delta\partial = \partial\delta$), 故而它把闭链变到闭链, 把同调于零的闭链也变到同调于零. 于是, δ 建立了同调群之间的同态

$$\delta : H_{s-1}^{(c)}(P) \to H_s^{(c)}(M\backslash P) \tag{10}$$

(符号 (c) 表明把所表示的群看作紧同调群, 即我们只考虑具紧支集的链).

下面的定理是卷 I 中柯西的留数定理的推广.

定理 2. 设 $(s-1)$ 维闭链 $\sigma \in P$, 和 $\omega \in C^\infty(M\backslash P)$ 为 s 次闭形式, 它以 P 为一阶极奇集; 于是

$$\int_{\delta\sigma} \omega = 2\pi i \int_\sigma \operatorname{res} \omega, \tag{11}$$

其中 δ 为勒雷上边缘算子.

证明. 我们以 $\delta_\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ 表示具有性质 (1) — (3) 的 δ 算子, 唯一的差别是将条件 (1) 中的方程 $|z_n| = 1$ 换作方程 $|z_n| = \varepsilon$, 并且当 $\varepsilon \to 0$ 时, 以曲面 $\delta_\varepsilon\sigma = \bigcup\limits_{z\in\sigma} \delta_\varepsilon z$ 为边缘的管状邻域收缩到 σ. 按照斯托克斯公式 (第 13 目), 对任意 ε_1 和 $\varepsilon_2, 0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 1$, 由于 ω 的闭性, 我们有

$$\int_{\delta_{\varepsilon_2}\sigma} \omega - \int_{\delta_{\varepsilon_1}\sigma} \omega = \int_{\sigma^{(\varepsilon_2)}\backslash\sigma^{(\varepsilon_1)}} d\omega = 0.$$

从而对 ω 沿 $\delta_\varepsilon\sigma$ 的积分与 ε 无关.

现在用一有限组邻域 $\{U_j\}_{j\in J}$ 覆盖 $\sigma^{(1)}$, 并在其中每一个邻域上应用定理 1, 从而像前面那样可以取 $\psi(z) = z_n$. 构造对这个覆盖的 1 的分解 $\{e_j\}$, 并在每个 U_j 上应用定理 1, 而在定理 1 中令 $\psi = z_n$; 我们便得到了

$$\int_{\delta_\varepsilon\sigma} \omega = \sum_{j\in J} \int_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j\omega = \sum_{j\in J} \int_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j \frac{dz_n}{z_n} \wedge r + \sum_{j\in J} \int_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j\omega_1. \tag{12}$$

在其中, 当 $\varepsilon\to 0$ 时

$$\int_{\delta_\varepsilon\sigma} e_j\frac{dz_n}{z_n}\wedge r=\int_{\{|z_n|=\varepsilon\}}\frac{dz_n}{z_n}\int_{\{'z\in\sigma,|z_n|=\varepsilon\}} e_j r('z,z_n)\to 2\pi i\int_\sigma e_j\mathrm{res}\,\omega,$$

(12) 的左端不依赖于 ε 并等于沿 $\delta\sigma$ 的积分, 而右端的第二个和当 $\varepsilon\to 0$ 时趋向于零. 故而在 (12) 中过渡到 $\varepsilon\to 0$ 时的极限, 我们有

$$\int_{\partial\sigma}\omega=2\pi i\sum_{j\in J}\int_\sigma e_j\mathrm{res}\,\omega=2\pi i\int_\sigma \mathrm{res}\,\omega.\quad\square$$

我们注意到, 如果以另一个闭链 σ' 替换 σ, 其中的 σ' 属于与 σ 的同一个 P 上的紧上同调类 $h\in H^{(c)}_{s-1}(P)$ (这表明 $\sigma'-\sigma$ 为某个闭包紧于 P 的 s 维链的边缘), 于是由于形式 $\mathrm{res}\,\omega$ 的闭性质, 对它的沿 σ 和 σ' 的积分根据斯托克斯公式应该相等. 另外根据 (10), 再考虑到算子 δ 保持同调不变, 我们可以在 (11) 中把闭链 σ 和 $\delta\sigma$ 换作其对应类 $h\in H^{(c)}_{s-1}(P)$ 和 $\delta h\in H^{(c)}_{s}(M\backslash P)$ 的任意代表元. 因此公式 (11) 可以改写为

$$\int_{\delta h}\omega=2\pi i\int_h \mathrm{res}\,\omega.\tag{13}$$

另外可以清楚看到, 如果对 ω 加上在 $M\backslash P$ 中的恰当形式 (即为某个 $s-1$ 次形式的微分), 则 (13) 中的积分并不改变. 与 ω 相差一个恰当形式的这些形式是包含 ω 的一个上同调类, 而这些对所有 $C^\infty(M\backslash P)$ 中 $s+1$ 次闭形式 ω 的这种类的集合是上同调群 $H^s(M\backslash P)$ (参看第 14 目). 我们看出, $H^{s-1}(P)$ 中包含 $\mathrm{res}\,\omega$ 的上同调类只依赖于 $H^s(M\backslash P)$ 中包含 ω 的上同调类.

定义 2. 设 ω 为类 $\omega^*\in H^s(M\backslash P)$ 的一个代表闭形式; $H^{s-1}(P)$ 中包含形式 $\mathrm{res}\,\omega$ 的上同调类被称做**留数类**, 以记号 $\mathrm{Res}\,\omega=\mathrm{Res}\,\omega^*$ 表示.

公式 (13) 现在可以改写为

$$\int_{\delta h}\omega^*=2\pi i\int_h \mathrm{Res}\,\omega^*.\tag{14}$$

可以确信算子 Res 建立了对应上同调群之间的同态

$$\mathrm{Res}: H^s(M\backslash P)\to H^{s-1}(P).\tag{15}$$

我们来对高于一阶的极奇集的情形作一个粗略的描述. 还是设在 n 维复流形 M 上给出一个子流形 P, 它局部地作为满足 $\nabla\psi\neq 0$ 的全纯函数 ψ 的零点集. 我们称形式 $\omega\in C^\infty(M\backslash P)$ 在 P 具有 q **阶极奇性**是说, 如果乘积 $\psi^q\omega$ 可延拓为 M 上的 $C^\infty-$ 形式, 而对 $q'<q$ 的 $\psi^{q'}\omega$ 不可延拓.

我们将不加证明地引进一个定理, 它把在 P 具高阶极奇集的闭形式的积分计算化为已经考虑过的情形 (参看在本目开始时脚注所引述的书):

对具极集的任意闭形式 $\omega \in C^\infty(M\backslash P)$, 存在上同调于它的形式 ω_0, 使其以 P 为一阶极集.

$H^{s-1}(P)$ 中包含 $\operatorname{res}\omega_0$ 的上同调类, 即类 $\operatorname{Res}\omega_0$, 被称做形式 ω 的留数类; 它仅仅由 $H^s(M\backslash P)$ 中包含 ω 的上同调类决定

在平面情形中, 从形式 $\omega = f dz$ 到 $\omega_0 = f_0 dz$ 的转换在于将 $f(z) = \frac{c_{-q}}{(z-a)^q} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a}$ 转换为函数 $f_0 = \frac{c_{-1}}{z-a}$, 后者在点 a 具有一阶极点并与 f 具有相同的留数. 我们发现, 在高维情形, 对于全纯的 ω, 形式 ω_0 不必是全纯的, 并且全纯形式 ω 的留数形式 $\operatorname{Res}\omega$ 一般来说可以不包含全纯形式[1]. 这就解释了在勒雷定理中不仅考虑全纯的而且还有 C^∞ 类中形式的必要性.

在实际应用中, 形式 ω 具有几个极流形 $P_1, \cdots, P_m$, 其阶分别为 $q_1, \cdots, q_m$ 的情形也很重要. 我们假设, 这些 P_ν 处于一般位置, 即在它们的每个相交点上, 由在局部坐标下定义这些流形的函数的导数组成的矩阵达到最大可能的秩 我们记 $P^j = (P_1 \bigcap \cdots \bigcap P_j)\backslash(P_{j+1} \bigcup \cdots \bigcup P_m), j = 1, \cdots, m-1, P^m = P_1 \bigcap \cdots \bigcap P_m, P^0 = M\backslash(P_1 \bigcup \cdots \bigcup P_m)$, 并考虑同态 δ^j 一个序列, 它建立了把属于紧上同调 $H^{(c)}(P^j)$ 中类的闭链 σ 对应到属于 $H^{(c)}(P^{j-1})$ 的类中的闭链 $\delta^j\sigma$:

$$\delta_m : H^{(c)}(P^m) \xrightarrow{\delta^m} H^{(c)}(P^{m-1}) \to \cdots \to H^{(c)}(P^1) \xrightarrow{\delta} H^{(c)}(P^0). \tag{16}$$

闭链 $\delta^j\sigma$ 被分层为同胚圆, 它们围绕 P^j 并属于 P^{j-1}. 如同上面那样, 这个序列对偶于一个上同调序列, 它定义了一个**复合留数类**:

$$\operatorname{Res}^m : H(P^0) \to H(P^1) \to \cdots \to H(P^{m-1}) \to H(P^m). \tag{17}$$

逐次应用公式 (14) 便得到下面的命题:

对任意 $(s-m)$ 维的同调类 $h \in H^{(c)}_{s-m}(P^m)$ 中的闭链 σ 和上同调类 $\omega^* \in H^s(P^0)$ 中的任意 s 次闭 $C^\infty-$ 形式 ω, 成立留数公式

$$\int_{\delta_m h} \omega^* = (2\pi i)^m \int_h \operatorname{Res}^m \omega^*. \tag{18}$$

最后我们注意到, 如果形式 ω 在某个 $n-1$ 维复流形 $N \subset M$ 上等于零, 则对它和对 $\operatorname{res}\omega$ 沿着交集 $\sigma \bigcap N$ 和 $\delta\sigma \bigcap N$ 的积分将消失. 这就给了我们一种可能性: 不去考虑同调和上同调群, 取而代之的是考虑**相对**同调和上同调群. 我们以 $C_s(M)$ 和 $C_s(N)$ 代表在这些流形上的 s 维链群 (像通常那样总是整系数的). 称链 $\sigma \in C_p(M)$ 是一个**相对于** N **的闭链**是说如果它的边缘 $\partial\sigma \subset N$ (特别地, 当等于零时). 群 $C_s(N)$ 是 $C_s(M)$ 的子群; 称商群

$$C_s(M, N) = C_s(M)/C_s(N)$$

[1] 根据定理 1 后面的附注可看出, 这种情形只可能发生在所考虑的形式具高于 1 阶的极奇集.

为相对链群. 称链 $\sigma^s \in C_s(M)$ 为相对边缘是说存在链 $\sigma^{s+1} \in C_{s+1}(M)$, 使得 $\sigma^s - \partial\sigma^{s+1} \in C_s(N)$. 相对边缘组成所有相对闭链群 $Z_s(M,N)$ 的子群 $B_s(M,N)$; 称商群

$$H_s(M,N) = Z_s(M,N)/B_s(M,N)$$

为相对同调群.

当考虑在流形 P 上具一阶极奇性并在流形 N 上为零的形式 ω 时 (假定它们处于一般位置), 可以更精确地描述出上面的构造. 就是说可以对勒雷上边缘算子的性质 (1) — (3) 再加上一个性质.

(4) 如果 $z \in P \bigcap N$, 则 $\delta z \subset N$.

于是, 这个算子把每一个相对闭链 $\sigma \in Z_{s-1}(P,N)$[1] 变到相对闭链 $\delta\sigma \in Z_s(M\backslash P, N)$. 容易看出它建立了对应的相对同调群之间的同态:

$$\delta : H_{s-1}(P,N) \to H_s(M\backslash P,N). \tag{19}$$

留数公式 (13) 对于相对同调类 $h \in H_{s-1}(P,N)$ 和 $\delta h \in H_s(M\backslash P,N)$ 保持不变.

勒雷方法在积分计算的例子可在 R. C. Hwa 和 V. L. Toeplitz 的书 *Homology and Feynman integrals*, Benjamin, New York and Amsterdam, 1966 中找到, 这些例子在理论物理中有重要的意义.

55. 对数留数

在第 19 目中我们介绍过 $\mathbb{C}^n$ 中的庞加莱形式

$$\sigma_0 = \frac{(-1)^n}{\pi^n} d^c \ln|z|^2 \wedge (dd^c \ln\ |z|^2)^{n-1}, \tag{1}$$

对它沿任意实 $(2n-1)$ 维闭链 $\gamma \subset \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ 的积分给出了这个闭链的指数[2]. 直接计算表明这个形式为

$$\sigma_0 = \frac{(n-1)!}{2(2\pi i)^n|z|^{2n}}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\overline{z}_\nu dz[\nu] \wedge dz + \sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1} z_\nu dz[\nu] \wedge d\overline{z}\right\}.$$

即等于马丁内利 – 博赫纳公式的实部:

$$\sigma_0 = \frac{1}{2}(\omega_{\mathrm{MB}} + \overline{\omega}_{\mathrm{MB}}). \tag{2}$$

闭链 γ 同调于多圆盘 $U^n = \{\|z\| < 1\}$ 的边缘的整数倍, 设 $\gamma \sim k\partial U^n$, 从而 γ 关于点 $z = 0$ 指数等于

$$i_0(\gamma) = \int_{k\partial U^n} \omega_{\mathrm{MB}} = k \tag{3}$$

---

[1] $Z(P,N)$ 被理解为 $Z(P, P \cap N)$; 在后面的公式中采用类似的约定.

[2] 形式 (1) 与第 19 目中的 σ_0 相差一个因子 $(-1)^n$, 它所依据的事实是, 在这里所认定的正向是由形式 $dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_n$ 诱导, 而不像在第 19 目由 $dz_1 \wedge d\overline{z}_1 \wedge \cdots \wedge dz_n \wedge d\overline{z}_n$ 诱导.

(符号 Re 可以略去, 这是因为这个积分是实的). 但是如果我们把多圆盘的整个边界换成它的骨架 Γ, 而 $2n-1$ 形式 ω_{MB} 换作全纯的 $n-$ 形式, 则可得到同一答案:

$$\imath_0(\sigma) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{k\Gamma} \frac{dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n}{z_1 \cdots z_n}, \tag{4}$$

其中 $k\Gamma$ 是多圆盘的骨架 Γ 的整数倍. 这个公式完全类似于平面上对点 $z=0$ 的闭路径的指数公式.

如果我们考虑下面的问题则就进入了对数留数的高维类比. 设给出了区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的全纯映射 $f: D \to \mathbb{C}^n$, 其雅可比行列式 $J_f(z) \neq 0.G \Subset D$ 为具光滑若尔当 (Jordan) 边缘 $\partial G = S$ 的区域, 且 S 不包含 f 的零点. 要求决定映射 f 在区域 G 中的带重数公共零点的总数. (我们注意到, 由于紧解析集的有限性定理, 即第 24 目的定理 7, 根据在 ∂G 上 $f \neq 0$ 的条件得到 f 在这个区域 G 上零点个数的有限性.)

这个问题完全可像平面的问题那样解决. 我们将计算对于点 $w=0$ 的闭链 $S_* = f(S)$ 的指数, 它是在映射 f 下 S 所对应的; 根据公式 (3) 和积分中的变量替换的定理, 它等于

$$N = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int_S \frac{1}{|f(z)|^{2n}} \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \overline{f}_\nu d\overline{f}[\nu] \wedge df. \tag{5}$$

因为在 (5) 的积分号内的是在 $\overline{G} \backslash \{f(z)=0\}$ 中非异和闭的形式, 故由斯托克斯公式我们可以把积分闭链 S 换成当 $\varepsilon > 0$ 充分小时的韦伊集合 $\Pi_\varepsilon = \{z \in G : |f_\nu(z)| < \varepsilon, \nu = 1, \cdots, n\}$ 的边界 (参看第 30 目). 如果再过渡到沿集合 Π_ε 的 n 维骨架 $\Gamma_\varepsilon = \{|f_\nu(z)| = \varepsilon, \nu = 1, \cdots, n\}$ 的积分, 即类似从公式 (3) 到 (4) 的过渡过程, 我们便得到

$$N = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{df_1 \wedge \cdots \wedge df_n}{f_1 \cdots f_n}. \tag{6}$$

当 ε 充分小时, 集合 Π_ε 由有限个连通分支组成, 其中每一个分支包含一个且只有一个 f 的零点. 沿这样的分支的积分 (5) 或等价于它的沿这种分支的骨架的积分 (6), 自然地被称做映射 f 属于这个分支的零点的阶. 于是我们得到下面的辐角原理的 n 维类比.

定理 1. 如果 $f: D \to \mathbb{C}^n$ $(D \subset \mathbb{C}^n)$ 为全纯映射, $J_f(z) \neq 0$, 而 $G \Subset D$ 是具若尔当光滑边缘 S 的区域, 它不包含 f 的零点, 则对于点 $w=0$ 的 $S_* = f(S)$ 的指数等于 f 在区域 G 中 f 的零点的总数, 其中计入了零点的阶数.

例题 (1). 映射 $w_1 = z_1^2 - z_2^2, w_2 = 2z_1 z_2$ 具雅可比 $4(z_1^2 + z_2^2)$, 它在 $\mathbb{C}^2$ 的球 $B = \{|z| < 1\}$ 中有一个零点 (0,0). 这个零点的阶数根据公式 (6) 等于

$$N = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{dw_1 \wedge dw_2}{w_1 w_2} = \frac{2}{(2\pi i)^2} \int_\Gamma \frac{(z_1^2 + z_2^2) dz_1 \wedge dz_2}{(z_1^2 - z_2^2) z_1 z_2},$$

其中 Γ 为韦伊区域 $\{|z_1^2 - z_2^2| < 1, 2|z_1 z_2| < 1\}$ 的骨架. 利用马丁内利方法可以证明, 所求的阶数 $N = 4$.

* 1. 设 $f : U \to \mathbb{C}^n$ 为点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的邻域的全纯映射. 证明, 如果 $f(a) = 0$ 且 $J_f(a) \neq 0$, 则 f 在点 a 具一阶零点.

2. 设 P_ν 为 z 的 $d_\nu \geqslant 1$ 次齐次多项式 $(\nu = 1, \cdots, n)$, 并且映射 $P = (P_1, \cdots, P_n)$ 在点 $z = 0$ 为孤立零点. 证明, 这个零点的阶为 $d = d_1 \cdots d_n$.[提示: 所有锥 $C_\nu = \{P_\nu(z) = 0\}$ 只交于点 $z = 0$: 它们的集合同调于坐标平面的集合, 其中每个平面各取了 d_ν 次. 剩下来再利用公式 (6)].*

像在 $n = 1$ 的情形那样, 由辐角原理得到

定理 2 (鲁歇 (Rouché)). 设给定一个具若尔当边缘 S 的有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 和两个全纯映射 $f, g : \overline{D} \to \mathbb{C}^n$. 如果在每个点 $z \in S$ 至少对一个坐标成立

$$|f_\nu(z)| > |g_\nu(z)|, \tag{7}$$

则映射 $f + g$ 在 D 中所具有的零点数 (计其阶数) 与 f 所具有的一样多.

证明. 首先我们注意到, 由于 (7) 和不等式

$$|f_\nu(z) + g_\nu(z)| \geqslant |f_\nu(z)| - |g_\nu(z)|,$$

映射 f 和 $f + g$ 在 S 上没有零点, 从而它们在 D 中的零数数有限 (第 24 目定理 7). 映射 $f_t = f + tg$ 对任意 $t \in [0, 1]$ 也在 S 上没有零点, 这是因为在那里对某个坐标有

$$|f_\nu + tg_\nu| \geqslant |f_\nu| - t|g_\nu| > 0.$$

对任意 $t \in [0, 1], f_t$ 在区域 D 中的零点数 N_t 由公式 (5) 决定, 从而连续地依赖于 t. 因为这是个整值函数, 故 $N_t =$ 常数. 即 $f_0 = f, f_1 = f + g$ 在 D 中有相同的零点数. □

可清楚看出, 如果在 S 上以欧几里得或者多圆盘度量有 $\|f\| > \|g\|$, 则条件 (7) 显然满足.

我们发现, 当 $n > 1$ 时映射 $f = (f_1, \cdots, f_n)$ 的零点阶数, 一般来说, 不能通过 f_ν 在此零点的泰勒展式的最低项的阶数表出. 那么, 映射 $w_1 = z_1^2, w_2 = z_2^3$ 在 $z = 0$ 为 6 阶零点, 正好等于这些阶的乘积. 但是对映射 $w_1 = z_1^2, w_2 = z_1^2 + z_2^3$, 它与前一个映射相差一个非退化线性变换, 从而也在 $z = 0$ 具阶数 6, 而它的最低阶的乘积为 4. 利用鲁歇定理可澄清这个问题.

定理 3. 设点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的邻域 U 的全纯映射 $f : U \to \mathbb{C}^n$ 在此点有孤立的零点. 如果映射 $P = (P_1, \cdots, P_n)$ 在 a 也为弧立零点, 其中 P_ν 为 f_ν 展成 z 的齐次多项式的展式中非零的最低项, 则 f 在 a 的零点阶等于 $d = d_1 \cdots d_n$, 其中 $d_\nu = \deg P_\nu$.

证明. 不失一般性, 我们设 $a=0$, 而且假定 $\overline{B}=\{|z|\leqslant 1\}\subset U$, 以及 f 在 $\overline{B}$ 中除了 $z=0$ 外没有其他零点. 令 $f_\nu=P_\nu+g_\nu$, 其中 g_ν 为次数大于 d_ν 的齐次多项式的和. 按假设条件, 映射 P 具有唯一的零点 $z=0$. 故而存在常数 $m>0$ 使得在球面 $S_1=\{|z|=1\}$ 的每点 z, $|P_\nu(z)|$ 中最大者 $\geqslant m$. 级数 g_ν 的项的模的和对所有 $z\in S_1$ 和所有 $\nu=1,\cdots,n$, 不会超过某个常数 $M<\infty$

对于固定的点 $z\in S_1$, 我们以 $\nu_0=\nu(z)$ 代表坐标的标号, 对它而言达到了 $\max\limits_{\nu}|P_\nu(z)|$. 于是对任意 $r\in[0,1]$ 有

$$|P_{\nu_0}(rz)|\geqslant r^{d_{\nu_0}}m,\quad |g_{\nu_0}(rz)|\leqslant r^{d_{\nu_0}+1}M,$$

从而, 如果 $r<r_0=m/M$, 则在球面 $S_r=\{|z|=r\}$ 的每点有 $|P_{\nu_0}(z)|>|g_{\nu_0}(z)|$. 根据鲁歇定理, $f=P+g$ 在点 $z=0$ 的零点阶与 P 的相同, 而根据上一目例 1 后面的习题知这个阶数为 $d_1\cdots d_n$. □

不久前, 车赫 (A. K. Tsikh) 和尤日可夫 (A. P. Yuzhakov) 证明了, 对于 f 的孤立零点的重数与阶数 d_ν 的乘积相等这个事实, 也是使由最低项组成的映射将此点作为孤立零点的必要条件; 在一般情形中 f 的零点的重数不小于 d_ν 的积 (参看在第 53 目定理 1 下面脚注所引的 Aĭzenberg 和 Yuzhakov 的书).

作为鲁歇定理的另一个应用, 我们考虑全纯映射的局部逆的问题 (对比卷 I 第 35 目):

设在点 $a\in\mathbb{C}^n$ 的邻域 U 中给出了一个全纯映射 $f:U\to\mathbb{C}^n$ 和 $f(a)=b$; 要求在邻域 $V\ni b$ 中找出 f 的逆映射.

如果雅可比 $J_f(a)\neq 0$, 则映射 f 在点 a 的某个邻域中为双全纯; 从而这个问题在点 b 有全纯解 $g=f^{-1}$ (参看第 9 目). 如果 $J_f(a)=0$, 则要求再附加地满足所谓的*奥斯古德* (Osgood) *条件*: a 是点 $b=f(a)$ 的原像集合中的孤立点. 如果不满足它, 则 $f^{-1}(b)$ 为维数大于零的解析集.

例题 (2). 对映射 $f:(z_1,z_2)\mapsto(z_1^2-z_2^2,2z_1z_2)$, 奥斯古德条件在点 $z=0$ 被满足, 而对 $g:(z_1,z_2)\mapsto(z_1,z_1z_2)$, 则不满足: 原像 $g^{-1}(0)$ 为复直线 $\{z_1=0\}$.

定理 4. 如果全纯映射 $f:U\to\mathbb{C}^n$ 在点 $a\in U$ 满足奥斯古德条件, 则它在该点的某个邻域中为逆紧.

证明. 按照定理的条件, 存在球 $G=\{|z-a|<r\}\Subset U$. 使得当 $z\in\overline{G}\backslash\{a\}$ 时 $f(z)\neq b$, 从而 $\min\limits_{z\in\partial G}|f(z)-b|=\rho>0$. 设 $B=\{|w-b|<\rho\}$; 因为对任意点 $w^0\in B$, 解析集 $\{z\in G;f(z)=w^0\}$ 没有靠近 ∂G 的点, 于是根据第 24 目的定理 7, 它为有限, 即映射 $f(z)-w_0$ 在 G 中有孤立零点. 映射 $f(z)-b$ 在 G 中有唯一的零点 (即点 a), 而因为

$$f(z)-w^0=(f(z)-b)+(b-w^0)$$

和 $|f(z)-b| \geqslant \rho$ 在 ∂G 上成立, 而又有 $|b-w^0|<\rho$, 故由在欧几里得度量下的鲁歇定理知道, $f(z)-w^0$ 在 G 中具有像 $f(z)-b$ 一样多的零点, 即至少有一个零点 (假定 a 可以是带重数的零点). 我们来证明 $B \subset f(G)$.

以 G_0 表示 $f^{-1}(B)$ 中包含点 a 的连通分支. 任意点 $w \in B$ 在 G_0 中有有限个原像并且对任意 $K \Subset B$. 原像 $f^{-1}(K) \Subset G_0$. 这意味着映射 $f: G_0 \to B$ 为逆紧的. □

推论. 如果 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, 并且全纯映射 $f: D \to \mathbb{C}^n$ 在每点 $a \in D$ 满足奥斯古德条件. 则 $f(D)$ 也是一个区域.

定理 4 给出了在一点的局部逆映射的定性特征, 其中的映射在此点的雅可比等于零但满足奥斯古德条件: 在这点的像点的邻域中, 取逆的过程大体上与单变解析函数在分支点的情形相同. 为了更详细地研究, 我们需要下面的定理.

定理 (雷默特 (Remmert)). 在逆紧全纯映射 $f: D \to G$ 下区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中解析集的像是区域 G 中的解析集

这个定理推广关于双全纯映射保持解析集不变的显见命题 我们只叙述而不加以证明 [1).

设全纯映射 f 在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 满足奥斯古德条件, 并且 $J_f(a)=0$. 根据定理 4, 存在这个点的邻域 U 使得 $f: U \to V$ 为逆紧映射. 我们以 $E=\{z \in U : J_f(z)=0\}$ 代表映射 f 的临界点的集合 (按照所给条件, 其非空). 由雷默特定理, 它的像 $E_*=f(E)$ 是 V 中的解析集, 从而不可分离 V. 所以对任何一个点 $w \in V\backslash E_*$, 原像 $f^{-1}(w)$ 的个数都一样 (这是在 $V\backslash E_*$ 上的整数值连续函数); 以 k 记此个数.

固定点 $w^0 \in V\backslash E_*$ 并以 $z^j(w^0)$ 记其在 U 中的原像 ($j=1,\cdots,k$). 如有必要, 可实施空间 $\mathbb{C}^n(z)$ 的线性变换, 从而可假定这些点 $z^j(w^0)$ 的第 n 个坐标互不相同. 于是对于充分靠近 w^0 的点 w 的原像的第 n 个坐标 $z_n^j(w)$ 也成立同样的结论; 我们记

$$P(z_n,w)=\prod_{j=1}^{k}(z_n-z_n^j(w)) \equiv z_n^k+c_1(w)z_n^{k-1}+\cdots+c_k(w). \tag{8}$$

由反函数定理知, 原本定义在 w^0 的邻域中的函数 $z_n^i(w)$ 则可沿任意一条路径解析延拓到 $V\backslash E_*$. 我们注意到, 当沿在 $V\backslash E_*$ 中的某条闭路径延拓时, 其终点值 $z_n^j(w)$ 可能不同于初始的值, 而变到原像 $f^{-1}(w)$ 中另一个点的第 n 个坐标. 但是多

[1)参看在第 24 目中引述的丘尔卡 (Chirka) 的书的 55 页. 我们注意到, 对于非逆紧映射定理不再成立: 集合 $\left\{2k\pi i+\frac{1}{2k}\right\}$, 其中 k 为整数, 它在带状域 $\{-1<\operatorname{Re} z<1\} \subset \mathbb{C}$ 中为解析 (由卷 I 第 46 目的魏尔斯特拉斯定理存在定义它的整函数), 而这个集合在全纯映射 $z \mapsto e^z$ 下不是解析的, 这是因为它在此区域内部有个极限点.

项式 (8) 的系数 $c_\mu(w)$ 作为它的根 $z_n^j(w)$ 的对称函数在沿这种路径延拓时不变, 即是 $V\backslash E_*$ 中的单值 (并全纯的) 函数.[1] 显然它们是有界的, 而因为 E_* 为解析集, 故由第 32 目的定理 3 知, 它们被全纯延拓到区域 V 中.

因此, 在 V 中的逆映射 $g = f^{-1}$ 的第 n 个坐标 $z_n = g_n(w)$ 是一个具分支集合 $E_* = f(E)$ 的 k – 值解析函数. 为了求出 g 的其余坐标, 我们考虑次数不大于 $k-1$ 的对 z_n 的多项式, 它在 $V\backslash E_*$ 中以下面的公式定义:

$$p_\nu(z_n.w) = \sum_{j=1}^{k} z_\nu^j(w) \prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq j}}^{k} (z_n - z_n^\mu(w)), \quad \nu = 1, \cdots, n-1, \tag{9}$$

其中 $z_\nu^j(w)$ 代表 $z^j(w)$ 的第 ν 个坐标. 这些多项式的系数也被全纯地延拓到 V. 我们注意到, 像在 (8) 和 (9) 中看到的, 有

$$z_\nu^j(w) \frac{\partial P}{\partial z_n}\bigg|_{z_n = z_n^j(w)} = z_\nu^j(w) \prod_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq j}}^{k} \left(z_n^j(w) - z_n^\mu(w)\right) = p_\nu\left(z_n^j(w), w\right),$$

从而逆映射 g 的第 ν 个坐标, 即 $z_\nu^j(w) = g_\nu^j(w)$, 通过 $z_n^j(w) = g_n^j(w)$ 由下面的公式定义:

$$g_\nu(w) = \frac{p_\nu(z_n, w)}{\dfrac{\partial}{\partial z_n} P(z_n, w)}\Bigg|_{z_n = g_n(w)}, \quad \nu = 1, \cdots, n-1. \tag{10}$$

这便证明了

定理 5 (奥斯古德). 设 $f: U \to \mathbb{C}^n$ 为在点 $a \in \mathbb{C}^n$ 的邻域中的全纯映射, 并且 $J_f(a) = 0$, 但 a 是点 $b = f(a)$ 的原像集中的孤立点. 于是 (可能是在 U 的一个线性变化之后) 在点 b 邻域中的局部逆 $g = f^{-1}$ 可以由下面的方式得到: 它的第 n 个坐标 $z_n = g_n(w)$ 可以从方程

$$P(z_n, w) = 0 \tag{11}$$

中求出, 其中 P 为具在点 b 全纯的系数的多项式 (8) , 并是在 b 的邻域中的一个 k – 值解析函数, 而其余的坐标唯一地以公式 (10) 通过 $g_n(w)$ 和 w 表达.

例题 (3). 映射

$$w_1 = z_1^2 - z_2^2, \quad w_2 = 2z_1 z_2 \tag{12}$$

的雅可比等于 $J_f(z) = 4(z_1^2 + z_2^2)$, 它在复直线 $E = \{z_1 = \pm i z_2\}$ 取零值. 消去 z_1, 我们得到一个四次方程 $P(z_2, w) = z_2^4 + w_1 z_2^2 - \dfrac{w_2^2}{4} = 0$. (12) 的逆为

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{w_1^2 + w_2^2} + w_1}, \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\sqrt{w_1^2 + w_2^2} - w_1},$$

[1] 参看第 23 目中魏尔斯特拉斯预备定理的证明

故而函数 $z_\nu(w)$ 为四值函数并且它们的分支在集合 $E_* = \{w_1 = \pm i w_2\}$ 之外全纯. 这个集合是集合 E 的像并由两条复直线组成, 在它们中的每条直线上按 g_ν 的两个值合并在一起, 在这些平面的相交点上 g_ν 的所有四个值也被合并一起.

当奥斯古德条件不满足时, 即 a 是集合 $f^{-1}(b)$ 的极限点, 但该映射的雅可比不恒等于零, 于是存在包含点 a 的复维数为 r 的解析集, $1 \leqslant r \leqslant n-1$, 它被 f 映到点 b. 在这种情形, 一般来说, b 至少是所考虑映射的逆的一个分支 g_ν 的奇点.

例题 (4). 考虑映射

$$w_1 = z_2 z_3, \quad w_2 = z_1 z_3, \quad w_3 = z_1 z_2, \tag{13}$$

其雅可比 $J = 2z_1 z_2 z_3$ 在三个 (复) 二维平面 $\{z_\mu = 0\}, \mu = 1, 2, 3$ 上为零. 点 $w = 0$ 的原像是三条复直线 $\{z_2 = z_3 = 0\}, \{z_1 = z_3 = 0\}$ 和 $\{z_2 = z_1 = 0\}$ 的集合. (13) 的逆

$$z_1 = \sqrt{w_2 w_3 / w_1}, \quad z_2 = \sqrt{w_1 w_3 / w_2}, \quad z_3 = \sqrt{w_1 w_2 / w_3}$$

在平面 $\{w_\mu = 0\}, \mu = 1, 2, 3$ 之外有全纯分支, 点 $w = 0$ 是所有三个分支 g_ν 的奇点.

问题

1. 如果函数 $f = \dfrac{P}{Q}$, 其中 P 和 Q 为互素的多项式, 它在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中全纯. 则在此区域中 $Q \neq 0$.

2. 如果函数 f 在双圆盘 $\{|z| < 1, |w| < 1\}$ 中全纯并不能全纯延拓到点 $(z_0, e^{i\theta_0})$, 其中 $|z_0| < 1$, 则它不能全纯延拓到所有的点 $(z, e^{i\theta_0})$, 其中 $|z| < 1$.

3. 验证在球 $B = \{|z|^2 + |w|^2 < 1\}$ 中全纯, 在 $\overline{B}$ 中连续且在直线 $z = 0$ 等于 0 的函数 $z^3/(1-w^2)$ 不能表示为 $z\varphi(z, w)$ 这样的形式, 其中的 φ 为在 B 中全纯并在 $\overline{B}$ 中连续.

4. 设 $D = \{3/4 < |z| < 5/4, 3/4 < |w| < 5/4\}$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中的区域; 集合 $M = \{(z, w) \in D : w = z + 1\}$ 由两个分支 $M_1 = \{(z, w) \in M : \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w > 0\}$ 和 $M_2 = M \backslash M_1$ 组成, 它们相互之间的距离为正. 证明第二库赞问题: 在 $D \backslash M_1$ 中 $f_1 = 1$, 在 $D \backslash M_2$ 中 $f_2 = w - z - 1$ (相容的条件) 没有解. [**提示**: 在可解的情形下, 我们可得到一个函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 使得在 $D \backslash M_1$ 中 $f \neq 0$, 而在 $D \backslash M_2$ 中 $g = f/(z - w - 1) \neq 0$; 比较函数 f 在圆 $\{|z| = 1, w = \pm 1\}$ 上的辐角增量 Δ'_f 和 Δ''_f 和相对应的函数 g 的辐角增量 Δ'_g 和 Δ''_g, 我们便得知 $\Delta'_f = \Delta''_f = \Delta''_g$ 和 $\Delta'_g = \Delta''_g$, 但显然有 $|\Delta'_f - \Delta'_g| = 2\pi$.]

5. 证明, 在区域 $D = \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ 中问题 $\bar\partial f = (\bar z_2 d\bar z_1 - \bar z_1 d\bar z_2)/|z|^2$ 无解, 虽然该形式的右端部分为 $\bar\partial$–闭. [**提示**: 注意, 在区域 $U_j = \mathbb{C}^2 \setminus \{z_j = 0\}$ 该问题的解为 $\bar z_1/z_2|z|^2$ 和 $-\bar z_2/z_1|z|^2$.]

6. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯域, 并且 $\{z \in D : z_1 = 0\} = M_1 \bigcup M_2$, 其中 M_1 和 M_2 为在平面 $z_1 = 0$ 上的不交开集; 于是存在函数 $f \in \mathscr{O}(D)$, 使得在 M_1 上有 $f = 1$ 且函数 f/z_1 在 M_2 的邻域中全纯. [提示: 利用 $\overline{\partial}$ - 问题的可解性.]

7. 设 X 为紧空间, $C(X)$ 为 X 上的所有的连续复函数的环, G 为 $C(X)$ 中在 X 上所有处处非零的函数的 (乘法) 群, E 为 G 的子群, 它由形如 $e^f, f \in C(X)$ 的函数组成. 证明

$$G/E \approx H^1(X, \mathbb{Z}).$$

这个等式也在 X 为可数个紧集并的情形成立. [提示: 利用序列 $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{e} \mathscr{C} \to \mathscr{S} \to 0$ 的正合性, 其中 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{S}$ 为 $C(X)$ 和 G 中元素的芽层, 而 e 是映射 $f \mapsto e^{2\pi i f}$.]

8. 设 K 为 $\mathbb{C}^n$ 中紧集, 函数 f 在 K 的邻域中全纯. 假定 $H^1(K\ \mathbb{Z}) = 0$ 和 $0 \notin f(K)$; 于是存在在 K 上的全纯函数 g 使得 $e^g = f$ (f 的全纯对数).

9. 设 X 为紧, 函数 $f \in C(X), N_f = \{x \in X : f(x) = 0\}$. 假定 $H^1(X \backslash N_f, \mathbb{Z}) = 0$, 于是对任一个整数 $k > 0$, 在 $C(X)$ 中存在函数 $f^{1/k}$.

10. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯域, 形式 f 在 $C^\infty(D)$ 类中使得 df 在 D 中全纯 (即 df 为双阶 $(r, 0)$ 的形式并具有全纯系数); 于是存在 $(r-1)$ 次形式 g, 其属于 $C^\infty(D)$ 类, 使得形式 $f - dg$ 全纯.

11. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中区域, 其满足 $H^1(D, \mathscr{O}) = 0$, 又 $p : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^2$ 为到前两个坐标的投射. 假定: 1) 在 D 中存在全纯曲面, 它被一一投射到 $p(D)$ 上, 以及 2) 对每个 $a \in p(D)$, 集合 $p^{-1}(a) \bigcap D$ 连通且单连通 (即在其上任意一条闭路径同伦于零); 于是 $p(D)$ 为 $\mathbb{C}^2$ 中的全纯域. [提示: 参看第 48 目的定理 3]

12. 辛钦 (G. M. Khenkin) 证明在双圆盘 $U \subset \mathbb{C}^2$ 中问题 $\overline{\partial} f = \omega$ 对形式 $\omega = a_1 d\overline{z}_1 + a_2 d\overline{z}_2$ 及 $\overline{\partial}\omega = 0$ 有下面公式的解

$$4\pi^2 f(z) = -\int_U \frac{(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)a_1 + (\zeta_2 - \overline{z}_2)a_2}{|\zeta - z|^2} d\overline{\zeta} \wedge d\zeta +$$
$$\int_{|\zeta_2|=1} \frac{(\overline{\zeta}_1 - \overline{z}_1)a_1 d\overline{\zeta}_1 \wedge d\zeta}{(\zeta_2 - z_2)|\zeta - z|^2} - \int_{|\zeta_1|=1} \frac{(\overline{\zeta}_2 - \overline{z}_2)a_2 d\overline{\zeta}_2 \wedge d\zeta}{(\zeta_1 - z_1)|\zeta - z|^2}.$$

13. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的全纯域且函数 $f_\nu \in \mathscr{O}(D), \nu = 1, \cdots, N$, 在 D 中没有公共零点; 于是存在有函数 $g_\nu \in \mathscr{O}(D)$, 使得 $f_1 g_1 + \cdots + f_N g_N = 1$.

14. 设 $S = \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathrm{Re}\, z_3 = |z_1|^2 - |z_2|^2\}$; 证明在 S 上满足柯西 - 黎曼切条件的任意光滑函数可以被延拓到整函数.

15. 设 f 为对 w_j 的 –4 次齐次函数, 它在任意射影直线 $l \subset D_+$ 的仿射部分上有一个一阶极点. 证明、由彭罗斯方法对应 f 的麦克斯韦方程的解因而是迷向的 (参看第 52 目).

16. 用彭罗斯方法构造一个麦克斯韦方程的超越解的例子, 使它在实的闵可夫斯基空间上没有奇点.

17. (A. P. Yuzhakov) 证明, 对任意不与下面积分的被积函数的奇点相遇的闭链 σ, 则

$$\int_\sigma \frac{f(z,w)}{az^k+bw^l}dzdw=0,$$

其中 f 为 $\mathbb{C}^2$ 上的整函数, k 和 l 为互素的正整数, a 和 $b\in\mathbb{C}$.

18. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域, $n>1$, 又 K 为 D 中不分离它的一个紧集. 证明, 对于任意双全纯映射 $f:D\backslash K\to\mathbb{C}^n$ 可延拓为 D 的双全纯映射.

19. 设 U 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个开集, $f:U\to\mathbb{C}^m$ 为全纯映射. 如果 $a\in U$ 为 $b=f(a)$ 的原像中的孤立点, 则 $m\geqslant n$, 并且 $m>n$ 当且仅当存在在点 b 全纯的函数 $g\not\equiv 0$, 使得在 a 的邻域中有 $g\circ f\equiv 0$.

20. 设 U 为 $\mathbb{C}^n$ 中的开集, $f:U\to\mathbb{C}^m$ 为全纯映射. 如果每个点 $a\in U$ 均为 $f(a)$ 的原像中的孤立点, 并且 $f(U)$ 在 $\mathbb{C}^m$ 为开集, 则 $m=n$.

21. 证明被称做贝祖 (Bézout)定理的下面论断: 如果方程组 $P_\nu(w)=0,\nu=1,\cdots,n$, 只有孤立的根. 其中 P_ν 为对 $\mathbb{P}^n$ 中齐次坐标 $w=(w_0,\cdots,w_n)$ 的齐次多项式, 则它们的个数 (算上重数) 等于 P_ν 次数的乘积.

第 V 章
几何理论的一些问题

在这最后一章中, 在考虑经典的一些问题 (诸如伯格曼 (Bergman) 和卡拉泰奥多里 (Carathéodory) 度量) 的同时还考虑了许多还未最终解释过的问题. 自然, 这里素材的选取在很大程度上由作者个人的兴趣所决定.

§19. 不变度量

函数的几何理论中一个一般的方法是利用在双全纯映射下的不变度量. 在这里将描述三个这样的度量. 它们中的第一个是由伯格曼在 1933 年提出来的.

56. 伯格曼度量

我们考虑在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中全纯函数的希尔伯特空间:

$$L^2_{\mathscr{O}}(D) = \{\varphi \in \mathscr{O}(D) : \|\varphi\|^2_D = \int_D |\varphi|^2 dV < \infty\}, \tag{1}$$

其内积为

$$(\varphi, \psi) = \int_D \varphi\overline{\psi} dV \tag{2}$$

(dV 为体积元). 我们将只考虑这样的区域, 对它而言其空间为非平凡; 我们称它们为有界型的区域 (例如, 所有有界的区域是这种区域, 而空间 $\mathbb{C}^n$ 则不是).

固定一个点 $\zeta \in D$, 我们要在类 $E = \{\varphi \in L^2_{\mathscr{O}}(D) : \varphi(\zeta) = 1\}$ 中极小化范数 $\|\varphi\|_D$. 为了证明这个极值问题的可解性我们需要

引理 1. 如果多圆盘 $U^n(z^0, r) \Subset D$, 则对任意 $\varphi \in L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 有

$$|\varphi(z^0)| \leqslant \frac{1}{\pi^{n/2} r^n} \|\varphi\|_{U^n}. \tag{3}$$

证明. 不失一般性, 设 $z^0 = 0$. 如果在 U^n 中

$$\varphi(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k z^k,$$

则当令 $z_\nu = \rho_\nu e^{it_\nu}$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|^2_{U^n} &= \int_{U^n} \sum_{k,l} c_k \overline{c}_l z^k \overline{z}^l dV \\
&= \sum_{k,l} c_k \overline{c}_l \prod_{\nu=1}^{n} \int_0^{2\pi} e^{i(k_\nu - l_\nu)t_\nu} dt_\nu \int_0^r \rho_\nu^{k_\nu + l_\nu + 1} d\rho_\nu \\
&= \sum_k |c_k|^2 (2\pi)^n \prod_{\nu=1}^{n} \frac{r^{2(k_\nu+1)}}{2(k_\nu+1)},
\end{aligned}$$

而因为该级数的项非负, 故 $\|\varphi\|^2_{U^n} \geqslant |c_0|^2 \pi^n r^{2n} = |\varphi(0)|^2 \pi^n r^{2n}$. □

定理 1. 上面所提出的极值函数存在且唯一.

证明. a) *存在性*. 设 $A = \inf\limits_{\varphi \in E} \|\varphi\|^2$ 以及 $\varphi_\mu \in L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 为一个极小化序列, 即 $\|\varphi_\mu\|^2 \to A$. 由引理 1 从而得到 $\{\varphi_\mu\}$ 的局部一致有界性, 于是按照蒙泰尔 (Montel) 定理 (参看卷 I 的第 39 目; 其证明可无困难地搬到多变函数的情形) 可以选取子序列 $\{\varphi_{\mu_\nu}\}$, 它在 D 的某个紧子集一致收敛于一个函数 $\varphi_0 \in L^2_{\mathscr{O}}(D)$. 对某个 $G \Subset D$ 我们于是有

$$\|\varphi_0\|^2_G = \lim_{\nu\to\infty} \|\varphi_{\mu_\nu}\|^2_G \leqslant \lim_{\nu\to\infty} \|\varphi_{\mu_\nu}\|^2_D = A,$$

而因为 $\varphi_0 \in E$, 故 $\|\varphi_0\|^2_D = A$

b) *唯一性*. 设与 φ_0 一起的还有另一个函数 $\psi_0 \in E$, 使得 $\|\psi_0\|^2_D = A$. 于是 $\dfrac{\varphi_0 + \psi_0}{2} \in E$, 从而 $\sqrt{A} \leqslant \left\|\dfrac{\varphi_0 + \psi_0}{2}\right\|$. 由三角不等式有 $\left\|\dfrac{\varphi_0 + \psi_0}{2}\right\| \leqslant \sqrt{A}$, 因此 $\dfrac{\|\varphi_0 + \psi_0\|}{2} = \sqrt{A}$, 而成立等式只能当 $\psi_0 = \lambda\varphi_0$, 其中 λ 为常数. 代入 $z = \zeta$, 我们发现有 $\lambda = 1$, 从而 $\psi_0 = \varphi_0$. □

通过极值函数可以定义所谓的区域的核函数:

$$k_D(z, \zeta) = \frac{\varphi_0(z, \zeta)}{\|\varphi_0\|^2_D}. \tag{4}$$

现在考虑在区域 D 中任意一个函数的完全标准正交系, $\varphi_\mu \in L^2_{\mathscr{O}}(D), \mu=1,2,\cdots$. 这里的标准正交性的意思是 $(\varphi_\mu,\varphi_\nu)=\delta_{\mu\nu}$, 其中 $\delta_{\mu\nu}$ 为克罗内克符号, 而所谓完全是指, 任意函数 $f\in L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 可表示为

$$f(z)=\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\mu(z), \tag{5}$$

其中 $a_\mu=(f,\varphi_\mu)$, 该级数平均收敛于 f, 就是说在范数 (2) 的意义下的收敛. 我们注意到, 在我们的情形中, 由引理 1 得知, 在每个 $G\Subset D$ 上级数 (5) 一致收敛. 我们还记得, 完全正交系的条件可用帕塞瓦尔 (Parseval) 等式表达:

$$\sum_{\mu=1}^{\infty}|a_\mu|^2=\|f\|_D^2, \tag{6}$$

其中 $a_\mu=(f,\varphi_\mu)$.

以通常的分析方式可以证明, 在每个有限型区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中存在 $L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 中的完全正交系.

引理 2. 对任意正交系 $\varphi_\mu\in L^2_{\mathscr{O}}(D)$, 级数 $\sum\limits_{\mu=1}^{\infty}|\varphi_\mu(z^0)|^2$ 在任意点 $z^0\in D$ 收敛.

证明. 设 $U(z^0,r)\Subset D, m$ 为任意一个自然数; 利用标准正交性和不等式 (3), 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\mu=1}^{m}|\varphi_\mu(z^0)|^2&=\int_D\left|\sum_{\mu=1}^{m}\overline{\varphi_\mu(z^0)}\varphi_\mu(z)\right|^2 dV\\ &\geqslant\int_U\left|\sum_{\mu=1}^{m}\overline{\varphi_\mu(z^0)}\varphi_\mu(z)\right|^2 dV\geqslant\pi^n r^{2n}\left(\sum_{\mu=1}^{m}|\varphi_\mu(z^0)|^2\right)^2\end{aligned}$$

(我们对函数 $\sum\limits_{\mu=1}^{m}\overline{\varphi_\mu(z^0)}\varphi_\mu(z)\in L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 应用了 (3)). 约掉 $\sum\limits_{\mu=1}^{m}|\varphi_\mu(z^0)|^2$ 并令 m 趋向 ∞ 便得到结果. □

定理 2. 在区域 D 中任意的完全标准正交系 $\{\varphi_\mu\}$ 下核函数可由级数

$$k_D(z,\zeta)=\sum_{\mu=1}^{\infty}\varphi_\mu(z)\overline{\varphi_\mu(\zeta)} \tag{7}$$

表示.

证明. 记 $\varphi_\mu(\zeta) = \varphi_\mu^0$ 以及 $\sum_{\mu=1}^\infty |\varphi_\mu^0|^2 = \sigma$ (由引理 2 知此级数收敛). 对任意函数 $\varphi(z) = \sum_{\mu=1}^\infty a_\mu \varphi_\mu(z) \in E$ (参看 (5)), 我们令 $a_\mu = \frac{1}{\sigma}(\overline{\varphi}_\mu^0 + \gamma_\mu)$; 于是由条件 $\sum_{\mu=1}^\infty a_\mu \varphi_\mu^0 = 1$ 得到 $\sum_{\mu=1}^\infty \gamma_\mu \varphi_\mu^0 = 0$. 考虑到此, 则帕塞瓦尔等式 (6) 给出了

$$\|\varphi\|_D^2 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma + \sum_{\mu=1}^\infty |\gamma_\mu|^2\right) \geqslant \frac{1}{\sigma};$$

$\|\varphi\|_D^2$ 的极小值 $1/\sigma$ 由所有 $\gamma_\mu = 0$ 达到, 即

$$\varphi_0(z,\zeta) = \frac{1}{\sigma}\sum_{\mu=1}^\infty \overline{\varphi_\mu(\zeta)}\varphi_\mu(z), \quad \frac{1}{\sigma} = \|\varphi_0\|_D^2.$$

将其代入 (4) 我们便得到了 (7). □

推论. 核函数 $k(z,\zeta)$ 满足:

a) 对第一个变量全纯, 对第二个则为反全纯;

b) 反对称: $k(\zeta,z) = \overline{k(z,\zeta)}$;

c) 具有再生性: 对任意 $\varphi \in L^2_{\mathscr{O}}(D)$, 在任意点 $z \in D$

$$\varphi(z) = \int_D \varphi(\zeta)k(z,\zeta)dV_\zeta. \tag{8}$$

证明. 性质 a) 和 b) 由 (7) 看出, 为证明 c), 我们注意到, 由柯西 – 布尼亚科夫不等式 $\sum |a_\mu \varphi_\mu| \leqslant \sqrt{\sum |a_\mu|^2}\sqrt{\sum |\varphi_\mu|^2}$ 知级数 (5) 在 D 的紧子集上一致和绝对收敛, 因此再考虑到标准正交系, 我们得到

$$\begin{aligned}\int_D \varphi(\zeta)k(z,\zeta)dV &= \sum_{\mu,\nu=1}^\infty a_\mu \varphi_\nu(z)\int_D \varphi_\mu(\zeta)\overline{\varphi_\nu(\zeta)}dV \\ &= \sum_{\mu=1}^\infty a_\mu\varphi_\mu(z) = \varphi(z). \quad \square\end{aligned}$$

公式 (7) 让我们可以计算最简单区域的核函数.

例题.

(1) 多圆盘 $U = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$. 这里的完全标准正交系,譬如是标准单项式的系 $\varphi_k(z) = \lambda_k z^k$, 其中 $k = (k_1, \cdots, k_n), k_\nu \geqslant 0$, 且系数 $\lambda_k > 0$ 由下面的条件选取:

$$(\varphi_k, \varphi_k) = \lambda_k^2 \int_U z^k \overline{z}^k dV = 1.$$

在每个平面 z_ν 中引进极坐标 $(z_\nu = \rho_\nu e^{i\theta_\nu})$, 则由此条件得到

$$(2\pi)^n \lambda_k^2 \prod_{\nu=1}^{n} \int_0^1 \rho_\nu^{2k_\nu+1} d\rho_\nu = \pi^n \lambda_k^2 \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{k_\nu+1} = 1$$

或者

$$\lambda_k^2 = \frac{1}{\pi^n} \prod_{\nu=1}^{n} (k_\nu + 1).$$

系 φ_k 的完全性来自其级数就是泰勒级数, 而所有函数 $f \in \mathscr{O}(U)$ 均可由它们代表; 正交性是显然.

由公式 (7) 我们因此而得到

$$k(z,\zeta) = \sum_{|k|\geqslant 0} \lambda_k^2 z^k \overline{\zeta}^k = \frac{1}{\pi^n} \sum_{|k|\geqslant 0} \prod_{\nu=1}^{n} (k_\nu+1)(z_\nu \overline{\zeta}_\nu)^{k_\nu}.$$

令 $z_\nu \overline{\zeta}_\nu = x_\nu$, 我们注意到有

$$\prod_{\nu=1}^{n} (k_\nu+1) x_\nu^{k_\nu} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n} \left(x_1^{k_1+1} \cdots x_n^{k_n+1} \right) = \frac{\partial}{\partial x} x^{k+1},$$

而因为我们有 $|x| < 1$, 故我们可以改变微分的顺序和级数和的顺序, 我们得到了

$$k(z,\zeta) = \frac{1}{\pi^n} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{\pi^n} \frac{1}{(1-x)^2},$$

或者显式表达为

$$k_U(z,\zeta) = \frac{1}{\pi^n} \prod_{\nu=1}^{n} \frac{1}{(1 - z_\nu \overline{\zeta}_\nu)}. \tag{9}$$

(2) 球 $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$. 仍然有单项式系 $\lambda_k z^k$ 为完全标准正交系, 但是标准化条件给出 $\lambda_k^2 = \dfrac{(|k|+n)!}{k!\pi^n}$, 为计算沿 B 的积分需要引进极坐标 (在 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的). 由公式 (7) 我们得到

$$\begin{aligned} k(z,\zeta) &= \frac{1}{\pi^n} \sum_{|k|\geqslant 0} \frac{(|k|+n)!}{k!} z^k \overline{\zeta}^k \\ &= \frac{1}{\pi^n} \sum_{\mu=0}^{\infty} (\mu+1)\cdots(\mu+n) \sum_{|k|=\mu} \frac{\mu!}{k!} z^k \overline{\zeta}^k. \end{aligned}$$

我们现在注意, 里面的那个和

$$\sum_{|k|=\mu} \frac{\mu!}{k_1!\cdots k_n!} (z_1\overline{\zeta}_1)^{k_1} \cdots (z_n \overline{\zeta}_n)^{k_n} = \left(\sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{\zeta}_\nu \right)^{\mu}$$

以及对所有 $t, |t| < 1$ 有

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+1)\cdots(\mu+n)t^{\mu} = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\frac{1}{1-t} = \frac{n!}{(1-t)^{n+1}}.$$

因为在这里 $t = \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{\zeta}_\nu$ 的模小于 1, 故

$$k_B(z,\zeta) = \frac{n!}{\pi^n(1 - \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu \overline{\zeta}_\nu)^{n+1}}. \tag{10}$$

注. 由公式 (9) 看出, 多圆盘的核函数是圆盘 $\{|z_\nu| < 1\}$ 的核函数的乘积, 它等于 $\frac{1}{\pi(1 - z_\nu \overline{\zeta}_\nu)^2}$. 可以证明, 更一般地, 区域 $D \subset \mathbb{C}^m(z)$ 和 $G \subset \mathbb{C}^n(w)$ 乘积的核函数等于这两个区域的核函数的乘积 [1]:

$$k_{D\times G}(z,w;\zeta,\omega) = k_D(z,\zeta)k_G(w,\omega). \tag{11}$$

定义 1. 区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的伯格曼函数是指

$$K_D(z) = k_D(z,z) = \sum_{\mu=1}^{\infty}|\varphi_\mu(z)|^2. \tag{12}$$

在有界型区域中这个函数是正的, 这是因为根据 (4), 它是数 $\inf \|\varphi\|_D^2$ 的倒数, 其中 φ 属于 $L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 由条件 $\varphi(z) = 1$ 被标准化的函数类.

定理 3. 微分形式

$$dd^c \ln K = \frac{i}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} dz_\mu \wedge d\overline{z}_\nu \tag{13}$$

在区域 D 的双全纯映射下不变, 其中 $K = K_D(z)$ 为区域 D 的伯格曼函数.

证明. 设 $f: D \to G = f(D)$ 为双全纯映射. 如果 $\psi_\mu \in L^2_{\mathscr{O}}(G)$ 为 G 中的标准正交系, 则 $\varphi_\mu = \psi_\mu \circ f \circ J_f$ 也是 D 中的标准正交系, 其中的 J_f 为映射 f 的雅可比. 事实上, 因为像的体积元 $dV_* = |J_f|^2 dV$, 故

$$\int_D \varphi_\mu \overline{\varphi}_2 dV = \int_D \psi_\mu \circ f \cdot \overline{\psi_\nu \circ f} \cdot |J_f|^2 dV = \int_G \psi_\mu \overline{\psi}_\nu dV_* = \delta_{\mu\nu}.$$

[1] 参看 B. A. Fuks, *Special chapters in the theory of analytic functions of several complex variables*, Fizmatgiz, Moscow, 1963, p. 91; 英译本, Transl. Math. Monographs, vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1965.

系 $\{\varphi_\mu\}$ 与 $\{\psi_\mu\}$ 同时是完全的, 这是因为任意的 $\varphi \in L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 可以换作形式 $\varphi = \psi \circ f \cdot J_f$, 其中 $\psi \in L^2_{\mathscr{O}}(G)$, 从而由展开式 $\psi = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \psi_\mu$ 得到 $\varphi = \sum\limits_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\mu$. 依据定理 2 因而有

$$\begin{aligned} K_D(z) &= \sum_{\mu=1}^{\infty} |\varphi_\mu(z)|^2 = \sum_{\mu=1}^{\infty} |\psi_\mu \circ f(z)|^2 |J_f|^2 \\ &= K_G \circ f(z) \cdot |J_f(z)|^2. \end{aligned}$$

对此恒等式取对数, 则有

$$\ln K_G(w) = \ln K_D(z) - \ln J_f(z) - \overline{\ln J_f(z)},$$

其中 $w = f(z)$, 剩下的只要考虑到由于 J_f 的全纯性, 我们有 $\overline{\partial} \ln J_f = \partial \overline{\ln J_f}$, 而 $dd^c = \frac{i}{2}\partial\overline{\partial}$ 即可. □

称对应于 (13) 的双线性形式

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu} dz_\mu d\overline{z}_\nu = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} dz_\mu d\overline{z}_\nu \tag{14}$$

为区域 D 的伯格曼形式.

定理 4. 在有界区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中, 伯格曼形式为埃尔米特和正定的.

证明. 该形式的埃尔米特性质即满足 $g_{\mu\nu} = \overline{g_{\nu\mu}}$ 由 (14) 直接得到, 这时我们只需考虑到 $K > 0$ 即可. 为了证明其正定性, 我们固定一点 $z^0 \in D$, 并作一条通过它的复直线 $l : z = z^0 + \omega\zeta$, 其中 $\omega \in \mathbb{C}^n, \zeta \in \mathbb{C}$, 又注意到由复合函数的微分法则, 对于复合函数 $K \circ l$ 有

$$\frac{\partial^2 \ln K \circ l}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}\bigg|_{\zeta=0} = \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\partial^2 \ln K}{\partial z_\mu \partial \overline{z}_\nu}\bigg|_{z=z_0} \omega_\mu \overline{\omega_\nu}.$$

故而我们需要证明左边的式子当 $\omega \in \mathbb{C}^n, \omega \neq 0$ 为任意时所得的数为正.

根据公式 (12) 的直接计算给出

$$\frac{\partial^2 \ln K \circ l}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}\bigg|_{\zeta=0} = \frac{1}{K^2(z^0)} \Big\{ \sum |\varphi_\mu|^2 \cdot \sum |\varphi'_\mu|^2 - \sum \varphi'_\mu \overline{\varphi}_\mu \sum \varphi_\mu \overline{\varphi}_\mu \Big\}, \tag{15}$$

其中为书写简明起见, 在右端记 $\varphi_\mu = \varphi_\mu(z^0), \varphi'_\mu = \frac{d}{d\zeta} \varphi_\mu \circ l\Big|_{\zeta=0}$, 并且其中的取和记号对 μ 是从 1 到 ∞. 将 $\Phi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_\mu, \cdots)$ 和 $\Phi' = (\varphi'_1, \cdots, \varphi'_\mu, \cdots)$ 看成是希尔伯特序列空间 l^2 中的点, 于是 (15) 可以改写为

$$\frac{\partial^2 \ln K \circ l}{\partial \zeta \partial \overline{\zeta}}\bigg|_{\zeta=0} = \frac{1}{K^2(z^0)} \{ |\Phi|^2 |\Phi'|^2 - |(\Phi, \Phi')|^2 \},$$

其中 (Φ, Φ') 为 l^2 中的内积, 并由布尼亚科夫斯基 – 施瓦茨不等式, 在花括号内的量是非负的. 它只能在 $\Phi = \lambda\Phi'$ 的情形取零值, 其中 $\lambda \in \mathbb{C}$ 为某个数, 同时, 因为我们有 $|\Phi|^2 = K(z^0) \neq 0$, 故 $\lambda \neq 0$. 这时, 对于任意函数 $\varphi \in L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 我们有

$$\varphi(z^0) = \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi_\mu = \lambda \sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu \varphi'_\mu = \lambda \frac{d}{d\zeta}\varphi \circ l\Big|_{\zeta=0}.$$

特别地, 对于函数 $\varphi(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \overline{\omega}_\nu (z_\nu - z_\nu^0)$ 由于区域 D 的有界性, 它属于 $L^2_{\mathscr{O}}(D)$, 从而有 $\varphi \circ l = |\omega|^2 \zeta$ 并且最后面这个式子给出了 $0 = \lambda|\omega|^2$, 它在 $\omega \neq 0$ 时是不可能成立的. □

注. 定理 4 可被推广到某些无界的区域 $D \subset \mathbb{C}^n$, 这时要求 $L^2_{\mathscr{O}}(D)$ 包含了所有的线性函数.

伯格曼形式的正定性意味着函数 $\ln K$ 为严格多重次调和的 (第 38 目). 因为由此也推导出 K 的多重次调和性, 故从第 39 目的定理 4 得到了

定理 5. 如果区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的伯格曼函数 K_D 在靠近边缘时无限增大, 则 D 为全纯域.

定义 2. 由在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中的基本形式 (14) 定义的埃尔米特度量被称为*伯格曼度量*.

根据定理 3 知, 这个度量在双全纯映射下不变: 如果 $b_D(z, w)$ 为在此度量下点 $z, w \in D$ 之间的距离, 又, $f: D \to G = f(D)$ 为双全纯映射, 则

$$b_D(z, w) = b_G(f(z), f(w)), \tag{16}$$

其中 b_G 为在区域 G 的伯格曼度量下的距离.

例题(3). 对于多圆盘 $U = \{\|z\| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$, 按公式 (9), 伯格曼度量由下面的形式定义:

$$ds^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n} \frac{dz_\nu d\overline{z}_\nu}{(1 - |z_\nu|^2)^2}, \tag{17}$$

而对于球 $B = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}^2$ 由公式 (10) 得到

$$ds^2 = (n+1)\left\{\frac{|dz|^2}{1 - |z|^2} + \sum_{\mu,\nu=1}^{n} \frac{\overline{z}_\mu z_\nu dz_\mu d\overline{z}_\nu}{(1 - |z|^2)^2}\right\}, \tag{18}$$

其中 $|dz|^2 = \sum\limits_{\nu=1}^{n} |dz_\nu|^2$. 当 $n = 1$ 时两个度量都同于在单位圆盘上的罗巴切夫斯基度量 (参看卷 I 第 11 目).

我们看到, 对于在单位球的伯格曼度量下与坐标原点的距离公式为

$$b_B(0,z)=\sqrt{n+1}\ln\frac{1+|z|}{1-|z|}. \tag{19}$$

如果取 (不失一般性) $z=('0,z_n)$, 它可由沿直线段对 (18) 的积分得到.

最后我们要指出在单位多圆盘 $U\subset\mathbb{C}^n$ 中的伯格曼度量下从点 0 到点 $z=\{|z_1|,\cdots,|z_n|\}$ 的距离公式, 即到一个具非负坐标的点 (但这并不失一般性). 可以证明连接点 0 和 z 的测地线是路径 $\gamma:[0,1]\to U$, 其在 z_ν $(\nu=1,\cdots,n)$ 平面上的投影点以匀速 v_ν 沿该平面中 (罗巴切夫斯基度量下的) 测地线运动, 即 x_ν 轴的线段:

$$\ln\frac{1+x_\nu(t)}{1-x_\nu(t)}=v_\nu t,\quad v_\nu=\ln\frac{1+|z_\nu|}{1-|z_\nu|}.$$

由此看出 $\dfrac{2dx_\nu}{1-x_\nu^2(t)}=v_\nu dt$, 并由公式 (17) 得到

$$\begin{aligned}b_U(0,z)&=\sqrt{2}\int_0^1\sqrt{\sum_{\nu=1}^n\frac{dx_\nu^2}{(1-x_\nu^2(t))^2}}dt\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\sum_{\nu=1}^n\ln^2\frac{1+|z_\nu|}{1-|z_\nu|}}.\end{aligned} \tag{20}$$

57. 卡拉泰奥多里度量

在 $\mathbb{C}^n$ 的有界区域中, 也可在某些复流形中引进另一个在双全纯映射下不变的度量. 这是由卡拉泰奥多里 (Carathéodory) 在 1927 年给出的. 为了描述它, 我们考虑集合 $\mathscr{O}(M,U)$, 它由复流形 M 到单位圆盘 $U\subset\mathbb{C}$ 的全纯映射构成, 并且采用下面的

定义. 点 $p,q\in M$ 之间的卡拉泰奥多里距离是指

$$c_M(p,q)=\sup_{\varphi\in\mathscr{O}(M,U)}\rho(\varphi(p),\varphi(q)), \tag{1}$$

其中 ρ 是单位圆盘中的罗巴切夫斯基距离; 对于点 $z,w\in U$, 它等于

$$\rho(z,w)=\ln\frac{|1-\overline{w}z|+|z-w|}{|1-\overline{w}z|-|z-w|} \tag{2}$$

(参看卷 I 的第 11 目).

定理 1. 在任意复流形 M 上均定义有函数 c_M 并且是个半度量, 即它非负, 满足对称性 $c_M(p,q)=c_M(q,p)$ 和三角公理 $c_M(p,q)\leqslant c_M(p,r)+c_M(r,q)$.

证明. 首先证明对任意 $p, q \in M$ 上界 (1) 是有限的. 按定义, 存在序列 $\varphi^\mu \in \mathscr{O}(M, U)$ 使得 $\rho(\varphi^\mu(p), \varphi^\mu(q)) \to c_M(p,q)$, 并且不失一般性可假定对所有 $\mu, \varphi^\mu(q) = 0$ (附加上一个将 $\varphi^\mu(q)$ 变到 0 的圆盘的自同构). 于是

$$\rho(\varphi^\mu(p), 0) = \ln \frac{1 + |\varphi^\mu(p)|}{1 - |\varphi^\mu(p)|}. \tag{3}$$

因为 φ^μ 有界, 故由蒙泰尔定理 (参看卷 I 的第 39 目; 该定理的证明没有任何困难地可推广到流形上), 存在子序列 $\varphi^{\mu_k} \to \varphi \in \mathscr{O}(M, U)$ 在 M 的复紧子集上一致收敛. 如果 $\varphi =$ 常值, 则因为 $\varphi^\mu(q) = 0$ 故 $\varphi \equiv 0$, 于是命题是平凡的, 如果 $\varphi \neq$ 常值, 则由极大值原理存在点 $p' \in M$ 使得 $|\varphi(p)| < |\varphi(p')| \leqslant 1$. 但是由此知 $|\varphi(p)| < 1$, 并由 (3) 看出又有 $c_M(p,q) < \infty$. 因此函数 c_M 在任意复流形上都有定义.

另外, c_M 的非负和对称则是显然的, 而对于三角不等式的证明, 我们取上面所构造的那个满足 $c_M(p,q) = \rho(\varphi(p), \varphi(q))$ 的函数 φ. 由卡拉泰奥多里度量的定义有 $c_M(p,r) \geqslant \rho(\varphi(p), \varphi(r))$ 和 $c_M(r,q) \geqslant \rho(\varphi(r), \varphi(q))$, 而按罗巴切夫斯基度量的三角不等式有

$$\rho(\varphi(p), \varphi(q)) \leqslant \rho(\varphi(p), \varphi(r)) + \rho(\varphi(r), \varphi(q)). \quad \square$$

在一般情形, c_M 只是一个*半度量*, 这是因为 $c_M(p,q)$ 可以在 $p \neq q$ 时取零值. 譬如, 如果 $M = \mathbb{C}^n$ 或 $\mathbb{C}^n \backslash N$, 其中 N 为一个复流形 (在这里的任意一个全纯映射 $\varphi: M \to U$ 由刘维尔定理和关于有界全纯函数奇点可去性定理知其必为常值). 对于所有紧复流形也有同样的情形出现 (由极大原理).

为了使卡拉泰奥多里半度量成为*度量*, 即 $c_M(p,q) = 0$ 仅当 $p = q$ 时成立, 显然, 其充分必要条件是在 M 上的有界全纯函数分离 M 的点 (即对不同的点 $p, q \in M$ 存在 M 上有界的函数 φ, 使得 $\varphi(p) \neq \varphi(q)$).

例题(1). 在球 $B = \{|z| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ 中, 距离

$$c_B(0, z) = \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \tag{4}$$

与伯格曼度量下的距离只相差一个乘积因子 (参看前一目). 在多圆盘 $U = \{\|z\| < 1\} \subset \mathbb{C}^n$ 中卡拉泰奥多里距离

$$c_U(0, z) = \max_\nu \frac{1 + |z_\nu|}{1 - |z_\nu|} \tag{5}$$

($\nu = 1, \cdots, n$) 则不同于伯格曼度量. 由此例也可看出, 一般来说, 卡拉泰奥多里度量像伯格曼度量那样不是光滑的.

利用对于 $\mathbb{C}$ – 齐次度量的施瓦茨引理 (第 9 目定理 3) 容易证明公式 (4) 和 (5).

定理 2 (压缩性). 全纯映射 $f: M \to N$ 不增大卡拉泰奥多里度量:

$$c_N(f(p), f(q)) \leqslant c_M(p,q) \tag{6}$$

其中 $p, q \in M$ 为任意两点.

证明. 设 $\psi \in \mathscr{O}(N, U)$ 满足 $c_N(f(p), f(q)) = \rho(\psi \circ f(p), \psi \circ f(q))$ (它的存在性已由定理 1 中的证明给出). 于是 $\psi \circ f \in \mathscr{O}(M, U)$, 而因为在 $\mathscr{O}(M, U)$ 中有另外的函数, 故

$$c_M(p, q) \geqslant \rho(\psi \circ f(p), \psi \circ f(q)). \quad \square$$

这个定理推广了被称做施瓦茨引理的不变形式, 它可叙述为:

单位圆盘到自身的全纯变换不增大罗巴切夫斯距离:

$$\rho(f(z), f(w)) \leqslant \rho(z, w). \tag{7}$$

如果 $w = f(w) = 0$, 则 (7) 化为了通常的施瓦茨引理:

$$\ln \frac{1 + |f(z)|}{1 - |f(z)|} \leqslant \ln \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad \text{或者} \quad |f(z)| \leqslant |z|.$$

我们指出定理 2 的一些简单推论.

推论 1. 卡拉泰奥多里度量对于双全纯映射不变.

证明. 只要对映射 f 和 f^{-1} 应用定理 2 即可. $\square$

推论 2. 如果 M 和 N 为复流形, 且 $M \subset N$, 则对所有点 $p, q \in M$ 有

$$c_N(p, q) \leqslant c_M(p, q). \tag{8}$$

证明. 只要对嵌入映射 $i : M \to N$ 应用定理 2; 这个映射把每个点 $p \in M$ 相伴于同一个点 $p \in N$. $\square$

注. 在前一目中我们知道了伯格曼度量也在双全纯映射下不变. 但不同于卡拉泰奥多里度量, 它不具有在全纯映射下的压缩性质. 事实上, 我们考虑双圆盘 $U \subset \mathbb{C}^2$ 到自己的全纯映射 $f : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, z_1)$. 由前一目对 $z = (z_1, 0)$ 的公式 (20), 我们有

$$b_U(0, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln \frac{1 + |z_1|}{1 - |z_1|},$$
$$b_U(0, f(z)) = \ln \frac{1 + |z_1|}{1 - |z_1|} > b_U(0, z).$$

我们最后注意到, 卡拉泰奥多里度量像伯格曼度量一样, 可以局部地定义. 为此我们固定区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中一个点 z, 一个切向量 $v = \sum a_\nu \dfrac{\partial}{\partial z_\nu} \in T_z^c(D)$ (第 27 目) 并定义一个量

$$\Phi(z, v) = 2 \sup |v(\varphi)| = 2 \sup \left| \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} \right|, \tag{9}$$

其中上确界是对所有全纯映射 $\varphi: D \to U, \varphi(z)=0$ 的集合 $\mathscr{O}_z(D,U)$ 取的. 另外, 分段光滑的道路 $\gamma: I \to M$ 的卡拉泰奥多里的长以积分定义为

$$\|\gamma\|_c = \int_0^1 \Phi(\gamma(t), \gamma'(t))dt, \tag{10}$$

而在点 $z, w \in D$ 之间的距离 $\widetilde{c}_D(z,w)$ 则作为在 D 中连接这两个点的所有分段光滑路径的卡拉泰奥多里长度的下确界.

根据前面的定义

$$c_D(z,w) = \sup_{\varphi \in \mathscr{O}_z(D,U)} \ln \frac{1+|\varphi(w)|}{1-|\varphi(w)|},$$

而如果点 w 靠近 z, 则 $|\varphi(w)|$ 是个小的量, 并在差一个高阶小的量下有 $c_D(z,w) \approx 2\sup|\varphi(w)|$. 如果点 w 沿着路径 γ 趋向于 z, 使得 $\gamma(0)=z, \gamma'(0)=v$, 则 $c_D(z,w)$ 的微分等于 $2\sup\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\right|dt = 2\sup|v(\varphi)|dt$ (参看第 26 目). 因此, 局部地两个卡拉泰奥多里长度的定义相同, 但是在一般情形下, $c_D(z,w)$ 和 $\widetilde{c}_D(z,w)$ 可能不同.

* 1. 证明在量 Φ 的定义 (9) 中条件 $\varphi(z)=0$ 可以去掉, 即它自动满足. [提示: 应用单变量的施瓦茨引理.]

2. 证明, 对区域 $D=\{z\in\mathbb{C}^2: \frac{1}{2}<|z|<1\}, c_D(z,w)$ 等于 $c_B(z,w)$ 在 D 上的限制, 其中 $B=\{z\in\mathbb{C}^2: |z|<1\}$

3. 解释为什么对 2) 中的区域 D, 量 $c_D(z,w)$ 和 $\widetilde{c}_D(z,w)$ 不同, 其中 $z=(-3/4,0)$, 而 $w=(3/4,0)$. *

58. 小林 (Kobayashi) 度量

在稍早一些的 1967 年, 小林提出了对卡拉泰奥多里度量的一个变形, 使它具有许多好处. 小林的定义的基础不是 $\mathscr{O}(M,U)$ 而是 $\mathscr{O}(U,M)$, 即单位圆盘 U 到流形 M 的全纯映射的集合. (我们已经发现在此替换中的好处: 例如, 如果 M 为紧流形, 则由极大值原理在其上的所有全纯函数为常数, 就是说 $\mathscr{O}(M,U)$ 由常值映射组成, 而与其同时 $\mathscr{O}(U,M)$ 则包含了非常值的映射.) 我们在此叙述小林的基本结果.

我们固定两点 $p,q\in M$, 称从 p 到 q 的 M 上的一个链是指一组对象, 它由 m 个全纯盘 $f^j\in\mathscr{O}(U,M)$ 和 m 对点 $\zeta_j', \zeta_j''\in U$ $(j=1,\cdots,m)$ 组成, 其中这些点偶满足 $f^1(\zeta_1')=p, f^m(\zeta_m'')=q$, 以及 $f^j(\zeta_j'')=f^{j+1}(\zeta_{j+1}')$, 其中 $j=1,\cdots,m-1$ (图 50).

定义. 两点 $p,q\in M$ 之间的小林距离是指

$$k_M(p,q) = \inf_\sigma \sum_{j=1}^m \rho(\zeta_j', \zeta_j''), \tag{1}$$

其中 ρ 为单位圆盘中的罗巴切夫斯基距离, 而下确界是取自所有 M 上从 p 到 q 的链 $\sigma=\{f^j,\zeta_j',\zeta_j''\}_{j=1}^m$ (具有任意的链接数 m).

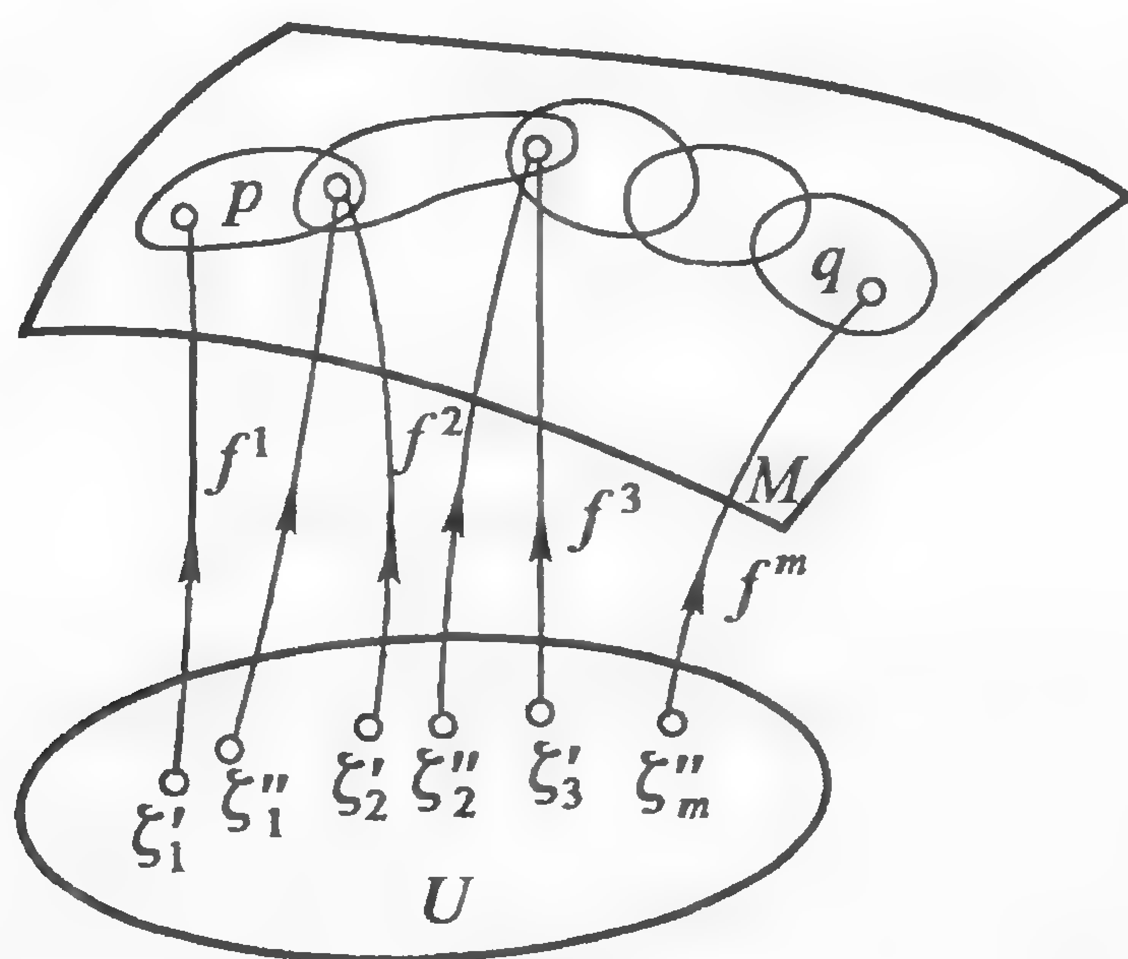


图 50

定理 1. 在任意复流形 M 上小林距离 k_M 具有半距离的性质.

证明. k_M 的非负性是显然的. 为了证明对称性 $k_M(p,q)=k_M(q,p)$, 我们与链 σ 同时再考虑另一个链就可以了, 其中的这个链由 σ 中以 $m+1-j$ 替换 j, ζ_j'' 替换 ζ_j' 得到. 为证明三角不等式

$$k_M(p,q) \leqslant k_M(p,r)+k_M(r,q)$$

只需在考虑从 p 到 r 的链 σ' 和从 r 到 q 的链 σ'' 的同时, 再考虑它们的联合, 即从 p 到 q 的链 σ:

$$\sum_{\sigma}\rho(\zeta_j',\zeta_j'')=\sum_{\sigma'}\rho(\zeta_j',\zeta_j'')+\sum_{\sigma''}\rho(\zeta_j',\zeta_j''),$$

而因为也存在其他的从 p 到 q 的链, 故 $k_M(p,q)$ 不超过按链 σ' 和 σ'' 的下确界的和. □

* 证明在小林距离的定义下, 一般地不能把链换成单个的圆盘, 即设 $m=1$. 就是说, 如果 $D=\{z\in\mathbb{C}^2:|z_1|<2,|z_2|<2,|z_1z_2|<\varepsilon\}$, 并对点 $z,w\in D$ 令

$$\widetilde{k}(z,w)=\inf_{f\in\mathscr{O}(U,D)}\{\rho(\zeta',\zeta''):f(\zeta')=z,f(\zeta'')=w\},$$

则当 $\varepsilon>0$ 充分小时, 对点 $z=(1,0),w=(0,1)$ 和 $0=(0,0)$ 不满足三角不等式. [提示: $\widetilde{k}(z,0)$ 和 $\widetilde{k}(w,0)$ 当 $\varepsilon\to 0$ 时保持有界, 而 $\widetilde{k}(z,w)\to\infty$.] *

定理 2. 全纯映射 $f:M\to N$ 不增大小林距离:

$$k_M(f(p),f(q))\leqslant k_M(p,q). \tag{2}$$

证明. 对任意全纯曲线 $\varphi\in\mathscr{O}(U,M)$ 可以考虑曲线 $f\circ\varphi\in\mathscr{O}(U,N)$, 但是在 $\mathscr{O}(U,N)$ 中还有另外的曲线. 因此在 (2) 的左端的下确界不超过右端的下确界. □

像前一目那样, 由此得到

推论 1.　小林度量在双全纯映射下不变.

推论 2.　如果 M 和 N 为复流形, 且 $M \subset N$, 则

$$k_N(p,q) \leqslant k_M(p,q).$$

对于单位圆盘, 像我们曾考虑过的其他度量一样, 小林度量等同于罗巴切夫度量. 下面的两个定理着重显示出上面关于小林度量的好处. 它们中的第一个断言, 在流形 M 上的小林距离是在那些在单位圆盘到 M 的全纯映射下不增大的距离中最大者.

定理 3.　如果 d 是 M 上的半度量使得 $d(f(\zeta'),f(\zeta'')) \leqslant \rho(\zeta',\zeta'')$, 其中 $f: U \to M$ 为所有的全纯映射, 则 $d(p,q) \leqslant k_M(p,q)$ 对所有 $p,q \in M$ 成立.

证明.　设 $\sigma = (f^j, \zeta_j', \zeta_j'')_{j=1}^m$ 为 M 上从 p 到 q 的一个链. 由 d 的三角不等式有

$$d(p,q) \leqslant \sum_{j=1}^m d(f^j(\zeta_j'), f^j(\zeta_j''));$$

由于 f^j 不增大距离, 从而 $d(f^j(\zeta_j'), f^j(\zeta_j'')) \leqslant \rho(\zeta_j', \zeta_j''), j=1,\cdots,m$. 还需从右端对 M 上从 p 到 q 的链取下确界即可.　□

类似地可证明, 卡拉泰奥多里距离 c_M 是那些在 M 到 U 中全纯映射下不增大的距离中的最大者.

定理 4.　在任意复流形 M 上, 卡拉泰奥多里距离不超过小林距离:

$$c_M(p,q) \leqslant k_M(p,q). \tag{3}$$

证明.　我们取定两个点 $p,q \in M$, 链 $\sigma = \{f^j, \zeta_j', \zeta_j''\}_{j=1}^m$ 和从流形 M 到单位圆盘 U 的全纯映射 φ. 由施瓦茨引理的不变形式 (参看前一目) 有

$$\sum_{j=1}^m \rho(\zeta_j', \zeta_j'') \geqslant \sum_{j=1}^m \rho(\varphi \circ f^j(\zeta_j'), \varphi \circ f^j(\zeta_j'')) \geqslant \rho(\varphi(p), \varphi(q))$$

(我们还用到了对罗巴切夫斯基度量的三角不等式以及 $f'(\zeta_1') = p, f^m(\zeta_m'') = q$). 另外还要从右端对 φ 取上确界, 而从左端对 σ 取下确界.　□

小林度量也可有局部定义. 固定复流形 M 的一个点 p 及切向量 $v \in T_p(M)$, 并考虑从圆盘 $U_R = \{|z| < R\}$ 到流形 M 的满足法化条件 $f(0) = p, f'(0) = v$ 的所有全纯映射 f. 我们以 Φ_M 表示使这种映射存在的圆盘的半径上确界的倒数:

$$\Phi_M(p,v) = \frac{1}{\sup\{R : \exists f \in \mathscr{O}(U_R, M), f(0) = p, f'(0) = v\}}. \tag{4}$$

利用函数 Φ_M, 以一种标准的方式定义距离:

$$\widetilde{k}_M(p,q)=\inf\int_0^1\Phi_M(\gamma(t),\gamma'(t))dt, \tag{5}$$

其中的下确界是对所有分段光滑路径 $\gamma:[0,1]\to M,\gamma(0)=p,\gamma(1)=q$ 取的. 罗伊登 (H. Royden) 曾证明 [1], 对于任意复流形 M, 这个半度量与小林半度量相同: $\widetilde{k}_M(p,q)=k_M(p,q)$.

* 设 $B=\{z\in\mathbb{C}^n:|z|<1\}$, $D=\{('0,z_n):|z_n|<1\}$; 证明, $\Phi_D(p,v)=\Phi_B(p,v)$, 其中 $p\in D,v=('0,z_n)$*

称复流形 M 为双曲的[2] 是说, 如果对于它, 其小林半度量 k_M 成为度量, 即当 $p\neq q$ 时 $k_M(p,q)\neq 0$. 根据定理 4 知, 双曲流形的类比具有非平凡的卡拉泰奥多里度量的流形类更宽. 在下一节中我们将考虑这些流形的基本性质.

§20. 双曲流形

59. 双曲性的判别法

我们考虑在流形和它的覆叠流形上的小林度量之间的关联.

引理 1. 设 M 为复流形, $\pi:\widetilde{M}\to M$ 为它的一个全纯覆叠 [3]; 于是对任意点 $p,q\in M$ 有

$$k_M(p,q)=\inf k_{\widetilde{M}}(\widetilde{p},\widetilde{q}), \tag{1}$$

其中对任意固定的 $\widetilde{p}\in\pi^{-1}(p)$, 下确界是对所有 $\widetilde{q}\in\pi^{-1}(q)$ 取的.

证明. 因为投射 π 为全纯映射, 故由其压缩性质 (前一目定理 2) 知 $k_M(p,q)\leqslant\inf\ k_{\widetilde{M}}(\widetilde{p},\widetilde{q})$. 设与引理断言相反, 存在 $\varepsilon>0$ 使得

$$k_M(p,q)+\varepsilon<\inf\ k_{\widetilde{M}}(\widetilde{p},\widetilde{q}). \tag{2}$$

于是存在链 $\sigma=\{f^j,\zeta_j',\zeta_j''\}_{j=1}^m$ 在 M 上从 p 到 q, 使得

$$\sum_{j=1}^m\rho(\zeta_j',\zeta_j'')<k_M(p,q)+\varepsilon. \tag{3}$$

---

[1]参看 H. L. Royden, *Remarks on the Kobayashi metric*, Several Complex Variables. Ⅱ (Proc. Internat. Conf., Univ. Maryland, College Park, MD, 1970), Lecture Notes in Math., vol. 185, Springer, Berlin, 1971, pp. 125-137.

[2]这个名词是由黎曼面理论提出的, 在那里所谓的双曲型指的是双全纯等价于单位圆盘的曲面, 而双全纯等价于复平面的被称做抛物型的. 在双曲型曲面上的不变度量是利用罗巴切夫斯基度量引入的, 它非平凡.

[3]这表明 $\widetilde{M}$ 也是复流形且 π 为全纯映射 (参看第 Ⅱ 章).

我们以 $\widetilde{f}^j : U \to \widetilde{M}$ 表示曲线 $f : U \to M$ 在覆叠 $\widetilde{M}$ 上的一个提升 [1] 使得 $\widetilde{f}^1(\zeta_1') = \widetilde{p}$, 其中的 $\widetilde{p}$ 为一个固定点, $\widetilde{f}^{j+1}(\zeta_{j+1}') = \widetilde{f}^j(\zeta_j''), j = 1, \cdots, m-1$. 于是 $\widetilde{q} = \widetilde{f}^m(\zeta_m'') \in \pi^{-1}(q)$, 且 $\widetilde{\sigma} = \{\widetilde{f}^j, \zeta_j', \zeta_j''\}_{j=1}^m$ 为 $\widetilde{M}$ 上从 $\widetilde{p}$ 到 $\widetilde{q}$ 的链. 由小林度量的定义及不等式 (3), 我们有

$$k_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) \leqslant \sum_{j=1}^m \rho(\zeta_j', \zeta_j'') < k_M(p, q) + \varepsilon,$$

这与 (2) 相矛盾. □

例题 (1). 在上半平面 $H = \{z = x + iy \in \mathbb{C}, y > 0\}$ 中的罗巴切夫斯基度量由公式 $ds_H^2 = \dfrac{dzd\bar{z}}{y^2}$ (参看卷 I 第 11 目) 给出, 而 H 覆叠了去掉一点的单位圆盘 $U_* = \{0 < |\zeta| < 1\}$, 其投射 $\zeta = \pi(z) = e^{2\pi iz}$. 代入 $dz = \dfrac{1}{2\pi i}\dfrac{d\zeta}{\zeta}$ 及 $y = \dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|\zeta|}$, 由引理 1 我们得出了去点圆盘的小林度量

$$ds_{U_*}^2 = \frac{d\zeta d\bar{\zeta}}{|\zeta|^2 \ln^2 \dfrac{1}{|\zeta|}}. \tag{4}$$

我们发现, 在此度量下圆 $\{|\zeta| = r\}$ 的长度等于 $2\pi \Big/ \ln\dfrac{1}{r}$, 而当 $r \to 0$ 时它趋于零.

定理 1. 复流形 M 为双曲的当且仅当它的全纯覆叠为双曲的.

证明. a) 设 M 为双曲的, 且 $k_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = 0$. 由引理于是有 $k_M(\pi(\widetilde{p}), \pi(\widetilde{q})) = 0$, 又由双曲性知 $\pi(\widetilde{p}) = \pi(\widetilde{q})$; 以 p 记此点. 设 $B = \{p' \in M : \ k_M(p', p) < \varepsilon\}$, 以及 $\widetilde{B}$ 为 $\widetilde{p}$ 的小邻域使得 $\pi : \widetilde{B} \to B$ 为双全纯 [2]. 在 $\widetilde{M}$ 上我们取从 $\widetilde{p}$ 到 $\widetilde{q}$ 的链 $\widetilde{\sigma} = \{\widetilde{f}^j, \zeta_j', \zeta_j''\}_{j=1}^m$ 使得

$$\sum_{j=1} \rho(\zeta_j', \zeta_j'') < \varepsilon \tag{5}$$

(我们有 $k_{\widetilde{M}}(\widetilde{p}, \widetilde{q}) = 0$).

我们在圆盘 U 内构造一段罗巴切夫斯基测地弧 $\widehat{\zeta_j'\,\zeta_j''}$ 并考虑 $\widetilde{M}$ 上的道路 $\widetilde{\gamma} = (\widetilde{f}^1(\widehat{\zeta_1'\zeta_1''}), \cdots, \widetilde{f}^m(\widehat{\zeta_m'\zeta_m''}))$, 而它们在 M 上的投影为 $\gamma = \pi \circ \widetilde{\gamma}$. 因为映射 $\pi \circ \widetilde{f}^i : U \to M$ 是压缩的, 故弧 $\pi \circ \widetilde{f}^j(\widehat{\zeta_j'\,\zeta_j''})$ 的 k_M – 长度不超过 $\rho(\zeta_j', \zeta_j'')$, 由于 (5), 这意味着道路 γ 的 k_M – 长度小于 ε. 因为道路 γ 的起点为 p, 故由此得出 $\gamma \subset B$.

但是道路 $\widetilde{\gamma}$ 的起点 $\widetilde{p}$ 属于 $\widetilde{B}$, 而 $\pi : \widetilde{B} \to B$ 为双全纯映射, 因而 $\widetilde{\gamma} \subset \widetilde{B}$. 道路 $\widetilde{\gamma}$ 的终点 $\widetilde{q}$ 被投射到 p, 而在 $\widetilde{B}$ 中只有一个点具有这样的投影, 即点 $\widetilde{p}$. 这表明 $\widetilde{q} = \widetilde{p}$, 于是我们证明了 $k_{\widetilde{M}}$ 是个度量, 即 $\widetilde{M}$ 为抛物型的.

---

[1] 这表明 $\pi \circ f^j = f^j$, 参看第 II 章. 像在第 17 目中那样可以证明曲线 f^j 的提升存在并由 $\widetilde{f}^j$ 的一个点所唯一决定.

[2] 在这里我们所用的事实是, 小林度量诱导了 M 的拓扑 (参看本章末尾的问题 14).

b) 设 $\widetilde{M}$ 为双曲的且 $k_M(p,q)=0$. 我们取 $\widetilde{p}\in\pi^{-1}(p)$; 于是由引理, 存在序列 $\widetilde{q}_\nu\in\pi^{-1}(q)$ 使得 $k_{\widetilde{M}}(\widetilde{q}_\nu,\widetilde{p})\to 0$. 由抛物性, 有 $\widetilde{q}_\nu\to\widetilde{p}$, 从而 $\pi(\widetilde{q}_\nu)\to p$. 但 $\pi(\widetilde{q}_\nu)=q$ 故 $q=p$, 因此 M 也为双曲型. □

例题.

(2) 考虑挖去 p 个不同点的球面 $\overline{\mathbb{C}}$:

$$D_p=\overline{\mathbb{C}}\backslash\{z_1,\cdots,z_p\}.$$

当 $p=1$ 和 2 时, 它的万有覆叠共形等价于 $\mathbb{C}$, 而当 $p>2$, 其等价于单位圆盘 U (参看第 21 目). 由定理 1 得到 D_p 为双曲型当且仅当 $p>2$.

我们还注意到, 在 D_p 中的卡拉泰奥多里度量对所有的 p 都是平凡的, 这是因为任意全纯映射 $f:D_p\to U$ 为常值映射, 这可根据有界函数的奇点可去定理和刘维尔定理得到.

(3) 设在 $\mathbb{P}^2$ 中给出了四条复直线 l_j $(j=1,\cdots,4)$, 它们处于一般位置, 并设 $a=l_1\bigcap l_2, b=l_3\bigcap l_4$ 为交点, 而 l_0 为一条通过 a 和 b 的复直线. 则流形 $M=\mathbb{P}^2\Big\backslash\bigcup\limits_{j=0}^{4}l_j$ 为双曲 [1].

事实上, 不失一般性可设 l_0 为无穷远直线, 从而 $\mathbb{P}^2\backslash l_0=\mathbb{C}^2, M=\mathbb{C}^2\Big\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{4}l_j$. 因为 $a,b\in l_0$, 即为无穷远点, 故 l_1 平行于 l_2, 而 l_3 平行于 l_4 (在 $\mathbb{C}^2$ 中), 而因为这些直线处于一般位置, 故 l_1 不平行于 l_3. 所以可以假设这些在 $\mathbb{C}^2$ 中的直线分别由方程 $z_1=0, z_1=1, z_2=0, z_2=1$ 给出. 但是这样一来 M 便是两片相同的双曲流形 $\mathbb{C}\backslash\{0,1\}=\overline{\mathbb{C}}\backslash\{0,1,\infty\}$ 的乘积, 从而也是双曲的. 这后面的论断由容易证明的不等式推导出来: 如果 M_1 和 M_2 为复流形, 而 $p_1,q_1\in M_1, p_2,q_2\in M_2$ 则

$$\begin{aligned}\max(k_{M_1}(p_1,q_1),k_{M_2}(p_2,q_2))&\leqslant k_{M_1\times M_2}((p_1,p_2),(q_1,q_2))\\&\leqslant k_{M_1}(p_1,q_1)+k_{M_2}(p_2,q_2).\end{aligned}\tag{6}$$

下面的结果是 P. Kiernan 得到的. 设 M 为复流形, 点 $p\in M, z=(z_1,\cdots,z_n)$, $z(p)=0$ 为 M 上在 p 点的邻域中的局部坐标, 而 $B_r=\{p'\in M:|z(p')|<r\}, B_1=B$; 又设 $U_\delta=\{|\zeta|<\delta\}, U_1=U$ 为 $\mathbb{C}$ 上的圆盘.

引理 2. 如果存在数 r 和 δ 使得对满足 $f(0)\in B_r$ 的所有全纯映射 $f:U\to M$ 有 $f(U_\delta)\subset B$, 则对所有 $q\in M\backslash B$, 小林距离 $k_M(p,q)>0$.

---

[1] P. Kiernan 得到这样的结果: 流形 $M=\mathbb{P}^n\Big\backslash\bigcup\limits_{j=1}^{2n+1}H_j$ 为双曲的, 其中 H_j 为处于一般位置的复超平面 (参看 P. Kiernan, *Hyperbolically lmbedded spaces and the big Picard theorem*, Math. Ann. 204 (1973), no. 3, 203-209.)

证明. 设 $q\in M\backslash B,\sigma=\{f^j,\zeta'_j,\zeta''_j\}_{j=1}^m$ 为 M 上从 p 到 q 的链; 进行在 U 中附加的罗巴切夫斯基运动, 我们则可假定所有的 $\zeta'_j=0$. 我们必须证明, 对所有这样的链, 长度 $|\sigma|=\sum\limits_{j=1}^{m}\rho(0,\zeta''_j)$ 有一个正常数的下界.

如果在链 σ 中存在点 $\zeta''_j\notin U_{\delta/2}$, 则 $|\sigma|\geqslant\rho(0,\delta/2)>0$, 因此, 只要考虑那些所有 $\zeta''_j\in U_{\delta/2}$ 的链就可以了. 我们记 $p_j=f^j(\zeta''_j)=f^{j+1}(0)$; 存在数 $l,1\leqslant l\leqslant m$ 使得 $p_1,\cdots,p_{i-1}\in B_r$ 而 $p_l\notin B_r$. 因为 $f'(0)=p_{l-1}\in B_r$ 而 $\zeta''_l\in U_\delta$, 故引理的条件 $f^l(\zeta'_l)=p_l\in B$, 于是 $p_l\in B\backslash B_r$. 我们选取常数 $\lambda>0$ 使得对所有 $\zeta\in U_{\delta/2}$, 罗巴切夫斯基距离 $\rho_U(0,\zeta)\geqslant\lambda\rho_{U_\delta}(0,\zeta)$. 因为 $f^j,1\leqslant j\leqslant l$ 全纯地将 U_δ 映到 B, 故由小林度量的压缩性质和三角不等式有

$$\sum_{j=1}^{m}\rho(0,\zeta''_j)\geqslant\lambda\sum_{j=1}^{l}\rho_{U_\delta}(0,\zeta''_j)\geqslant\lambda\sum_{j=1}^{l}k_B(p_{j-1},p_j)\geqslant\lambda k_B(p,p_l).$$

由于 k_B 为度量, 而 $p_l\in B\backslash B_r$, 故右端的量以一个正数为下界, 而且此数不依于链的选取. □

像以前那样, 设 $\mathscr{O}(U,M)$ 为单位圆盘 U 到复流形 M 的全纯映射的集合.

定理 2. 如果在诱导了 M 的拓扑的某个度量 d 下, 集合 $\mathscr{O}(U,M)$ 为等度连续, 则 M 为双曲流形. 反之, 如果 M 为双曲流形, 则 $\mathscr{O}(U,M)$ 在小林度量下为等度连续.

证明. 设 $\mathscr{O}(U,M)$ 在度量 d 下等度连续, 以及 $B^d_\varepsilon(p)=\{p'\in M:d(p',p)<\varepsilon\}$. 对任意不同于 p 的点 $q\in M$, 像引理 2 那样我们选取以 p 为中心的局部坐标 (使得 $q\notin B$), 并选取 $\varepsilon>0$ 使得 $B^d_{2\varepsilon}(p)\subset B$. 由等度连续性, 存在 $\delta>0$ 使得对任意满足 $f(0)\in B^d_\varepsilon(p)$ 的$f\in\mathscr{O}(U,M)$, 确实有 $f(U_\delta)\subset B^d_{2\varepsilon}(p)\subset B$. 如果再取 $r>0$ 使得 $B_r\subset B^d_\varepsilon(p)$, 则引理 2 的假设条件得到满足, 因此 $d_M(p,q)>0$. 我们便证明了 M 是双曲的.

定理的第二个断言来自的事实是: 全纯映射不增大小林度量. □

对于那些复流形 M, 其上的族 $\mathscr{O}(U,M)$ 对某个诱导了流形上拓扑的度量而言为等度连续的, 在文献中被称做*胎紧的* (tight). 我们说复流形 M 具有*蒙泰尔性质*是指, 如果族 $\mathscr{O}(U,M)$ 是*正规的*, 就是说可以从任意序列 $f^\nu\in\mathscr{O}(U,M)$ 中提取出子序列 f^{ν_j}, 它或者在 U 的紧子集上一致收敛, 或者紧发散 (后一个概念意味着对任意紧集 $K\subset U$ 和 $K'\subset M$, 存在 j_0 使得对所有 $j\geqslant j_0$ 有 $f^{\nu_j}(K)\bigcap K'=\varnothing$). 在文献中称具有这些性质的流形为*套紧的* (taut).

定理 3. 如果流形 M 具有蒙泰尔性质, 则它是双曲的.

证明. 如果 M 不是双曲的, 则存在不同的点 $p,q \in M$ 使得 $k_M(p,q)=0$. 利用引理 2, 在其中取 $r=1/2, \delta=1/\nu$; 按此引理, 对任意自然数 ν 存在映射 $f^\nu \in \mathscr{O}(U,M)$ 使得 $f^\nu(0)\in B_{1/2}$, 而 $f^\nu(U_{1/\nu}) \not\subset B$. 由序列 $\{f^\nu\}$ 中显然挑不出那样的子序列, 它在 U 的紧子集上一致收敛, 也没有紧收敛的子序列. 因此, M 不具有蒙泰尔性质. □

这个定理的逆命题不成立. 这可由某个定理推导出来; 为了叙述它, 我们需要下面的

定义. 设 $\overline{U}=\{|\zeta|\leqslant 1\}$ 为闭圆盘, $A_r=\{r\leqslant|z|\leqslant 1\}$ 为其中的一个圆环. 我们考虑 $\overline{U}$ 到复流形 M 全纯映射的任意序列 $\{f^\nu\}$, 并以 $f^\nu|_{A_r}$ 表示 f^ν 在圆环 A_r 上的限制, 其中 $r<1$. 我们说, M 满足圆盘条件是指如果 $f^\nu|_{A_r}$ 在 A_r 中一致收敛于映射 $f\in\mathscr{O}(A_r,M)$, 则可以得出 f^ν 在 $\overline{U}$ 中一致收敛于某个映射 $\widetilde{f}\in\mathscr{O}(\overline{U},M)$.

圆盘条件是某种形式的复凸性质: 由它可推出流形的伪凸性 (这是第 36 目中连续性原理的推广).

定理 4. 如果复流形 M 具有蒙泰尔性质, 则它满足圆盘条件.

证明. 我们取单位圆盘 $\overline{U}$, 其中的圆环 A_r 以及任意的序列 $f^\nu\in\mathscr{O}(\overline{U},M)$ 使得限制 $f^\nu|_{A_r}\to f\in\mathscr{O}(A_r,M)$. 因为 $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} f^\nu(A_r)$ 是 M 的紧子集, 故由序列 $\{f^\nu|_{A_r}\}$ 中不能挑出紧发散的子序. 但是这样一来, 按照蒙泰尔性质, 由它中可挑出在 $\overline{U}$ 中一致收敛于映射 $\widetilde{f}\in\mathscr{O}(\overline{U},M)$ 的子序. 因为 $\widetilde{f}|_{A_r}=f$ (因为在 A_r 上所有序列收敛于 f), 则由唯一性定理, $\widetilde{f}$ 不依赖于序列的选取. 但是由此便得出了结论: 所有序列在 $\overline{U}$ 中有 $f_\nu\to\widetilde{f}$, 从而满足了圆盘条件. □

例题 (4). 不是全纯域的 $\mathbb{C}^n$ 中的有界区域是个双曲流形,但是不满足圆盘条件, 从而不具有蒙泰尔性质, 即定理 3 的逆定理不成立.

称双曲流形 M 为**完全双曲**的是说, 如果在它上面的任何在小林度量 k_M 下的有界集合均为紧集. 对这样的流形, 定理 3 的逆定理成立.

定理 5. 完全双曲流形 M 具蒙泰尔性质.

证明. 因为 M 是双曲的, 故由定理 2 知族 $\mathscr{O}(U,M)$ 在度量 k_M 下等度连续. 设从序列 $f^\nu\in\mathscr{O}(U,M)$ 中不能挑出紧发散的序列. 于是存在集合 $K_0\Subset U, K_0'\Subset M$ 以及 $\{f^\nu\}$ 的子序列 (我们仍以 $\{f^\nu\}$ 记它), 使得对所有 ν 有 $f^\nu(K_0)\bigcap K_0'\neq\varnothing$. 因此存在序列 $\zeta_\nu\in K_0$, 使得 $f^\nu(\zeta_\nu)\in K_0'$ 对所有 ν 成立.

设 K 为 U 中一个任意紧集; 我们将证明, 存在在小林度量下有界的集合 K' 包含了所有 $f^\nu(K)$. 不失一般性, 可设 $K\supset K_0$; 由压缩性存在数 R_1 使得对所有 $\zeta\in K, \zeta_0\in K_0$ 和所有的 ν 有 $k_M(f^\nu(\zeta), f^\nu(\zeta_0))\leqslant R_1$. 另一方面, 对任意一个固定

的点 $p \in M$ 存在数 R_2, 使得 $k_M(p,p_0) \leqslant R_2$, 其中 p_0 为 K_0' 中所有的点. 于是对所有 $\zeta \in K$ 和所有 ν 有

$$\begin{aligned} k_M(f^\nu(\zeta),p) &\leqslant k_M(f^\nu(\zeta),f^\nu(\zeta_\nu)) + k_M(f^\nu(\zeta_\nu),p) \\ &\leqslant R_1 + R_2. \end{aligned}$$

故而, 作为 K' 可取中心在 p 和半径 $R_1 + R_2$ 的小林球.

我们已证明了序列 $\{f^\nu\}$ 不但等度连续, 而且在度量 k_M 下一致有界. 因为按所设的假设条件, 任意在此度量下有界的集合为紧, 故而完全像在卷 I 的第 39 目中对蒙泰尔定理的证明那样, 我们得出结论说, 从 $\{f^\nu\}$ 中可以挑出在 U 的紧子集上一致收敛的子序列. 我们便证明了, 族 $\mathscr{O}(U,M)$ 为正规, 即 M 具有蒙泰尔性质. □

结合定理 4 和定理 5 得到了

定理 6. 任意完全双曲流形都满足圆盘条件.

特别地, $\mathbb{C}^n$ 中任意的完全双曲流形的区域是全纯域.

* 称在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中的卡拉泰奥多里度量为完全是说, 如果在它上面任意 (在此度量下) 有界子集均为紧.设 D 是这样的区域; 证明, a) D 为全纯域, b) 任意全纯映射 $f: U\backslash\{0\} \to D$ 可以延拓为全纯映射 $U \to D$.*

最后我们来给出以曲率的语句表达的流形为双曲的条件. 为了阐述它我们需要一些定义. 称复流形 M 为埃尔米特的是说, 在它的切丛 $T(M) = \bigcup\limits_{p\in M} T_p(M)$ 的纤维上给出了正埃尔米特形式, 此形式局部地表示为

$$h_p(u,v) = \sum_{j,k} h_{jk}(p)dz_j(u)\overline{dz_k(v)}, \quad h_{jk} = \overline{h_{kj}}. \tag{7}$$

同时对 M 上任意光滑的向量场 $u(p)$ 和 $v(p)$, $h_p(u,v)$, 光滑地依赖于 p. 如果对应于 (7) 的微分形式

$$\omega = \frac{i}{2}\sum_{j,k} h_{jk}(p)dz_j \wedge d\bar{z}_k \tag{8}$$

为闭 (即 $d\omega = 0$), 则称 M 为凯勒 (Kähler) 流形. 也称 (7) 或 (8) 所定义的形式同样为凯勒的.

例题 (5). 在 $\mathbb{C}^n$ 的区域中有限型的伯格曼度量是凯勒的, 这是因为埃尔米特形式

$$ds^2 = \sum \frac{\partial^2 \ln\ k}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j d\bar{z}_k$$

为正定, 而相应的微分形式 $\omega = dd^c \ln\ K$ 为闭. 复射影空间 $\mathbb{P}^n$ 中的标准度量, 即富比尼 – 施图迪度量也是凯勒的, 这个度量由形式 $\omega = dd^c \ln|w|^2$ 定义, 其中 $w = (w_0, \cdots, w_n)$ 为齐次坐标 (参看第 19 目).

埃尔米特流形 M 上两点的距离像通常那样给出. 逐段光滑道路 $\gamma: I \to M$ 的长度由公式

$$|\gamma| = \int_0^1 \sqrt{h_{\gamma(t)}(\gamma_t', \gamma_t')}dt \tag{9}$$

定义, 其中 I 为区间 $[0,1]$, 而距离 $d(p,q)$ 作为在 M 上连接点 p 和 q 的逐段光滑路径长度的下确界. 因为 $h(\gamma', \gamma') = g(\gamma', \gamma')$, 其中 $g = Re\ h$, 故这个距离与度量 g 所定义的黎曼距离相同.

设给出了埃尔米特流形 M 和全纯曲线 $\gamma: U \to M$, 其中 $U = \{|\zeta| < R\}$ 为复平面上的圆盘. 设 $\zeta_0 \in U$ 为 γ 的非临界点, $z = z(p)$ 为 M 在点 $p_0 = \gamma(\zeta_0)$ 的邻域中的局部坐标, 于是度量 (7) 在 $\gamma(U)$ 上诱导了在 p_0 的邻域中的埃尔米特度量

$$h_p|_\gamma = \sum_{j,k} h_{jk} \circ \gamma(\zeta) \cdot \gamma_j'(\zeta)\overline{\gamma_k'(\zeta)}d\zeta d\bar{\zeta} = H_\gamma(\zeta)d\zeta d\bar{\zeta}, \tag{10}$$

其中 $H_\gamma(\zeta_0) > 0$. 将 $\gamma(U)$ 看作实二维曲面, 我们则可以在点 p_0 计算它的高斯曲率, 其公式 [1] 为

$$K_\gamma(p_0) = -\frac{2}{H_\gamma(\zeta_0)} \left.\frac{\partial^2 \ln\ H_\gamma}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}\right|_{\zeta_0}. \tag{11}$$

在曲线 γ 上参数的共形变换 $\zeta = \zeta(\omega)$ 下, H_γ 被乘以因子 $|\zeta'(\omega)|^2$, 并且这同一个因子也出现在把 $\dfrac{\partial^2 \ln\ H_\gamma}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}}$ 转换为对 ω 和 $\bar{\omega}$ 求导数中, 所以 $K_\gamma(p_0)$ 对这样的变换不变. 我们称这个量为*曲线 γ 在点 p_0 的全纯曲率*.

定义. 称埃尔米特流形 M 的*全纯曲率不超过常数* k 是说对所有全纯曲线 $\gamma: U \to M$ 在所有非临界点 ζ_0 的曲率 $K_\gamma(\gamma(\zeta_0)) \leqslant k$.

如果 M 为复一维流形 (即全纯曲线), 则曲率 K_M 只与点 p 相关. 特别, 对于具罗巴切夫斯基度量的单位圆盘有度量 $ds^2 = \dfrac{d\zeta d\bar{\zeta}}{(1-|\zeta|^2)^2}$, 即 $H = (1-|\zeta|^2)^{-2}$ 并根据公式 (11) 得到 $K \equiv -4$ 为负常数. 对于 $\mathbb{C}$, 其具有球面度量, 从而 $H = (1+|\zeta|^2)^{-2}, K \equiv 4$ 为正常数.

我们需要不变形式的施瓦茨引理的一个推广, 按照它, 对任意全纯映射 $f: U \to U$, 从单位圆盘到自身, 有

$$\frac{|df|}{1-|f(\zeta)|^2} \leqslant \frac{|d\zeta|}{1-|\zeta|^2} \tag{12}$$

(参看第 57 目的公式 (7), 在这里我们给出了它的一个不同形式). 如果以 $ds_U^2 = \dfrac{|d\zeta|^2}{(1-|\zeta|^2)^2}$ 表示单位圆盘的罗巴切夫斯基度量, 另外, $f^*(ds_U^2) = \dfrac{|df|^2}{(1-|f(\zeta)|^2)^2}$ 为它

---

[1] 显然, 在 $f(U)$ 上坐标 $\xi = \mathrm{Re}\,\zeta$ 和 $\eta = \mathrm{Im}\,\zeta$ 在点 p_0 邻域中是等距的, 而 $\dfrac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\bar{\zeta}} = \dfrac{1}{4}\nabla$, 其中 ∇ 为拉普拉斯算子, 故而 (11) 与众所周知的公式相同.

在映射 f 下的原像 (一般说来, $f^*(ds_U^2)$ 只是一个半度量, 这是因为 $|df|^2 = |f'(\zeta)|^2|d\zeta|^2$ 在 f 的临界点取零值), 故 (12) 可改写为 $f^*(ds_U^2) \leqslant ds_U^2$. 我们所谈及的这个推广是由阿尔福斯 (Ahlfors) 得到的.

引理 (阿尔福斯). 设 M 为埃尔米特流形, 其具度量 ds_M^2, 且其全纯曲率不超过负常数 $-k$. 于是对任意全纯映射 $f: U \to M$, 在任意点 $\zeta \in U$ 有

$$f^*(ds_M^2) \leqslant \frac{4}{k} ds_U^2. \tag{13}$$

其中 $f^*(ds_M^2)$ 为 ds_M^2 在映射 f 下的原像, 而 ds_U^2 为单位圆盘的罗巴切夫斯基度量[1)].

证明. (13) 中的形式成比例: $f^*(ds_M^2) = u(\zeta)ds_U^2$, 其中 $u \geqslant 0$ 为在 U 中的光滑函数, 从而我们需要证明在任意点 $\zeta \in U$ 有 $u(\zeta) \leqslant 4/k$. 我们取定一个点 $\zeta_0 \in U$, 任意数 r 满足 $|\zeta_0| < r < 1$, 并令 $ds_r^2 = r^2|d\zeta|^2/(r^2 - |\zeta|^2)^2, u_r = f^*(ds_M^2)/ds_r^2$. 因为当 $r \to 1$ 时 $u_r(\zeta_0) \to u(\zeta_0)$, 故我们只要证明 $u_r(\zeta_0) \leqslant 4/k$ 即可.

如果令 $f^*(ds_M^2) = H|d\zeta|^2$, 则函数 H 在圆盘 $\overline{U}_r = \{|\zeta| \leqslant r\}$ 中有界, 而 $H_r = \dfrac{r^2}{(r^2 - |\zeta|^2)^2}$ 当 $|\zeta| \to r$ 时趋向于 ∞, 因此, 当 $|\zeta| \to r$ 时 $u_r = H/H_r \to 0$, 从而达到 U_r 内部的极大值. 只要对极大点证明想要的这个不等式就可以了, 故而我们可以假定 ζ_0 为极大点.

如果 $u_r(\zeta_0) = 0$, 则这个不等式平凡, 如果 $u_r(\zeta_0) > 0$, 则 ζ_0 为曲线 f 的非临界点, 而因为有 $f^*(ds_M^2) = H|d\zeta|^2$, 故而根据公式 (11), 曲线 f 在点 $p_0 = f(\zeta_0)$ 的曲率为

$$K_f(p_0) = -\frac{2}{H(\zeta_0)} \left.\frac{\partial^2 \ln H}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}\right|_{\zeta_0} \leqslant -k$$

(我们利用了引理的假设条件). 另一方面, 因为在圆盘 U 中的罗巴切夫斯基几何曲率等于 -4, 故 $\dfrac{2}{H_r(\zeta_0)} \left.\dfrac{\partial^2 \ln H_r}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}\right|_{\zeta_0} = 4$, 从而

$$\left.\frac{\partial^2 \ln u_r}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}\right|_{\zeta_0} = \left.\frac{\partial^2 \ln H}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}\right|_{\zeta_0} - \left.\frac{\partial^2 \ln H_r}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}\right|_{\zeta_0} \geqslant \frac{kH(\zeta_0)}{2} - 2H_r(\zeta_0).$$

但是由分析中的已知结果知道, 在二元实函数的极大点, 它的拉普拉斯算子非负, 故而最后面的这个不等式的左端 $\leqslant 0$, 从而 $kH(\zeta_0) - 4H_r(\zeta_0) \leqslant 0$, 而因为有 $H(\zeta_0) > 0$, 故 $u_r(\zeta_0) = H(\zeta_0)/H_r(\zeta_0) \leqslant 4/k$. □

我们已接近目标了: 以曲率术语表达的流形的双曲性条件现在可以十分简单地得到了.

[1)] 如果 $M = U$, 而 ds_U^2 为罗巴切夫斯基度量, 则可以取 $k = 4$, 从而 (13) 变成为 (12) , 这表明阿尔福斯引理实际上推广了在不变形式下的施瓦茨引理.

定理 7. 一个全纯曲率不超过负常数 $-k$ 的埃尔米特流形 M 是双曲的.

证明. 由公式 (10) 和 (11) 看出, 乘度量 ds_M^2 以适当的正常数, 则可假定 $k=4$. 根据阿尔福斯引理, 于是对单位圆盘 U 到 M 的任意全纯映射 f, 有 $f^*(ds_M^2) \leqslant ds_U^2$, 其中 ds_U^2 为罗巴切夫斯基度量. 如果 d 为在度量 ds_M^2 下 M 上的距离, 而 ρ 为罗巴切夫斯基距离, 我们则有 $d(f(a), f(b)) \leqslant \rho(a,b)$ 对任意点 $a, b \in U$ 成立. 因此, 距离 d 在全纯映射 $U \to M$ 下不增大, 并根据第 58 目的定理 3 , 对任意, $p, q \in M$, 小林距离 $k_M(p,q) \geqslant d(p,q)$, 因为 d 是度量, 故当 $p \neq q$ 时 $d(p,q)$ 即 $k_M(p,q) \neq 0$.

60. 皮卡 (Picard) 定理的推广

由双曲性的定义立即得出

定理 1. 如果 N 为具平凡小林度量的流形, 而 M 为双曲流形, 则任意全纯映射 $f: N \to M$ 为常值.

证明. 设 p, q 为 N 的任意两点: 因为 f 不增大距离, 我们有 $k_N(p,q)=0$, 故 $k_M(f(p), f(q))=0$. 由 M 的双曲性得出 $f(p)=f(q)$. □

特别地, 任意全纯映射 $f: \mathbb{C}^m \to M$ 在 M 为双曲时为常值. 当 $m=1$ 时, 这个论断可以这样表达: 双曲流形不包含整曲线. 逆论断不成立.

例题. 考虑流形

$$M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_1 z_2| < 1\} \backslash \{(0, z_2) : |z_2| \geqslant 1\}; \tag{1}$$

映射 $h:(z_1,z_2) \mapsto (z_1, z_1 z_2)$ 把 M 映到双圆盘 $\{|w_1| < 1, |w_2| < 1\}$, 并且除去 $\{z_1 = 0\}$ 外处处相互一一. 对任意全纯映射 $f: \mathbb{C} \to M$, 由刘维尔定理(第 5 目)映射 $h \circ f =$ 常值, 因此,或者 f 为常值, 或者$f: \mathbb{C} \to M \bigcap \{z_1 = 0\}$. 但是后面的一个集合是圆盘 $\{z_2 \in \mathbb{C} : |z_2| < 1\}$, 从而又有 $f =$ 常值. 故 M 不含有整曲线.

但是 M 并不是双曲流形. 事实上, 设 $p = (0,b) \in M, b \neq 0$ 以及 $p_\nu = (1/\nu, b) \in M, \nu = 1, 2, \cdots$; 我们有 $k_M(0,p) = \lim\limits_{\nu \to \infty} k_M(0, p_\nu)$. 映射

$$f: \zeta \mapsto (a_\nu \zeta/\nu, a_\nu b \zeta),$$

其中 $|a_\nu| = \min(\nu, \sqrt{\nu/|b|})$, 把单位圆盘 $U = \{|\zeta| < 1\}$ 变到 M, 且 $f(1/a_\nu) = p_\nu$. 因此由小林度量的定义, 当 $\nu \to \infty$ 时

$$k_M(0, p_\nu) \leqslant \rho(0, 1/a_\nu) = \ln \frac{|a_\nu| + 1}{|a_\nu| - 1} \to 0,$$

从而 $k_M(0,p) = 0$.

定理 1 可以看作是皮卡小定理的推广, 后者断言 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 去掉两个点的全纯映射为常值 (参看卷 I 的第 44 目). 事实上, 如我们已经看到的, 去掉两个点的 $\mathbb{C}$, 或者去掉三个点的 $\overline{\mathbb{C}}$ 是个双曲流形.

我们现在来进行另一个推广. 法图的例子 (第 11 目) 指出, 不能指望到去掉任意多个点的 $\mathbb{C}^n$, 在 $n>1$ 时的全纯映射都能退化. 但是当 $n=1$ 时点 $\{z=a\}$ 也可以被看作余维 1 的复集合即复 "超平面". 因为 $\overline{\mathbb{C}}$ 可以等同复射影直线 $\mathbb{P}$, 故皮卡小定理让我们有如此的论述: 任意从 $\mathbb{C}$ 到去掉三个 "超平面" 的 $\mathbb{P}$ 的全纯映射为常值. 以定理的这种叙述方式, 我们可直接将其推广到流形情形:

定理 2. 任意全纯映射 $f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{P}^n\backslash\{2n+1$ 个处于一般位置超平面$\}$为常值.

定理 2 由格林 (Green) 以一个有趣定理的推论得到, 我们现在来描述它的证明想法 [1]. 首先我们注意到经典的博雷尔 (Borel) 引理的推广: *如果整函数 $g_j:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ $(j=0,\cdots,n)$ 恒等地满足关系式*

$$e^{g_0(z)}+\cdots+e^{g_n(z)}\equiv 0, \tag{2}$$

则在差函数 g_j-g_k $(j\neq k)$ 中至少有一个为常数.

考虑 g_j 在通过原点 $0\in\mathbb{C}^m$ 的复直线上的限制, 则此推广可被化到 $m=1$ 的经典情形 (卷 I 第 Ⅳ 章的问题 20): 对每条这样的直线 l 存在一对指标 $(j,k), j\neq k$ 使得 $(g_j-g_k)|_l$ 等于常值, 它不依赖于 l (等于 $g_j(0)-g_k(0)$). 因为直线 l 有无穷多条, 而偶对 (j,k) 只有有限个, 故存在偶对 (j,k) 使得对直线 l 的一个无穷集合有 $(g_j-g_k)|_l=$ 常数, 而由唯一性定理可以最后得到 $g_j-g_k=$ 常数.

引理. 在全纯映射 $f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{P}^n\backslash\ \{n+2$ 个不同超平面$\}$ 下, 像 $f(\mathbb{C}^m)$ 位于 $\mathbb{P}^n$ 的一个真线性子空间中.

证明. 我们把那些去掉的平面以齐次方程 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_{jk}z_k=0$ $(j=1,\cdots,n+2)$ 描述, 另外映射 f 也以齐次坐标表示: $f=(f_0,\cdots,f_n)$. 我们有了 $n+2$ 个不取零的整函数 $\sum\limits_{k=0}^{n}a_{jk}f_k$, 因此它们可以表示为

$$\sum_{k=0}^{n}a_{jk}f_k=e^{g_j}, j=1,\cdots,n+2, \tag{3}$$

其中 $g_j:\mathbb{C}^m\to\mathbb{C}$ 为整函数, 向量 $a^j=(a_{j_0},\cdots,a_{j_n})\in\mathbb{C}^{n+1}$ 为线性相关, 这是因为它们有 $n+2$ 个, 故而存在不全为零的 λ_j, 使得 $\sum\limits_{j=1}^{n+2}\lambda_j a_{jk}=0$ $(k=0,\cdots,n)$. 以 f_k 乘

[1] 定理 2 也可以由定理 1 根据 Kierman 的结果得到, 它已在第 59 目的例题 3 脚注中引述: 流形 $\mathbb{P}^n\backslash\ \{2n+1$ 个处一般位置的超平面$\}$ 是双曲的. 另外, 这个定理实质上已包含在博雷尔 (Borel) 在 1898 年的工作中.

以这些式子并按 k 相加, 并考虑到 (3) 则得到了 $\sum_{j=1}^{n+2}\lambda_j e^{g_j}=0$, 记 $J=\{j:\lambda_j\neq 0\}$; 这个集合非空, 并且最后面的那个恒等式可改写为 $\sum_{j\in J} e^{g_j+\ln\lambda_j}\equiv 0$. 根据博雷尔引理存在 $j_1, j_2, \in J, j_1\neq j_2$ 使得 $g_{j_1}-g_{j_2}=c=$ 常数, 从而 $e^{g_{j_1}}=e^c e^{g_{j_2}}$. 由 (3) 我们于是得到

$$\sum_{k=0}^{n}\left(a_{j_1k}-e^c a_{j_2k}\right)f_k\equiv 0, \tag{4}$$

同时不是所有括号内都等于零, 这是因为已去掉的不同平面. 我们得到了 f_k 间的非平凡的线性关系. □

定理 3 (格林). 在全纯映射 $f:\mathbb{C}^m\to\mathbb{P}^n\setminus\{n+k$ 个处于一般位置的超平面$\}$ 下, 像 $f(\mathbb{C}^m)$ 位于 $\mathbb{P}^n$ 的一个线性子空间中, 其维数等于 n/k 的整数部分.

证明. 我们来解释在 $n=3$ 这种特殊情形下的证明思想. 在这里的定理可化成两个命题:

a) 如果 $k=2$, 即 f 避开了 5 个处于一般位置的超平面 $H_1,\cdots,H_5$, 于是 $f(\mathbb{C}^m)$ 属于一条复直线 ($[3/2]=1$).

b) 如果 $k=4$, 即 f 避开了 7 个处于一般位置的超平面 $H_1\cdots,H_7$, 则 $f=$ 常值 ($[3/4]=0$ [1])).

a) **的证明.** 由 ($n=3$ 时的) 引理得到 $f(\mathbb{C}^m)$ 位于复二维的平面 Π 中 ($\mathbb{P}^3$ 中的超平面). 我们要证明, 那些缺失的平面 H_j 与 Π 交于至少四条复直线. 因为 H_j 处于一般位置, 故它们中没有三个交于一条直线, 没有四个交于一点. H_j 与 Π 交于三条直线的情形只可能发生在 Π 包含了两对 H_j 的交线的情形 (图 51). 设其中的一对为 H_1 和 H_2, 交线为 $l_1=H_1\bigcap H_2$, 第二对中则不可能是 H_1 或 H_2, 这是因为这样一来两对平面的公共平面就会与 Π 重合, 而因为 Π 包含了 $f(\mathbb{C}^m)$, 这是不可能的. 设第二对平面为 H_3, H_4 以及 $H_3\bigcap H_4=l_2$; 于是直线 l_1 和 l_2 有公共交点 (因为它们在射影平面 Π 中), 因为这个点是四个 H_j 的交点, 这也是不可能的.

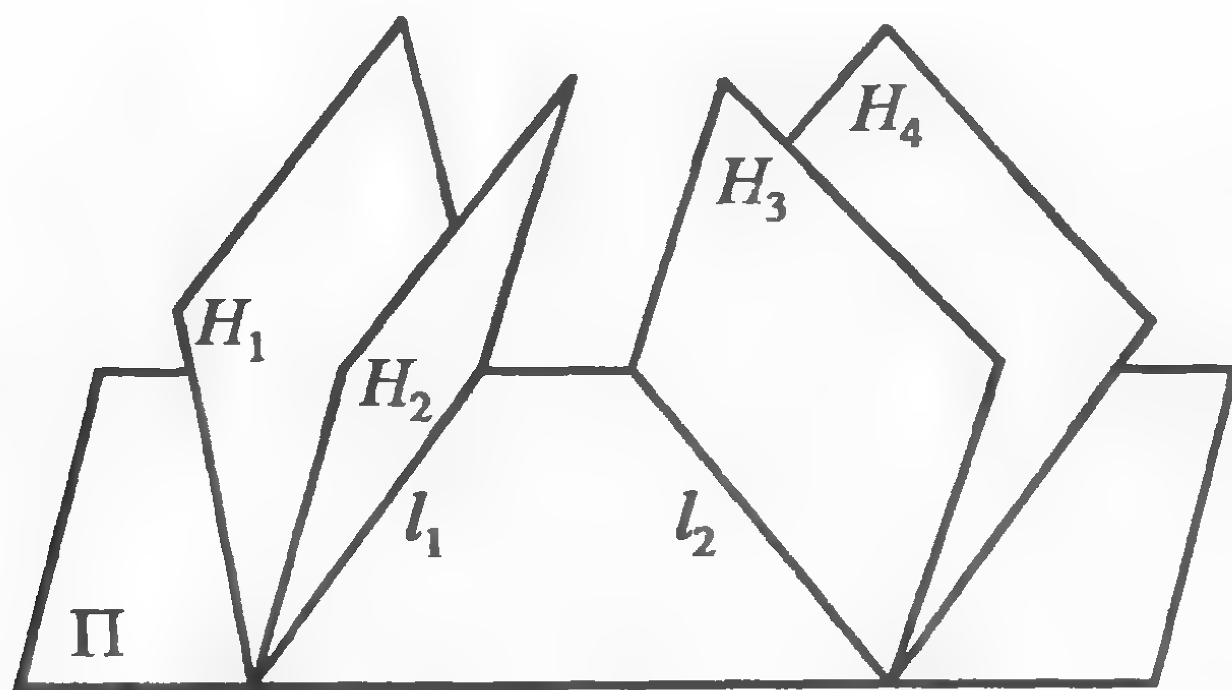


图 51

[1])在 $k=1$ 的情形断言是平凡的, 这是因为 $[n/k]=n$, 情形 $k=3$ 较 a) 更弱, 此时 $[3/3]=1$, 而 $k>4$ 的情形弱于 b), 这里 $[3/k]=0$.

因此, f 将 $\mathbb{C}^m$ 映到去掉四条不同直线的平面 $\Pi=\mathbb{P}^2$ 中. 根据同一引理 ($n=2$ 的情形) 我们最后得到: $f(\mathbb{C}^m)$ 位于复射影曲线中.

b) **的证明.** 由断言 a) 知, $f(\mathbb{C}^m)$ 属于复射影直线 L. 这条直线与缺失的那些超平面 H_j 的交不少于三个点. 事实上, 最小的交点数发生在 L 通过两组三个 H_j 的交点时; 设 $a=H_1\bigcap H_2\bigcap H_3, b=H_4\bigcap H_5\bigcap H_6$ (不可能有一个平面在不同的三元组中). 剩下的另一个平面 H_7, 由于处于一般位置的假定, 交 L 于不同于 a 和 b 的点 (图 52).

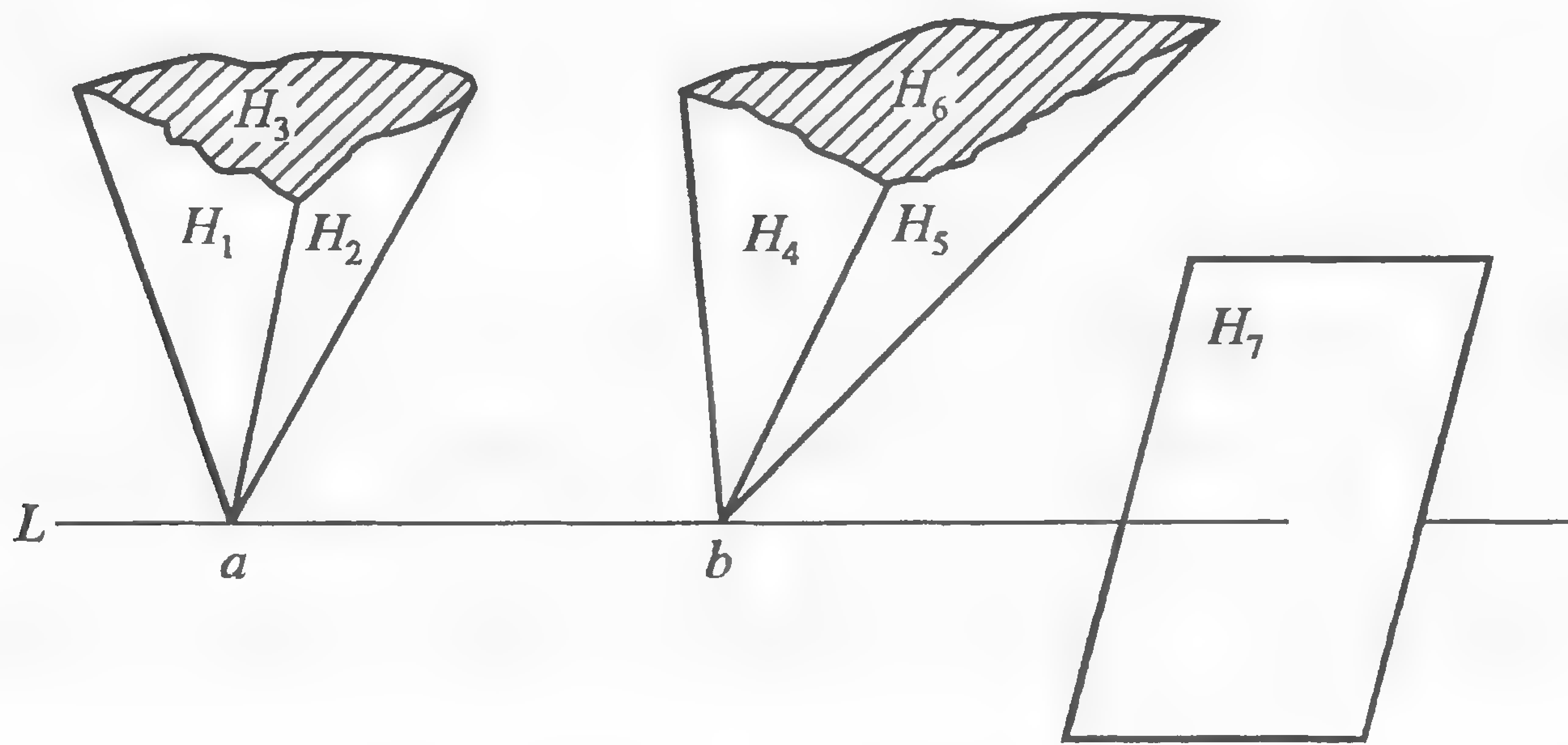


图 52

现在可以对 f 在任意复直线 $l\subset\mathbb{C}^m$ 的限制应用关于单变函数的皮卡定理: $f|_l$ 映 l 到去掉了三个点的直线 L 中, 从而为常值. 但这便有 $f=$ 常值. □

在 n 为任意的情形, 证明所依据的是同一个思路, 但是要求具有组合特性的更多的讨论 [1]. 定理 2 是定理 3 的特殊情形: 如果去掉超平面的个数等于 $2n+1$ 个, 则 $k=n+1$, 则 $[n/k]=0$, 从而 $f=$ 常值.

转向对皮卡大定理的推广, 对单变函数的这个定理可以叙述为: 去掉一个点的圆盘 $U_*=\{0<|\zeta|<1\}$ 到去掉三个点的闭平面 $\mathbb{P}$ 的任意全纯映射可延拓为圆盘 U 到 $\mathbb{P}$ 的全纯映射 [2]. 与皮卡小定理不同, 大定理不能推广到任意双曲流形上.

例题. 流形

$$M=\{[z_0,z_1,z_2]\in\mathbb{P}^2: z_0=1, 0<|z_1|<1, |z_2|<|e^{1/z_1}|\}$$

为双曲的, 这是因为映射 $(1,z_1,z_2)\mapsto(z_1,z_2e^{-1/z_1})$ 双全纯地把它变换为双曲流形 $U_*\times U$. 但是以公式 $f(\zeta)=[1,\zeta,\frac{1}{2}e^{1/\zeta}]$ 定义的映射 $f:U_*\to M$ 却不能全纯地延拓到 U 上.

[1]参看 M. Green, *Holomorphic maps into complex projective space omitting hyperplanes*, Trans. Amer. Math. Soc. **169** (1972), 89-103.

[2]这个叙述等价于卷 I 的第 44 目中的, 这是因为如果 f 被延拓为从 U 到 $\mathbb{P}$ 的全纯映射, 则 $\zeta=0$ 是个可去奇点或者极点, 而不可能是 f 的本性奇点.

但是成立

定理 4 (克瓦克 (Kwack)). 如果 M 为双曲流形, 则全纯映射 $f: U_* \to M$ 或者可延拓到 U, 或者它在点 $\zeta = 0$ 的极限集中不包含 M 中的点.

证明. 假设 f 在点 $\zeta = 0$ 的极限集包含了点 $p_0 \in M$, 即存在 U_* 中的点序 $\zeta_\nu \to 0$ 使其 $f(\zeta_\nu) \to p_0$. 以 V 表示 p_0 的邻域, 在 M 上以 p_0 为中心的局部坐标下它可描述为 $\{p \in M : |z(p)| < \varepsilon\}$, 又记 $W = \{p \in M : |z(p)| < \varepsilon/2\}$; 设 $r_\nu = |\zeta_\nu|$, 以及 $\gamma_\nu = \{|\zeta| = r_\nu\}$. 因为 $f(\gamma_\nu)$ 的小林直径 $\to p_0$ (由于在第 59 目开头的例题和压缩性), 故当 $\nu \geqslant \nu_0$ 时有 $f(\gamma_\nu) \subset W$, 同时不失一般性可设 $\nu_0 = 1$ 以及 γ_ν 递降地趋向于零.

只要证明可连续地延拓 f 到点 $\zeta = 0$ 即可, 即对充分小的 $\delta, \{0 < |\zeta| < \delta\}$ 的像属于 W. 如果只有有限个圆环 $\{r_{\nu+1} < |\zeta| < r_\nu\}$ 的像超出 W 之外, 则一切都证好了; 如果设这样的圆环有无穷多个, 我们则要导出矛盾. 过渡到子序列, 我们便可假定所有这些像超出 W 之外.

以 $A_\nu = \{\alpha_\nu < |\zeta| < \beta_\nu\}$ 记满足 $\alpha_\nu < r_\nu < \beta_\nu$ 及 $f(A_\nu) \subset W$ 的圆环中的最大者, 而以 $\gamma'_\nu = \{|\zeta| = \beta_\nu\}, \gamma''_\nu = \{|\zeta| = \alpha_\nu\}$ 为边界的圆 (它们的像包含在 $\overline{W}$ 中而不是 W 中). 因为 $f(\gamma'_\nu)$ 和 $f(\gamma''_\nu)$ 的直径趋向于零 (参看第 59 目引理 1 后面的例子), 故而如有必要可过渡到子序列上, 从而假定 $f(\gamma'_\nu) \to p', f(\gamma''_\nu) \to p''$. 点 $p', p'' \in \partial W$ 从而不同于 p_0; 不失一般性, 可以认为 $z_1(p')$ 和 $z_1(p'')$ 不同于 $z_1(p_0) = 0$($z_1(p)$ 表示 $z(p)$ 的第一个坐标).

在集合 $f^{-1}(W)$ 上, 映射 f 在局部坐标下表示为形式 $(f_1, \cdots, f_n)$, 特别地, 对所有 ν 定义了全纯映射 $f_1 : A_\nu \to \mathbb{C}$. 在 ν 充分大时, 像 $f_1(\gamma_\nu)$ 落在 $z_1 = 0$ 的一个邻域中, 它不与点 $z_1(p')$ 和 $z_1(p'')$ 的邻域相交, 后面的这两个邻域各自包含了 $f_1(\gamma'_\nu)$ 和 $f_1(\gamma''_\nu)$. 这两个集合的并构成了 $f_1(\partial A_\nu)$, 而由卷 I 第35目的保持区域原理知, 在映射 f_1 下, A_ν 的内点不可能变到 $\partial f_1(A_\nu)$ 中, 即 $\partial f_1(A_\nu) \subset f(\partial A_\nu)$. 另一方面, $f_1(A_\nu)$ 为有界区域并包含了 $f_1(\gamma_\nu)$, 而在我们的有界区域的条件中, 却不存在其边缘属于并集 $f_1(\gamma'_\nu) \bigcup f_1(\gamma''_\nu)$ 并且包含了 $f_1(\gamma_\nu)$ 的 $f_1(A_\nu)$, 这引出了矛盾. □

特别地, 当 $M = \mathbb{P}\backslash\{3\text{个点}\}$ 时由定理4得到了对单变的皮卡大定理. 事实上, 在这种情形下作为连通的极限集必定化为去掉的那些点中的一个, 从而 f 连续地延拓到点 $\zeta = 0$.

如果 M 为紧双曲流形, 则任意全纯映射 $f: U_* \to M$ 延拓为 $\mathscr{O}(U, M)$ 中的映射, 这是因为在这里定理 4 的第二种可能性不可能出现.

最后我们来描述不久前由格里菲思 (P. Griffiths) 提出的基于里奇 (Ricci) 曲率的方法. 为了定义后者, 我们称一个双阶 (n, n) 形式为 n 维复流形 M 的欧几里得体

积形式是说它在局部坐标 $z=(z_1,\cdots,z_n)$ 下具有形式

$$\Phi=\prod_{k=1}^{n}\frac{i}{2}dz_k\wedge d\bar{z}_k \tag{5}$$

(这里的乘积符号是外积, 引入的因子 $\frac{i}{2}$ 是为了使此形式为实的). 正如熟知的, 所有在流形上最高次的形式相互成比例 (参看第 14 目), 而 M 上那些与 Φ 相差一个正因子的 (n,n) – 形式, 即形式

$$\Omega=\lambda\Phi,\quad \lambda>0 \tag{6}$$

被称做正的. 每个光滑的正形式 Ω 都被称做流形 M 的*体积形式*, 而双阶为 (1,1) 的形式

$$\mathrm{Ric}\ \Omega=dd^c\ln\ \lambda \tag{7}$$

被称做它的*里奇形式*.

因为在全纯的坐标变换下, 形式 Φ 从而系数 λ 被乘上了全纯函数 $J\neq 0$ (即变换的雅可比) 的模的平方, 而 $dd^c\ln|J|^2=0$, 故而里奇形式在 M 上有整体的定义并不依赖于局部坐标的选取. 如果 $\mathrm{Ric}\,\Omega$ 对应于*正定*的埃尔米特形式,则称具体积形式 Ω 的流形 M 具有*负里奇曲率*.

例题.

(1) 对于具度量 $ds^2=Hdzd\bar{z}$ 的复一维埃尔米特流形, 其体积元 $\Omega=\frac{i}{2}Hdz\wedge d\bar{z}$, 而 $\Phi=\frac{i}{2}dz\wedge d\bar{z}$. 故而在这种情形中 $\lambda=H$, 而 $\mathrm{Ric}\ \Omega=\frac{i}{2}\frac{\partial^2\ln H}{\partial z\partial\bar{z}}dz\wedge d\bar{z}$. 对应的埃尔米特形式为正定当且仅当度量 ds^2 的高斯曲率为负 (参看第 59 目的公式 (11)), 这证实了最后面的那个定义的合理性.

(2) 在 $\mathbb{C}^n$ 中的多圆盘 $\{\|z\|<R\}$ 的罗巴切夫斯基度量被定义为埃尔米特形式 $ds^2=\sum_{k=1}^{n}\frac{R^2|dz_k|^2}{(R^2-|z_k|^2)^2}$ (差一个因子等于伯格曼度量, 参看第 56 目). 对应于它的体积形式为 $\Omega=\prod_{k=1}^{n}\frac{iR^2dz_k\wedge d\bar{z}_k}{2(R^2-|z_k|^2)^2}=\frac{\omega^n}{n!}$, 其中 ω 为对应于 ds^2 的微分形式, 而初等的计算表明里奇形式为

$$\mathrm{Ric}\ \Omega=2\omega. \tag{8}$$

这个度量的里奇曲率因而为负.

在去掉一点的圆盘 $U_*=\{0<|z|<1\}$ 中, 小林度量 $ds^2=\frac{|dz|^2}{|z|^2\ln^2 1/|z|}$ (参看第 59 目公式 (4)), 对于对应的形式 ω 我们也有 $\mathrm{Ric}\ \Omega=2\omega$. 因而在这个同一的度量下,

对于部分去点多圆盘 $U_*^m \times U^{n-m}$ 的体积形式有

$$\Omega = \prod_{k=1}^{m} \frac{idz_k \wedge d\bar{z}_k}{2|z_k|^2 \ln^2 |z_k|^2} \wedge \prod_{k=m+1}^{n} \frac{idz_k \wedge d\bar{z}_k}{2(1-|z_k|^2)^2} \tag{9}$$

并像前面那样, 对它有 $\mathrm{Ric}\,\Omega = 2\omega$.

(3) 我们来计算 $\mathbb{P}^n$ 中富比尼 – 施图迪度量的体积公式. 在区域 $U_0 = \{[w] \in \mathbb{P}^n : w_0 \neq 0\}$ 中以 $z_j = w_j/w_0\ (j = 1, \cdots, n)$ 为局部坐标, 这时富比尼 – 施图迪形式 $\omega = dd^c \ln\ \rho$, 其中 $\rho = 1 + |z|^2$ (参看第 19 目), 它可以重写为

$$\omega = \frac{1}{\rho^2}(\rho\varphi - \frac{1}{2}\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho),$$

其中 $\varphi = dd^c|z|^2$. 不难看出, $\varphi^n = n!\Phi$, 其中 Φ 为欧几里得体积形式 (5), 并且当 $k > 1$ 时 $(\partial\rho \wedge \partial\bar{\rho})^k = 0$ (所有的幂表示外积幂). 故所考虑的度量的体积形式为

$$\Omega = \omega^n = \left(\frac{\varphi}{\rho} - \frac{i\partial\rho \wedge \bar{\partial}\rho}{2\rho^2}\right)^n = \frac{n!\Phi}{\rho^n} - \frac{n!|\zeta|^2\Phi}{\rho^{n+1}} - \frac{n!\Phi}{\rho^{n+1}}.$$

由此看出

$$\mathrm{Ric}\,\Omega = -(n+1)\omega, \tag{10}$$

这个富比尼 – 施图迪度量的里奇曲率为正.

我们注意到, 在对度量乘以正常数时, 形式 ω 也乘上了它, 而 $\mathrm{Ric}\,\omega$ 并不改变. 故如果我们想要的话则可以假定在例 (2) 中有 $\mathrm{Ric}\,\Omega = \omega$ 或者

$$(\mathrm{Ric}\,\Omega)^n = \Omega. \tag{11}$$

在例题 (3) 中我们知道了对于 $\mathbb{P}^n$ 的标准度量, 其里奇曲率为正, 而很快就会清楚, 我们的目标是要得到具负曲率的流形. 我们现在来证明, 从 $\mathbb{P}^n$ 中去掉有限个代数超平面就可以做到.

以 D_j 记 $\mathbb{P}^n$ 中余维 1 的子流形, 其由方程 $P_j(w) = 0$ 定义, 其中 P_j 为次数为 $s_j = \deg P_j$ 的齐次多项式. 我们假定这些 D_j 相交于一般位置, 就是说在每个交点的邻域中具有那样的局部坐标, 在此坐标下 $\bigcup_{j=1}^{k} D_j$ 局部地由方程 $z_1 \cdots z_l = 0, l \leqslant k$ 给出.

定理 5. 如果在上面所叙述的条件下, $\sum_{j=1}^{k} \deg\ P_j \geqslant n+2$, 则在流形 $M = \mathbb{P}^n \backslash \bigcup_{j=1}^{k} D_j$ 上存在具负里奇曲率的体积形式 Ω, 并使得

$$(\mathrm{Ric}\,\Omega)^n \geqslant \Omega.^{1)} \tag{12}$$

1)这个不等式表示差 $(\mathrm{Ric}\,\Omega)^n - \Omega$ 是 M 上的非负形式 (它具有极大次数).

证明. 记

$$\sigma_j = c_j \frac{|P_j(w)|^2}{|w|^{2s_j}}, \quad j = 1, \cdots, k \tag{13}$$

其中 $c_j > 0$ 为常数, $|w|^2 = \sum_{k=0}^{n} |w_j|^2, s_j = \deg P_j$; 这是 $C^\infty(\mathbb{P})^n$ 类中的函数, 并在 D_j 上为零而在 D_j 的补集上为正. 又设 $\omega_0 = dd^c \ln |w|^2$ 为富比尼 – 施图迪形式. 于是

$$\Omega = \omega_0^n \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{\sigma_j \ln^2 \sigma_j} \tag{14}$$

为 M 上的体积形式, 而其里奇形式为

$$\mathrm{Ric}\,\Omega = \mathrm{Ric}\,\omega_0^n - \sum_{j=1}^{k} dd^c \ln\ \sigma_j - \sum_{j=1}^{k} dd^c\ \ln\ \ln^2 \sigma_j. \tag{15}$$

我们有 $\mathrm{Ric}\ \omega_0^n = -(n+1)\omega_0$ (例题 (3)), 而 $dd^c \ln\ \sigma_j = -s_j dd^c \ln |z|^2$; 因为 $dd^c \ln |P_j|^2 = 0$, 故 $-dd^c \ln\ \sigma_j = s_j \omega_0$. 进而有

$$dd^c \ln\ \ln\ \sigma_j = \frac{dd^c \ln\ \sigma_j}{\ln\ \sigma_j} - \frac{i}{2} \frac{\partial \ln\ \sigma_j \wedge \overline{\partial} \ln\ \sigma_j}{(\ln\ \sigma_j)^2},$$

并且当在 (15) 中代入所有这些表达式, 我们便有了

$$\mathrm{Ric}\ \Omega = \left[\sum_{j=1}^{k} s_j - (n+1) + \sum_{j=1}^{k} \frac{2s_j}{\ln\ \sigma_j} \right] \omega_0 + i \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial \ln\ \sigma_j \wedge \overline{\partial} \ln\ \sigma_j}{(\ln\ \sigma_j)^2}. \tag{16}$$

按照假定有 $\sum_{j=1}^{k} s_j - (n+1) \geqslant 1$, 而如果选取 (13) 中的 c_j 充分小, 则 $\frac{1}{\ln\ \sigma_j}$ 可以被做成具有任意小模的 $\mathbb{P}^n$ 中的连续函数, 因此可以假定在方括号中的这个系数不小于 1/2. 像我们所了解的, 形式 ω_0 为正, 并且 (16) 中的第二个形式非负, 那么对应于它的埃尔米特形式等于 $2\sum_{j=1}^{k} \frac{|\partial \ln\ \sigma_j|^2}{(\ln\ \sigma_j)^2}$, 这是因为 $\ln\ \sigma_j$ 为实函数. 这样, $\mathrm{Ric}\,\Omega$ 的正性已得证.

为了证明第二个论断, 我们在 D_j 的任一个交点的邻域中选取以此点为中心的局部坐标, 使在此坐标下 $D_j = \{\zeta_j = 0\}$. 于是 $\ln\ \sigma_j = a_j + \ln |\zeta_j|^2$, 其中的 a_j 为光滑函数, 又

$$\begin{aligned} \partial \ln\ \sigma_j \wedge \overline{\partial} \ln\ \sigma_j &= \frac{d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j}{|\zeta_j|^2} + \frac{\partial \zeta_j \wedge \overline{\partial} a_j}{\zeta_j} + \frac{\partial a_j \wedge \overline{\partial} \zeta_j}{\overline{\zeta}_j} + \partial a_j \wedge \overline{\partial} a_j \\ &= \frac{d\zeta_j \wedge d\overline{\zeta}_j + \psi_j}{|\zeta_j|^2}, \end{aligned}$$

其中 ψ_j 为光滑 (1,1) - 形式, 它在 $\zeta = 0$ 时为 0. 我们约定以 c 表示一些不必完全一样的正常数. 再利用 $\omega_0 \geqslant c\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{n} d\zeta_j \wedge d\bar{\zeta}_j$, 由 (16) 便得到

$$(\text{Ric}\ \Omega)^n \geqslant c\left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \wedge \cdots \wedge d\zeta_n \wedge d\bar{\zeta}_n + c\Psi}{\prod_{j=1}^{k} |\zeta_j|^2 \ln^2 |\zeta_j|},$$

其中的 Ψ 为具有光滑系数的形式, 当 $\zeta = 0$ 时它等于零. 由此在点 $\zeta = 0$ 的充分小的邻域中可得到 $(\text{Ric}\ \Omega)^n \geqslant c\Omega$ [1]. 在 $\bigcup D_j$ 中那些不是全部 D_j 的相交点而还是 M 中的点的充分小的邻域中成立同样的不等式. 利用 $\mathbb{P}^n$ 的紧性可断定在 M 处有 $(\text{Ric}\ \Omega)^n \geqslant c\Omega$. 最后以 $c\Omega$ 替换 Ω 便得到了 (12). □

里奇曲率方法的应用基于后面的这个引理, 它是阿尔福斯引理的直接推广.

引理 (格里菲思). 设 M 为 n 维复流形, 其体积形式为 Ω_M, 它的里奇曲率为负并满足条件 (12), 而 $U = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < 1\}$ 为多圆盘. 于是, 对任意点 $z \in U$ 有

$$f^*(\Omega_M) \leqslant \Omega_U, \tag{17}$$

其中 Ω_U 为多圆盘的体积形式, 并被法化使得 $(\text{Ric}\ \Omega_U)^n = \Omega_U$.

证明. 其证明类同于阿尔福斯引理的证明. 令 $f^*(\Omega_M) = u(z)\Omega_U$, 像在那里一样 (过渡到更小的多圆盘), 我们知道只要考虑当 u 在内点 $z_0 \in U$ 达到极大值的情形就可以了. 在此点, $0 \geqslant dd^c \ln\ u = \text{Ric}\ f^*(\Omega_M) - \text{Ric}\ \Omega_U$, 即 $\text{Ric}\ \Omega_U \geqslant \text{Ric}\ f^*(\Omega_M)$. 因为这两个形式都为非负, 故把这个不等式提高到 n 次外幂, 我们得到了 $(\text{Ric}\ \Omega_U)^n \geqslant (\text{Ric}\ f^*(\Omega_M))^n$, 并且利用引理的假设条件, 由其知 $(\text{Ric}\ \Omega_U)^n = \Omega_U$, 而 $(\text{Ric}\ f^*(\Omega_M))^n \geqslant f^*(\Omega_M)$, 我们从而得到在点 z^0 的不等式 $\Omega_U \geqslant f^*(\Omega_M)$. 故 $u(z^0) \leqslant 1$, 而因为 z^0 为极大点, 所以在 U 处有 $u(z) \leqslant 1$. □

我们还注意到以这种考虑方法能得到的另一个结果, 即兰道 (Landau) 的一个经典定理 [2] 的高维推广. 记 $U_R = \{\zeta \in \mathbb{C}^n : \|\zeta\| < R\}$ 并记 U 为单位多圆盘. 设

$$\Omega_{U_R} = c\prod_{k=1}^{n} \frac{iR^2 d\zeta_k \wedge d\bar{\zeta}_k}{2(R^2 - |\zeta_k|^2)^2} \tag{18}$$

为体积形式, 对其法化使得 $(\text{Ric}\ \Omega_{U_R})^n = \Omega_{U_R}$; 像我们在例题 (2) 中看到的那样, 常数 c 不依赖于 R.

[1] 在 D_j 的点上该不等式平凡地满足, 因为它的两端都为 0.

[2] 例如, 参考 I. I. Privalov, *Introduction to the theory of functions of a complex variable*, 13th ed., “Nauka”, Moscow, 1984, p. 262. (普里瓦洛夫《复变函数论导引》, 有中译本)

定理 6. 设 M 为具有体积形式 Ω_M 的 n 维复流形, 其满足格里菲思引理的假定, 又设 $f: U_R \to M$ 为全纯映射, 使得 $f(0)=p$ 以及 $|J_f(0)| \geqslant 1$, 其中 $J_f(0) = \det\left(\dfrac{\partial f_j}{\partial \zeta_k}\right)(0)$ 为 f 的雅可比, 它是在 p 点的邻域中所实现的 M 的局部坐标下计算的. 于是多圆盘 U_R 的半径有一个不依赖映射 f 的上界:

$$R \leqslant R(p). \tag{19}$$

证明. 因为 $\Omega_M(p) = H(p)\prod_{k=1}^{n} \dfrac{i}{2} dz_k \wedge d\bar{z}_k$, 而 $\Omega_U(0) = c\prod_{k=1}^{n} \dfrac{i}{2} d\zeta_k \wedge d\bar{\zeta}_k$, 则

$$f^*\Omega_M(0) = H(p)\prod_{k=1}^{n} \frac{i}{2} df_k \wedge d\bar{f}_k = H(p)|J_f(0)|^2 \frac{\Omega_U(0)}{c} \geqslant \frac{H(p)}{c}\Omega_U \tag{20}$$

(我们考虑了 $|J_f(0)| \geqslant 1$). 格里菲思引理给出了不等式 $f^*\Omega_M(0) \leqslant \Omega_{U_R}(0)$, 而由 (18) 看出 $\Omega_{U_R}(0) = \dfrac{\Omega_U(0)}{R^{2n}}$. 故而我们有不等式 $\dfrac{\Omega_U(0)}{R^{2n}} \geqslant \dfrac{H(p)}{c}\Omega_U(0)$, 由此便得到了论断. □

显见, 如果映射 $f: U_R \to M$ 非退化, 即存在点 $\zeta^0 \in U_R$ 使 $J_f(\zeta^0) \neq 0$, 则用变量 ζ 的分式线性变换和参量 z 的线性变换可以得到一个映射, 使得 $|J_f(0)| \geqslant 1$. 因此定理 6 给出了下面的推论.

推论. 如果 n 维复流形 M 具有满足格里菲思引理的假设条件的体积形式, 则任意全纯映射 $f: \mathbb{C}^n \to M$ 退化.

(事实上, 如果 f 非退化, 则不失一般性可设 $|J_f(0)| \geqslant 1$, 于是由定理 6, f 全纯的多圆盘半径有限.)

这个推论也是皮卡小定理的一个推广. 根据定理 5 流形 $M = \mathbb{P}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{k} D_j$ 满足格里菲思条件, 其中的流形 D_j 相交于一般位置, 而 P_j 次数的和不小于 $n+2$. 如果 D_j 是平面, 我们便得到了格林引理的特殊情形 (参看定理 3 上面的引理; 在那里 $\mathbb{C}^n$ 和 M 的维数不必相同. 而只要求超平面互不相同). 但是这个结果在下面的意义下更广, 即代替超平面可以考虑代数流形.

格林 (定理 2) 的下一个结果表明, 如果从 $\mathbb{P}^n$ 中去掉更多的超平面 (即处于一般位置的 $2n+1$ 个超平面), 则映射 f 退化为常值映射. 希望可以在选取充分高次的代数流形时能得到同样的结果, 但是这个希望并不合理, 这由 Kiernan 给出的下面的例子所指出.

例题 (4). 考虑在 $\mathbb{P}^{2n}$ 中的超曲面 A, 它在齐次坐标下由方程 $z_0^p + \cdots + z_{2n}^p = 0$ 给出. 对任意 $p \geqslant n$ 存在非常值的全纯映射 $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^{2n} \setminus A$. 这个映射可以

如此构造: 我们以仿射方程 $1+\zeta_1^p+\cdots+\zeta_{2n}^p=0$ 给出 A, 并令 $f(z_1,\cdots,z_n)=(z_1,\varepsilon_1 z_1,\cdots,z_n,\varepsilon_n z_n)$, 其中 ε_j 为根 $\sqrt[p]{-1}$. 对任意 z 我们有 $1+z_1^p+\varepsilon_1^p z_1^p+\cdots+z_n^p+\varepsilon_n^p z_n^p=1$, 故而 $f(\mathbb{C}^n)$ 属于超平面 $\zeta_1^p+\cdots+\zeta_{2n}^p=0$.

在这方面的进一步结果参看作者的书 *Distribution of values of holomorphic mappings*, "Nauka", Moscow, 1982; 英译本, Transl. Math. Monographs, vol. 61, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

§21. 边界性质

在这里我们将考虑许多与函数和映射相关的边界性质: 在这些性质中边界的分布特性与空间复结构之关联展示得特别清楚. 我们首先研究严格伪凸域的逆紧映射的边界性态, 然后再描述向量场在边界上的结构以及这个结构对函数性质的影响. 主要关注的是在近年来由莫斯科大学所取得的成果.

61. 严格伪凸域的映射

这里所考虑的问题中, 在单纯的伪凸域和严格伪凸域之间有着实质性的区别, 后者即在 $\mathbb{C}^n$的有界区域, 其定义函数 φ 在区域边界的邻域中为 C^2- 光滑, 而在这个边界上有 $\bigtriangledown\varphi\neq 0$, 而且莱维形式 $H_z(\varphi,\omega)$ 严格正定 (参看第 39 目).

这种区别譬如出现在考虑逆紧的全纯映射中. 例如, $\mathbb{C}^n$ 中区域间全纯映射 $f:D\to G$ 被称做逆紧是说, 对任意集合 $K\Subset G$ 有 $f^{-1}(K)\Subset D$. 显然, 这样的映射是满的, 而如果它被连续地延拓到 $\overline{D}$, 则把 ∂D 映到在 ∂G 中. 因为 G 中点的原像是 D 中的紧解析集, 故它们全都为有限. 由在第 55 目中所引述的雷默特定理知道, 奇点集 $E=\{z\in D: J_f(z)=0\}$ 在该映射的像是 G 中的解析集, 从而不能分离 G. 由此得知, 对任意点 $w\in G\setminus f(E)$, 原像 $f^{-1}(w)$ 的个数为有限并都相同, 这是因为这个数是在 $G\setminus f(E)$ 上的整值连续函数. 对于点 $w\in f(E)$, 其原像的点数减少了, 这是由于它们中有一些点叠合了, 从而 $f(E)$ 起了分支点集的作用, 那么整个映射 $f:D\to G$ 便是一个分歧覆叠 (参照第 55 目).

多圆盘 U^n (伪凸域) 可以逆紧和全纯地映到自己而不是个双全纯, 例如映射 $z\mapsto(z_1^{m_1},\cdots,z_n^{m_n})$, 其中的 m_ν 为任意整正数. 倒回去一些时间, 曾出现过一个有趣的猜想, 说当 $n>1$ 时对于球 B^n (严格伪凸域), 这样的映射不会存在.

不久前, H. 阿历克山大(Alexauder)[1] 证明了这个猜想, 他利用了严格伪凸域的逆紧映射的某种一般性质. 我们在这里来介绍平丘克 (S. I. Pinchuk)[2] 关于这个问题的结果. 我们需要

[1] H. Alexander, *Proper holomorphic mappings in* $\mathbb{C}^n$, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 137-146.

[2] S. I. Pinchuk, *Proper holomorphic maps of strictly pseudoconvex domains*, Sibirsk. Mat. Z. **15** (1974), 909-917; 英译本, Siberian Math. J. **15** (1974), 644-649.

引理. 如果函数 u 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中为负且多重次调和, 并具有 C^2 类的边缘, 则存在常数 $k>0$ 使得对所有 $z\in D$ 有

$$|u(z)|\geqslant k\delta(z,\partial D), \tag{1}$$

其中 δ 为欧几里得距离.

当 $n=1$ (对于次调和函数) 这个性质由克尔德什 (M. V. Keldysh) 和拉夫连季耶夫 (M. A. Lavrent′ev) 建立; 对任意 n 和在更一般情形由辛姆琴科 (B. N. Khimchenko) 证明; 我们不打算给出证明 [1]. 我们还注意到另一个方向的估值 $|u(z)|\leqslant K\delta(z,\partial D)$ 对于任意 $C^1(\overline{D})$ 类的在边缘上为零的函数成立.

平丘克的第一个结果是

定理 1. 设 D 和 G 为 $\mathbb{C}^n(n>1)$ 中的严格伪凸域, 而 $f:D\to G$ 为逆紧的全纯映射. 如果 f 被延拓为 $\overline{D}$ 的 C^1 类映射, 则它为局部双全纯.

证明. 如果 f 不是局部双全纯的, 则雅可比 $J_f(z)$ 在某个非空解析集 $E\subset\overline{D}$ 为零, 又由紧奇点的定理 (第 31 目) 有 $E\bigcap\partial D\neq\varnothing$ (如若不然, 全纯函数 $1/J_f(z)$ 将会在 D 中有一个紧奇集而不分离 D). 设点 $z^0=f(z^0)=0$. 又设该两区域在原点的邻域用严格多重次调和函数给出: $D=\{\varphi(z)<0\},G=\{\psi(w)<0\}$ 另外, 不失一般性可以设

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=\operatorname{Re} z_n+|z|^2+o(|z|^2),\\ \psi(z)&=\operatorname{Re} w_n+|w|^2+o(|w|^2)\end{aligned} \tag{2}$$

(参看第 Ⅲ 章问题 21).

因为映射 f 在 D 中全纯并属于 $C^1(\overline{D})$ 类, 故它的坐标有形如下面的展式

$$f_\mu(z)=\sum_{\nu=1}^{n}a_{\mu\nu}z_\nu+\alpha_\mu(z),\quad \mu=1,\cdots,n, \tag{3}$$

其中 $a_{\mu\nu}$ 为常数, $\alpha_\mu\in\mathscr{O}(D)\bigcap C^1(\overline{D}),|\alpha_\mu(z)|=o(|z|)$. 考虑函数 $u=\psi\circ f\in C^1(\overline{D})$; 因为映射 f 为逆紧, 故 $u|_{\partial D}=0$, 而因为在点 $z,\partial D$ 的实切平面由方程 $x_n=0$ 给出, 故

$$u(z)=\left.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|_0 x_n+o(|z|).$$

将 (3) 和 (2) 代入, 我们得到

$$u(z)=\psi\circ f(z)=\operatorname{Re}\sum_{\nu=1}^{n}a_{n\nu}z_\nu+\operatorname{Re}\alpha_n(z)+\sum_{\mu=1}^{n}|f_\mu(z)|^2+o(|z|^2),$$

---

[1] 参看 B. N. Khimchenko. *The behavior of a superharmonic function near the boundary of a domain of type* $A^{(1)}$, Differentsial′nye Uravneniya **5** (1969), 1845-1853; 英译本, Differential Equations **5** (1969), 1371-1378.

并将这个展式与前一个相比较, 于是我们得到 $a_{n\nu}=0$, 其中 $\nu=1,\cdots,n-1$, 以及 a_{nn} 为实数. 最后面这个展式因而具有下面的形式:

$$u(z)=a_{nn}x_n+\operatorname{Re}\alpha_n(z)+\sum_{\mu=1}^{n}|f_\mu(z)|^2+o(|z|^2). \tag{4}$$

显然函数 u 满足了引理的条件, 由此得到 $a_{nn}\neq 0$.

因为我们有 $J_f(0)=0$, 故由此得到由矩阵 $(a_{\mu\nu})$, 其中 $\mu,\nu=1,\cdots,n-1$ 给出的线性映射 $'A:\mathbb{C}^{n-1}\to\mathbb{C}^{n-1}$ 为退化的论断. 因此存在复直线 $'l\in\mathbb{C}^{n-1}$, 使得 $'A('l)=0$. 考虑复直线 $l_\tau=\{z\in\mathbb{C}^n:'z\in 'l, z_n=-\tau\}$, 其中 τ 为实数. 限制 $\operatorname{Re}\alpha_n|_{l_\tau}$ 是在开集 $l_\tau\bigcap D$ 上的调和函数, 而由于 (2) 和 (4), 在这个集合的边界上, 即 $z\in l_\tau\bigcap\partial D$, 我们有 $-\tau+|z|^2+o(|z|^2)=0$ 和 $-a_{nn}\tau+\operatorname{Re}\alpha_n(z)+\tau^2\sum_{\mu=1}^{n}|a_{\mu n}|^2+o(|z|^2)=0$, 即在此边界上 $\operatorname{Re}\alpha_n=a_{nn}\tau+o(\tau)$. 但由 (2) 看出, 对所有充分小的 $\tau>0$, 点 $('0,-\tau)\in l_\tau\bigcap D$; 因此由对调和函数的极大原理有 $\operatorname{Re}\alpha_n('0,\tau)=\alpha_{nn}\tau+o(\tau)$ 对所有充分小的 $\tau>0$ 成立, 而这与假设条件 $\alpha_n(z)=o(|z|)$ 矛盾. □

如果在这个定理中再加上另一个假定, 即区域 G 为单连通, 就是说基本群 $\pi_1(G)=0$, 则这个定理中的映射 f 便是整体双全纯 (事实上, 由已证的局部双全纯性和 f 的逆紧性推导出 f 为非分歧覆叠, 因此可以利用第 21 目的单值化定理).

在一般情形, 不能证明 f 的整体双全纯, 这里有例子: 区域 $D=\{|z_1|^2+|z_2|^4+|z_2|^{-4}<3\}$ 和 $G=\{|w_1|^2+|w_2|^2+|w_2|^{-2}<3\}\subset\mathbb{C}^2$ 为严格伪凸, 而映射 $f:D\to G$, 其中 $f(z)=(z_1,z_2^2)$, 为逆紧和全纯, 但是并不是双全纯. 然而对 $D=G$ 的情形有

定理 2. 如果 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的严格伪凸域, 则任意逆紧全纯映射 $f:D\to D$, 如果可以延拓为 $C^1(\overline{D})$ 类中的映射, 那么它为双全纯.

证明. 可以假定基本群 $\pi_1(D)$ 为非平凡 (参看上面所评注的), 但是由于 ∂D 的光滑性它有有限个生成元; 设 $\gamma_1,\cdots,\gamma_l$ 为 D 中代表这些生成元的闭道路. 根据定理 1 映射 $f:D\to D$ 是个覆叠, 而其所诱导的同态 $f_*:\pi_1(D)\to\pi_1(D)$ 为单同态. 按照覆叠的重数定理 (第 21 目的定理 3), 要证明 f 为同胚只要证明 f_* 为满即可, 即 $\operatorname{im} f_*=\pi_1(D)$.

我们考虑映射 f 的迭代 $f^\nu=f\circ f^{\nu-1}$ ($\nu=1,2,\cdots,f^0$ 为恒同映射). 因为族 $\{f^\nu\}$ 为一致有界, 故按蒙泰尔定理存在子序列 f^{ν_j} 在 D 的紧子集上一致收敛于全纯映射 $g:D\to\overline{D}$. 特别地, 在所有生成元 γ_k $(k=1,\cdots,l)$ 上一致地有 $f^{\nu j}\to g$, 从而 $f^{\nu_j}(\gamma_k)$ 对充分大的 j 同伦于 $g(\gamma_k)$, 即 $f_*^{\nu_j}=g_*$, 其中所有 $j\geqslant j_0$. 因为 f_* 为单, 故由此得到 g_* 为单. 但是 $f_*^{\nu_{j+1}}=f_*^{\nu_j}\circ f_*^{\nu_{j+1}-\nu_j}$, 从而当 $j\geqslant j_0$. 我们有 $g_*=g_*\circ f_*^{\nu_{j+1}-\nu_j}$, 由此因 g_* 的单性知 $f_*^{\nu_{j+1}-\nu_j}$ 为恒同映射, 即为满, 从而 f_* 也为满. □

在这部分的最后我们给出一个有意思的定理, 它是由 B. Wong 和 J. Rosay 在 1977 — 1979 年证明的. 在这里所给出的简单证明则属于平丘克.

定理 3. 如果严格伪凸域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的双全纯自同构群非紧, 则 D 双全纯等价于球.

证明. 由群 Aut D 的非紧性知道, 存在点 $z^0 \in D$ 和序列 $f^\nu \in$ Auf D, 使得 $f^\nu(z^0) \to a \in \partial D$. 因为区域 D 有界, 故根据蒙泰尔定理可以假设 f^ν 在 D 的紧子集上一致收敛于在 D 中全纯的映射 f. 因为 D 为严格伪凸, 故它在 ∂D 的邻域中有严格多重次调和的定义函数 φ (参看第 39 目). 函数 $\varphi \circ f$ 于是为多重次调和并在 z^0 的邻域为非正, 而 $\varphi \circ f(z^0) = 0$, 故依照极大原理有 $\varphi \circ f(z) \equiv 0$, 因此映射 f 为常值.

另外, 不失一般性地设 $a = 0$, 以及函数 φ 具有形式

$$\varphi(z) = \mathrm{Re}\, z_n + |z|^2 + o(|z|^2). \tag{5}$$

以 ζ^ν 记 ∂D 中的点, 它们邻近 $a^\nu = f^\nu(z^0)$, 又以 l^ν 记平移 $\zeta^\nu \mapsto 0$ 和酉变换的复合, 使它把复切平面 $T^c_{\zeta^\nu}(\partial D)$ 变换到平面 $w_n = 0$. 于是 $g^\nu = l^\nu \circ f^\nu$ 为区域 D 到一个有界域 G_ν 的全纯映射, 又因为 a^ν 位于 ∂D 在点 ζ^ν 的法线中, 故 $l^\nu(a^\nu) = g^\nu(z^0)$ 具有形式 $('0, -\delta_\nu)$, 其中 $\delta_\nu > 0$. 按照构造有 $a^\nu \to 0$, 于是当 $\nu \to \infty$ 时有 $\delta_\nu \to 0$. 我们注意到, 区域 G_ν 的定义函数具有形式

$$\varphi_\nu(w) = c_\nu \mathrm{Re}\, w_n + d_\nu |w|^2 + o(|w|^2),$$

其中的 c_ν 和 d_ν 趋向于 1.

区域 G_ν 当 $\nu \to \infty$ 时收缩到点 $w = 0$. 为了去掉它, 我们令替换 g^ν 为双全纯映射

$$F^\nu = ('g^\nu/\sqrt{\delta_\nu}, g_n^\nu/\delta_\nu), \tag{6}$$

它把区域 D 映到区域 $D_\nu = F^\nu(D)$, 而 D_ν 的定义函数则为

$$\begin{aligned}\psi_\nu &= \frac{1}{\delta_\nu}\varphi_\nu(\sqrt{\delta_\nu}\,'w, \delta_\nu w_n)\\ &= c_n \mathrm{Re}\, w_n + d_\nu(|'w|^2 + \delta_\nu |w_n|^2) + \delta_\nu o(|w|^2).\end{aligned} \tag{7}$$

当 $\nu \to \infty$ 时函数 ψ_ν 在区域 D 的紧集上一致收敛于一个函数 $\psi(w) = \mathrm{Re}\, w_n + |'w|^2$, 其定义了一个区域 $\widetilde{D}$, 而这个区域双全纯等价于球 (参看第 I 章的问题 18).

由 (7) 看出, 当 ν 充分大时在 D 的紧子集上 $\mathrm{Re}\, F_n^\nu(w) < 0$, 而根据 (6) 又有 $F_n^\nu(z^0) = -1$. 按照蒙泰尔定理得到, 从 F_n^ν 中可以抽出一个子序列在 D 中的紧集上一致收敛于一个函数 F_n. 为了使记号简化. 我们仍以 F_n^ν 表示这个子序, 于是又由 (7) 中看出映射 $'F^\nu$ 在 D 中的紧集上一致有界, 从而由同一定理从 F^ν 中可挑

出收敛于全纯映射 $F: D \to \widetilde{D}$ 的子序列. 逆映射 $(F^\nu)^{-1}$ 一致有界, 从而在它们中可以挑出在 $\widetilde{D}$ 的紧集上一致收敛于全纯映射 Φ 的子序. 因为有 $F(z^0) = ('0, -1)$ 和 $\Phi('0, -1) = z^0$, 故 F 和 Φ 互为逆, 从而 F 给出了区域 D 到区域 $\widetilde{D} = \{\operatorname{Re} w_n + |'w|^2 < 0\}$ 的双全纯映射, 而后者等价于球. □

62. 边界的对应

如果平面区域 D 和 G 的边界为若尔当曲线, 则共形映射 $f: D \to G$ 依照卡拉泰奥多里定理可延拓为这些区域的闭包的同胚, 而如果边界足够光滑, 则这个延拓了的映射也在闭包上光滑 (参看卷 I 的第 41 目). 容易看出, 在高维空间的区域间的双全纯映射甚至连卡拉泰奥多里定理也不能推广. 事实上, 映射 $f: (z_1, z_2) \mapsto (z_1, (z_1 - 1)z_2)$ 是从双圆盘 $D = \{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$ 到区域 $G = \{|w_1| < 1, |w_2| < |w_1 - 1|\}$ 的双全纯变换, 而逆映射 $f^{-1}(w) = \left(w_1, \dfrac{w_2}{w_1 - 1}\right)$ 不能连续地延拓到边界点 (1,0), 虽然两者的边界都是若尔当的.

就在这个例子中, 区域 D 和 G 都是伪凸的, 但不是严格伪凸. 原来, 对于严格伪凸域延拓到边界的性质是能保证的, 这又是一种出现在凸域和严格伪凸域之间的差异. 在这方面的第一个结果由马尔古利斯 (G. A. Margulis) 在 1971 年得到, 他证明了严格伪凸域的双全纯映射可以延拓为它们的闭包上的同胚映射.

在这方面最强的结果是由费弗曼 (C. Fefferman) 在 1974 年证明的, 他证明了具 C^∞ 类边界的严格伪凸域的双全纯映射可延拓到其闭包的同一类映射. 这是使用了在所考虑区域上的伯格曼度量下的测地线的深入研究得到的 [1]. 费弗曼的证明被李果斯卡 (E. Ligocka) 和贝尔 (S. Bell) 作了某些简化 [2].

伦贝特 (L. Lempert) 把这个定理推广到具有限光滑的区域上 [3]: 如果 D 和 G 为 $\mathbb{C}^n$ 中严格伪凸域, 其边界为 C^{k+1} 类 $(k \geqslant 2)$, 则任意从 D 到 G 上的双全纯映射 $f: D \xrightarrow{\text{onto}} G$ 可延拓为这些区域的闭包上的 $C^{k+1/2}$ 类的微分同胚.

关于在平面情形的延拓到边界的定理可轻易地转换到逆紧全纯映射上. 在空间情形则不如此, 这里只有由辛钦 (G. M. Khenkin) 和平丘克分别独立得到的结果.

我们按照平丘克的办法, 较仔细地深入到它的证明里.

引理. 设 D 和 G 为 $\mathbb{C}^n$ 中的严格伪凸域, 而 $f: D \to G$ 为逆紧全纯映射. 于是存在常数 $k_1, k_2 > 0$, 使得对所有 $z \in D$ 有

$$k_1 \delta(z, \partial D) \leqslant \delta(f(z), \partial G) \leqslant k_2 \delta(z, \partial D). \tag{1}$$

[1] C. Fefferman, *The Bergman kernel and biholomorphic mappings of pseudoconvex domains*, Invent. Math. 26 (1974), 1-65

[2] S. Bell and E. A. Ligocka, *A simplification and extension of Fefferman's theorem on biholomorphic mappings*, Invent. Math. 57 (1980), 283-289.

[3] L. Lempert, *La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule*, Bull. Soc. Math. France 109 (1981), no. 4, 427-474.

证明. $\mathbb{C}^n$ 中的任意严格伪凸域是在这个区域闭包的邻域中光滑的多重次调和函数的负值区域 (参看第 39 目). 设 $G = \{w \in \mathbb{C}^n : \psi(w) < 0\}$, 其中 ψ 为这样的函数. 于是由于它的光滑性有 $|\psi(w)| \leqslant k\delta(w, \partial G)$, 或者 $|\psi \circ f(z)| \leqslant k\delta(f(z), \partial G)$, 其中 $z \in D, k > 0$ 为某个常数. 但是 $\psi \circ f$ 为在 D 中的负值多重次调和函数, 因此由前一目的引理知 $|\psi \circ f(z)| \geqslant k'\delta(z, \delta D)$. (1) 的左端部分得证.

为了证明 (1) 的右端, 我们考虑集合 $E = \{z \in D : J_f(z) = 0\}$, 它是映射 f 的临界点集; 由雷默特定理 (在第 55 目中引述) 知, $f(E)$ 是 G 中的解析集. 对于 $w \in G \backslash f(E)$, 我们令

$$\Psi(w) = \max_{z \in f^{-1}(w)} \varphi(z), \tag{2}$$

其中 φ 为多重次调和函数, 其负值的点集为区域 D. 因为 f 为逆紧, 故 $f^{-1}(w)$ 的点数有限 (并都相同), 其中所有的 $w \in G \backslash f(E)$, 并且根据第 38 目 3° 的性质知 Ψ 为 $G \backslash f(E)$ 中的多重次调和函数, 且显然是有界的, 故而根据在第 38 目末尾所引述的格劳尔特 – 雷默特定理知其可多重次调和地延拓到 G 中.

由第 61 目中同一引理知, 对被延拓的函数 Ψ 有 $|\Psi(w)| \geqslant k\delta(w, \partial G)$, 而因为 Ψ 和 φ 为负, 则对于 $w \in G \backslash f(E)$, (2) 可以改写为 $|\Psi(w)| = \min\limits_{z \in f^{-1}(w)} |\varphi(z)|$, 又因为光滑性有 $|\varphi(z)| \leqslant k'\delta(z, \partial D)$, 故 $|\Psi(w)| \leqslant k' \min\limits_{z \in f^{-1}(w)} \delta(z, \partial D)$. 因而, $k\delta(w, \partial G) \leqslant k' \min\limits_{z \in f^{-1}(w)} \delta(z, \partial D)$ 对所有 $w \in G \backslash f(E)$ 成立, 又由于在 G 的处处连续性, 即对所有 $z \in D$ 有 $\delta(f(z), \partial G) \leqslant \dfrac{k'}{k} \delta(z, \partial D)$. □

定理. $\mathbb{C}^n$ 中严格伪凸域的任意逆紧全纯映射 $f : D \to G$ 可延拓为这些区域闭包的连续映射, 并且所延拓的映射满足在 $\overline{D}$ 中的利普希茨 (Lipschitz) 条件, 其常数为 $\dfrac{1}{2}$: 对于所有 $z', z'' \in \overline{D}$ 有

$$|f(z') - f(z'')| \leqslant k|z' - z''|^{1/2}. \tag{3}$$

证明. 我们将在一个附加假设下证明这个定理; 这假设是: G 是几何严格凸的[1]. 因为边界 ∂D 属于 C^2 类, 故对任意充分靠近 ∂D 的点 $z \in D$, 存在球 $B_{z'} \subset D$, 它以 z' 为中心, 使得 $\delta(z, \partial D) = \delta(z, \partial B_{z'})$, 而因为 G 为几何凸, 故而对任意它的点 w, 存在球 $B_{w'} \supset G$, 使得 $\delta(w, \partial G) = \delta(w, \partial B_{w'})$ (图 53)

我们来对映射 f 在充分靠近 ∂D 的任意点 z 上的分量的模进行估计. 不失一般性, 假设对应球的中心为 $z' = 0$, 并设 z 位于 z_n 轴上. 正像我们在第 57 目中看到的, 球 $B^n = \{|z| < R\}$ 的卡拉泰奥多里度量在点 $z = ('0, z_n)$ 由公式

$$ds^2 = (n+1)\left(\frac{|dz|^2}{R^2 - |z_n|^2} + \frac{|z_n|^2 |dz_n|^2}{(R^2 - |z_n|^2)^2}\right) \tag{4}$$

[1] 完整的证明可参看平丘克的文章, 见第 61 目开始部分的脚注.

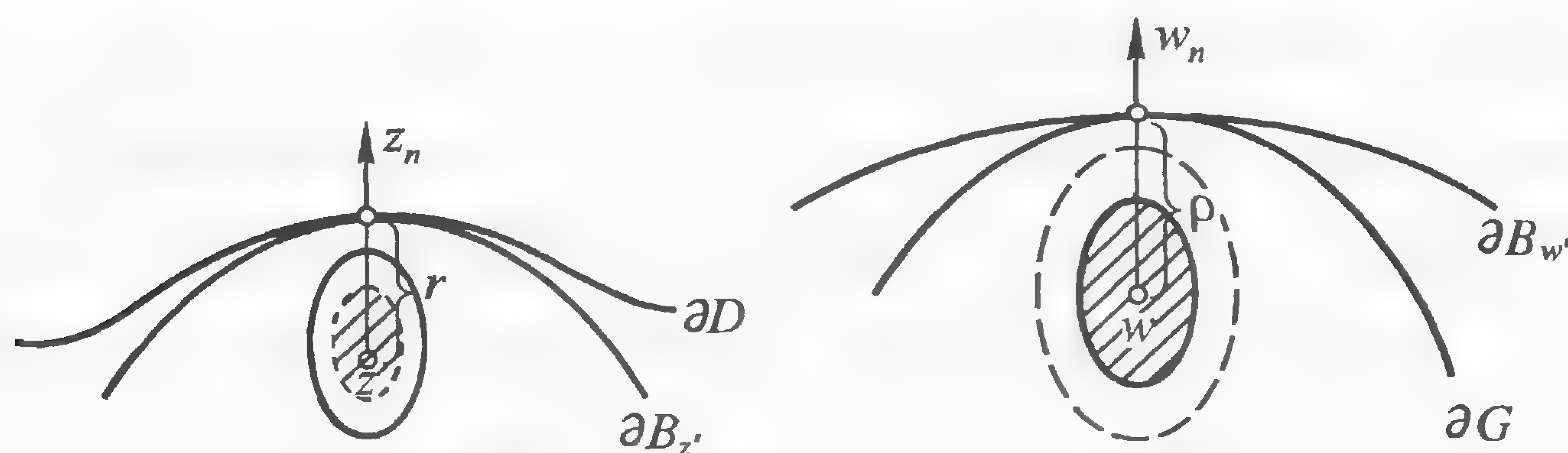


图 53

给出 (它等于球的伯格曼度量, 参看第 56 目的公式 (18)). 如果记 $R-|z_n|=r$, 则由此可以得到结论: 存在常数 λ_1 和 λ_2, 它依赖于 R 并使得以中心为 $z=('0,z_n)$ 半径为 ε 的球在卡拉泰奥多里度量 c_{B^m} 下包在两个椭球

$$E(\lambda_j\varepsilon\sqrt{r},\lambda_j\varepsilon r)=\left\{\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{|z_\nu|^2}{r}+\frac{|z_n-z_n^0|^2}{r^2}=(\lambda_j\varepsilon)^2\right\},\quad j=1,2 \tag{5}$$

之间 (这些椭球的半轴除去第 n 个外都等于 $\lambda_j\varepsilon\sqrt{r}$, 而第 n 个半轴等于 $\lambda_j\varepsilon r$).

将此应用到我们的情形 (图 53). 这时我们的球 $B_{z'}$ 的半径 R 依赖于区域 D, 量 $r=\delta(z,\partial D)$, 并且由 (5) 和卡拉泰奥多里度量的性质知, 在 ε 充分小时有

$$E(\lambda_1\varepsilon\sqrt{r},\lambda_1\varepsilon r)\subset B_z^{c_{B_{z'}}}(\varepsilon)\subset B_z^{c_D}(\varepsilon),$$

其中 $B_z^d(\varepsilon)$ 代表在度量 d 下的中心为 z 半径为 ε 的球. 类似地对区域 G, 如果令 $w=f(z)$ 和 $\rho=\delta(w,\partial G)$, 我们则有

$$B_w^{c_G}(\varepsilon)\subset B_w^{c_{B_{w'}}}(\varepsilon)\subset E(\lambda_1\varepsilon\sqrt{\rho},\lambda_2\varepsilon\rho)$$

(我们再次假定, $w'=0$ 且 w 位于 w_n 轴上, 参看图 53)

由卡拉泰奥多里度量的压缩性质知, 在全纯映射下有 $f(B_z^{c_D}(\varepsilon))\subset B_w^{c_G}(\varepsilon)$. 除此之外, 由引理 $\rho<k_2r$, 因此

$$f(E(\lambda_1\varepsilon\sqrt{r},\lambda_1\varepsilon r))\subset E(\lambda_2\varepsilon\sqrt{k_2r},\lambda_2\varepsilon k_2r). \tag{6}$$

我们考虑映射 f 的坐标 f_μ 在通过点 z 直线上的限制, 并对所得到的单变函数应用施瓦茨引理, 于是得到

$$\left|\frac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}\right|_z\leqslant\frac{\lambda_2\varepsilon\sqrt{k_2r}}{\lambda_1\varepsilon r}=\frac{c}{\sqrt{r}}=\frac{c}{\sqrt{\delta(z,\partial D)}}, \tag{7}$$

其中的常数 c 只依赖于区域 D 和 G. 因为在区域 D 中的紧子集上导数 $\dfrac{\partial f_\mu}{\partial z_\nu}$ 有界, 故可以假定估值 (7) 对整个区域 D 成立 [1)].

[1)] 带一个依赖于 D,G 和所考虑映射的常数因子.

只要对区域 D 中两个之间距离不超过某个正常数 l_0 的点偶去证明不等式 (3) 就足够了. 设 z', z'' 为 D 中任意两点, 且 $|z'-z''|=l\leqslant l_0$; 我们选取点 z_1', z_1'' 使得线段 $[z', z_1'], [z'', z_1'']$ 属于 D 并且长度 l, 而距离 $\delta(z_1', \partial D), \delta(z_1'', \partial D)$ 不小于 l (这总可做到). 以 $\gamma: [0,1]\to[z', z_1'']$ 表示线性映射, 使得 $\gamma(0)=z', \gamma(1)=z_1'$; 显然 $|\gamma'(t)|=l$. 因为 $\delta(r(t), \partial D)\geqslant tl$, 其中所有 $t\in[0,1]$, 于是由估值 (7) 得到了

$$|f(z_1')-f(z')|\leqslant\int_0^1\frac{c|\gamma'(t)|}{\sqrt{tl}}dt=2c\sqrt{l}.$$

完全相同地, 我们得到了估值 $|f(z_1'')-f(z'')|\leqslant 2c\sqrt{l}$.

另外, 线段 $[z_1', z_1'']$ 的长度不大于 $3l$, 而它的端点离边界 ∂D 不小于 l. 利用边界 ∂D 的二阶光滑性, 以及其与二维平面所交截影的曲率的有界性可以断言, 对于所有 $z\in[z_1', z_1'']$ 当 l_0 充分小时有 $\delta(z, \partial D)\geqslant l/2$. 再利用估值(7), 由此得出 $|f(z_1')-f(z_1'')|\leqslant 3c\sqrt{2l}$, 从而联合起所得到的这些估值, 我们发现了

$$|f(z')-f(z'')|<c\sqrt{l}=c|z'-z''|^{1/2},$$

其中 c 为只依赖于区域 D, G 和所考虑的映射的常数.

我们还要注意的是, 从最后这个对所有点 $z', z''\in D$ 成立的估值得到了 f 到区域 D 的闭包上的连续延拓的可能性, 并且在此闭包中所延拓的映射也满足同一个估值. □

注. 由定理的证明看出, 它的局部形式也成立: 如果区域 D 和 G 在它们边界点的某个邻域中满足定理的条件, 而 $f: D\to G$ 为逆紧全纯映射, 它把第一个邻域变换到另一个, 则 f 在第一个邻域中被延拓到了 ∂D, 并满足常数为 1/2 的利普希茨条件.

63. 对称原理

对于具实解析边界区域的映射的边界行为的研究, 我们发现应用高维的对称原理是十分富于成果的. 这个原理是平丘克在 1975 年提出的 [1], 而由韦伯斯特 (S. M. Webster) 作了进一步的发展 [2]. 我们要在这里讲述这个方法的基础, 并给出它的应用例题.

我们称一个实超曲面 S 为在以 a 中心 (为简单起见总取其为 0) 的多圆盘中为**实解析的**是说, 如果它具有形式 $S=\{z\in U: \varphi(z)=0\}$, 而

$$\varphi(z)=\Phi(z, \overline{z})=\sum_{|k|, |l|\geqslant 0}c_{kl}z^k\overline{z}^l, \tag{1}$$

[1] S. I. Pinchuk, *On the analytic continuation of holomorphic mappings*, Mat. Sb. **98** (**140**) (1975), no. 3, 416-435; 英译本, Math. USSR-Sb. **27** (1975), 375-392.

[2] S. M. Webster, *On the mapping problem for algebraic real hypersurfaces*, Invent. Math **43** (1977), 53-68. 也可参看 M. Beals, C. Fefferman 和 R. Grossman 的文章, *Strictly pseudoconvex domains in* $\mathbb{C}^n$, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **8** (1983), 125-322.

其中 $k=(k_1,\cdots,k_n), l=(l_1,\cdots,l_n)$ 为多重指标, 且该级数在多圆盘 $U\times U\subset\mathbb{C}^{2n}$ 中收敛. 显然 φ 的实条件可化为等式 $\overline{c}_{kl}=c_{lk}$, 其中 k,l 任意. 称曲面 S 为严格伪凸是说, 如果函数 φ 为严格多重次调和, 且在 S 上 $\triangledown\varphi\neq 0$ (参看第 39 目).

我们从施瓦茨的对称原理的高维推广着手 (参看卷 I 的第 42 目).

定理 1 (平丘克). 设 $S=\{\varphi(z)=0\}, S'=\{\psi(z)=0\}$ 为实解析曲面, 并在 $\mathbb{C}^n$ 中相应的邻域 U 和 V 中为严格伪凸, 而 $D=\{z\in U:\varphi(z)<0\}$ 为附着于 S 的区域. 于是任意在 D 中全纯, 并在 $D\bigcup S$ 上属于 C^1 类, 且 $f(S)\subset S'$ 的映射 $f:D\to\mathbb{C}^n$ 可全纯地延拓到 S 上.

证明. 只要证明 f 可全纯地延拓到任意点 $\zeta\in S$ 的邻域即可, 像对 $f(\zeta)$ 那样可假设 ζ 为 0. 为了不使证明在技术上复杂化, 我们仅限于 $n=2$ 的情形.

设 $\Psi(w,\omega)$ 为在 $V\times V$ 上的全纯函数, 使 $\psi(w)=\Psi(w,\overline{w})$. 于是条件 $f(S)\subset S'$ 可记成: 对所有 $z\in S$ 有

$$\Psi(f(z),\overline{f(z)})=0. \tag{2}$$

我们记 $u=\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_2}\dfrac{\partial}{\partial z_1}-\dfrac{\partial\varphi}{\partial z_1}\dfrac{\partial}{\partial z_2}$ 为柯西 – 黎曼切算子 (参看第 31 目). 因为假设条件, 函数 $f_\nu\in\mathscr{O}(D)\bigcap C^1(\overline{D})$, 故在 S 上 $u\overline{f}=(u\overline{f}_1,u\overline{f}_2)=0$, 并且将此算子用于 (2) 便得到

$$\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\partial\Psi}{\partial w_\nu}(f(z),\overline{f(z)})uf_\nu(z)=0 \tag{3}$$

对所有 $z\in S$ 成立. 现在需要在 $z=0$ 的邻域中对 $\overline{f_1(z)}$ 和 $\overline{f_2(z)}$ 解方程组 (2) — (3). 根据隐函数定理, 如果行列式 [1)]

$$\Delta(z)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{w}_1}(f(z)) & \dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{w}_2}(f(z))\\ \displaystyle\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial w_\nu\partial\overline{w}_1}(f(z))uf_\nu(z) & \displaystyle\sum_{\nu=1}^{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial w_\nu\partial\overline{w}_2}(f(z))uf_\nu(z)\end{vmatrix}\neq 0. \tag{4}$$

为了证明这一点, 我们首先注意到在 S 上 $uf\neq 0$. 事实上, 如果在 S 的任一点上同时有

$$uf_1=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}-\frac{\partial f_1}{\partial z_2}\frac{\partial\psi}{\partial z_1}=0,\quad uf_2=\frac{\partial f_2}{\partial z_1}\frac{\partial\varphi}{\partial z_2}-\frac{\partial f_2}{\partial z_2}\frac{\partial\varphi}{\partial z_1}=0,$$

则在此点雅可比 $\dfrac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(z_1,z_2)}=0$ (由假设条件 $\triangledown\varphi\neq 0$). 但是, 像在第 61 目定理 1 的证明中所看到的, 由 S 和 S' 的严格伪凸性可推出这个雅可比在 S 上不为零. 进而, 如果 $uf\neq 0$, 则根据 (3) 存在在 S 上的函数 $h\neq 0$, 使得

$$\frac{\partial\psi}{\partial w_1}(f(z))=h(z)uf_2(z),\quad \frac{\partial\psi}{\partial w_2}(f(z))=-h(z)uf_1(z),$$

1) 在这里认为 $\left.\dfrac{\partial\Psi(w,\omega)}{\partial\omega_{\overline{\nu}}}\right|_{\omega=\overline{w}}=\dfrac{\partial\psi}{\partial\overline{w}_\nu}(w).$

将其代入 (4), 得到

$$\Delta(z) = \overline{h(z)} \sum_{\mu,\nu=1}^{2} \left.\frac{\partial^2 \psi}{\partial w_\mu \partial \overline{w}_\nu}\right|_{f(z)} u f_\mu \overline{u f_\nu}.$$

因为 ψ 为严格多重次调和函数, 故 $uf \neq 0$, 故在 S 上 $\Delta(z) \neq 0$ (参看第 39 目).

所以, 应用隐函数定理并从方程组 (2) — (3) 得出, 在某个邻域 $U' \ni 0$ 中有

$$\overline{f_\nu(z)} = g_\nu(f(z), uf(z)), \quad \nu = 1, 2, \tag{5}$$

其中的函数 g_ν 在点 $(0, uf(0)) \in \mathbb{C}^4$ 的邻域中全纯. 现在固定向量 $\omega \in \mathbb{C}^2$ 使得复直线 $l_\lambda = \{z = \omega\zeta + \lambda\}$ 对于充分小的 $\lambda \in \mathbb{C}^2$ 横截相交 $S \bigcap U$ 于解析弧 γ_λ. 函数 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_\mu}$ 对 ζ 在 γ_λ 的邻域中为实解析, 而 $f_\nu(\omega\zeta + \lambda)$ 则在此邻域中 $\varphi(\omega\zeta + \lambda) < 0$ 的部分全纯, 从而在这一部分 $uf_\nu\big|_{l_\lambda}$ 全纯. 由 (5) 得出, 在 γ_λ 上函数 $f_\nu(\omega\zeta + \lambda)$ 也在实解析弧上取值, 并按施瓦茨对单变的对称原理知这些函数被全纯延拓到 γ_λ 的某个 (两面的) 邻域中.

最后我们稍许改变一下 ω: 取与 ω 复线性无关的 ω', 并完全相同地证明函数 f_ν 被全纯地在每条方向为 ω' 的复直线上延拓到 D 之外 (图 54). 用非退化线性变换把 ω, ω' 变到新的坐标轴的方向. 于是根据哈托格斯定理 (第 6 目) 可以得出结论: 函数 f_ν 在点 $z = 0$ 的邻域中全纯. □

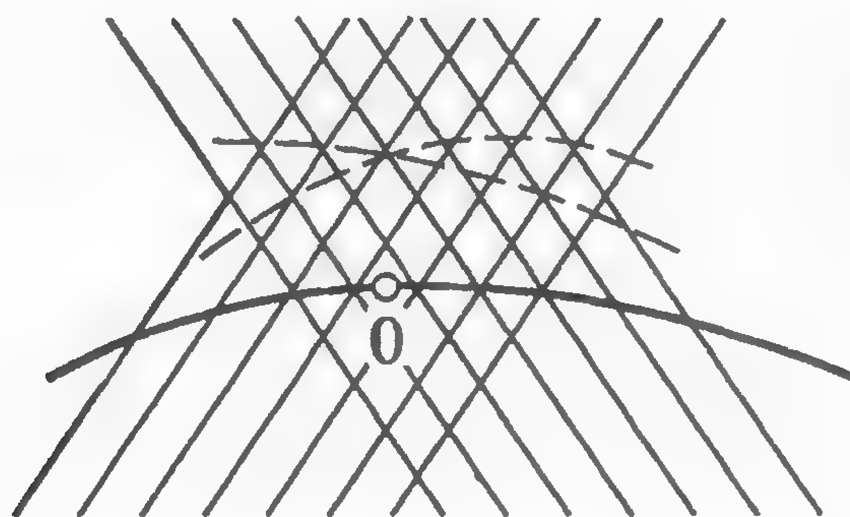


图 54

我们现在转到阐述由韦伯斯特所建议的那种形式的对称原理. 设给出了实解析曲面 $S = \{\varphi(z) = 0\}$ 以及一个靠近它的点 z; 称集合

$$Q_z = \{w \in U : \Phi(\overline{z}, w) = 0\} \tag{6}$$

中的点为**关于 S 的与 z 对称的点**, 其中的 Φ 为 (1) 中的函数. 当 $n = 1$ 时与点 z 对称的是一个点, 而当 $n > 1$ 时, 这是个复的超曲面. 特别地, 如果 $S = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| = 1\}$ 为单位球面, 则 $Q_z = \{w \in \mathbb{C}^n : \sum\limits_{\nu=1}^{n} \overline{z}_\nu w_\nu = 1\}$ 为复超平面 $\{(w, z) = 1\}$, 它复正交于向量 w. 这时如果 $|z| < 1$, 则按施瓦茨不等式对所有 $w \in Q_z$, 有 $|w| \geqslant 1/|z| > 1$, 故而 Q_z 位于球面 S 之外, 如果 $|z| > 1$, 则 Q_z 与它相交 (为确信后者正确, 只要引出一个经过 z 和坐标原点的复直线即可).

* 证明当 $n=1$, 而 S 为直线段或圆弧时, 所考虑的对称同于通常的情形. *

由上面所提及的级数 (1) 的系数的性质可清楚看出 $\Phi(\overline{z},w)=\overline{\Phi(w,\overline{z})}$, 由此得到 $Q_w=\{z\in U:\Phi(\overline{w},z)=0\}$ 可以同样以方程 $\Phi(\overline{z},w)=0$ 给出. 我们便得到了这样的对称性质, 即:

$$\text{如果}\quad w\in Q_z,\quad \text{则}\ z\in Q_w. \tag{7}$$

定理 2. 设在 $\mathbb{C}^n$ 中给出了两个实解析超曲面 $S_\nu=\{z\in U_\nu:\varphi_\nu(z)=0\}$ 及全纯映射 $f:U_1\to U_2$, 使得 $f(S_1)\subset S_2$. 于是对任意点 $z\in U_1$, 有

$$f(Q_z^1)\subset Q_{f(z)}^2, \tag{8}$$

其中 Q_z^1 为点 z 关于 S 的对称曲面, $Q_{f(z)}^2$ 的定义类同.

证明. 设 Φ_ν 为在 $U_\nu\times U_\nu$ 上像 (1) 中那样的与 φ_ν 相关的函数, $\overline{f}_\mu(z)=\overline{f_\mu(\overline{z})}$ 为 U_1 上的全纯函数, 它的泰勒展式的系数复共轭于 f_μ 的相应系数 $(\mu=1,\cdots,n)$ (像上面那样, 假定 U_ν 为中心在 0 的多圆盘). 记 $A_1=\{\Phi_1(z,w)=0\}$ 为 $U_1\times U_1$ 中 $2n-1$ 维的解析集, 并不失一般性, 假设其为不可约, 而 Φ_1 为其定义函数. 这个集合包含了 $S_1=\{\Phi_1(z,\overline{z})=0\}=A_1\bigcap\{w=\overline{z}\}$, 作为它的完全实的子流形, 其 (实) 维数为 $2n-1$ (参看第 17 目).

函数 $\Phi_2(f(z),\overline{f}(w))$ 在 $U_1\times U_1$ 中全纯并在 S_1 上为零, 这是因为在那里 $w=\overline{z},\overline{f}(w)=\overline{f(z)}$, 从而 $\Phi_2(f(z),\overline{f}(w))=\varphi_2(f(z))=0$. 由我们将在第 66 目谈及的唯一性定理得出 $\Phi_2(f(z),\overline{f}(w))$ 在整个集合 A_1 上为零. 但是由魏尔斯特拉斯除法定理 (第 23 目) 便知道, 存在函数 $h\in\mathscr{O}(U_1\times U_1)$, 使得对所有 $(z,w)\in U_1\times U_1$ 有

$$\Phi_2(f(z),\overline{f}(w))=h(z,w)\Phi_1(z,w). \tag{9}$$

这样便得到了定理的断言: 如果 $z\in U_1, Q_z^1=\{w\in U_1:\Phi_1(z,\overline{w})=0\}$, 则对任意点 $w\in Q_z^1$ 的像 $f(w)$ 按照 (9) 满足关系 $\Phi_2(f(z),\overline{f}(\overline{w}))=\Phi_2(f(z),\overline{f(w)})=0$, 即属于集合 $Q_{f(z)}^2$. □

推论. 如果在上述定理的假设条件下, f 是一个双全纯映射, 则 $f(Q_z^1)=Q_{f(z)}^2$, 其中 $z\in U_1$ 为任意点.

证明. 只要把定理 2 不但用于 f 而且用于逆映射 f^{-1} 就足以给出证明. □

因此, 在实解析曲面邻域的双全纯映射下有个不变量, 即关于这些曲面的对称点集. 当 $n=1$ 时, 这些集合是点, 从而这些不变量的出现并不是非常本质的. 但是当 $n>1$ 时不变量具有正维数, 并最后证明对于映射的结构有很大的影响.

作为应用对称集的不变性的最简单的示例, 我们举出下面的例子, 从单变函数论的观点看这是非常不寻常的. 原来, 如果与边界邻接的可随意小的球的一块被双

全纯地映到同样类型的一块, 则该映射必定是线性分式的. 这个结果让我们回忆起刘维尔的一个经典定理, 它表明在 $n>2$ 时任意在邻域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 的共形变换可延拓为整个空间的线性分式变换.

定理 3. 设 $B=\{z\in\mathbb{C}^n:|z|<1\}$ 为球, $U=\{|z-a|<\varepsilon\}$ 为它的边界点 a 的邻域. 如果 $f:B\bigcap U\to\mathbb{C}^n, f\in C^1(\overline{B}\bigcap U)$ 为双全纯映射, 使得 $f(\partial B\bigcap U)\subset\partial B$, 则当 $n>1$ 时这个映射可延拓为整个球的双全纯自同构, 从而是线性分式的.

证明. 由平丘克定理知 f 可全纯延拓到点 a 的邻域中, 设其就是 U. 我们首先假定 $n=2$, 于是对任意点 $w\in U\backslash\overline{B}$, 其充分靠近 a, 则这个点的对称集 Q_w 为复直线, 其正交于向量 w 且交球面 $S=\partial B$ 于圆 γ (参看上面所引进的例子). 按照定理 2 的推论知映射 f 把这条直线变换到集合 $Q_{f(w)}$, 它也是条复直线 (图 55). 因为把 S 变到自己, 故 $f(\gamma)=Q_{f(w)}\bigcap S$, 即还是一个圆, 并且由单变函数论的初等事实知道, 限制 $f\Big|_{Q_w}$ 为线性分式函数.

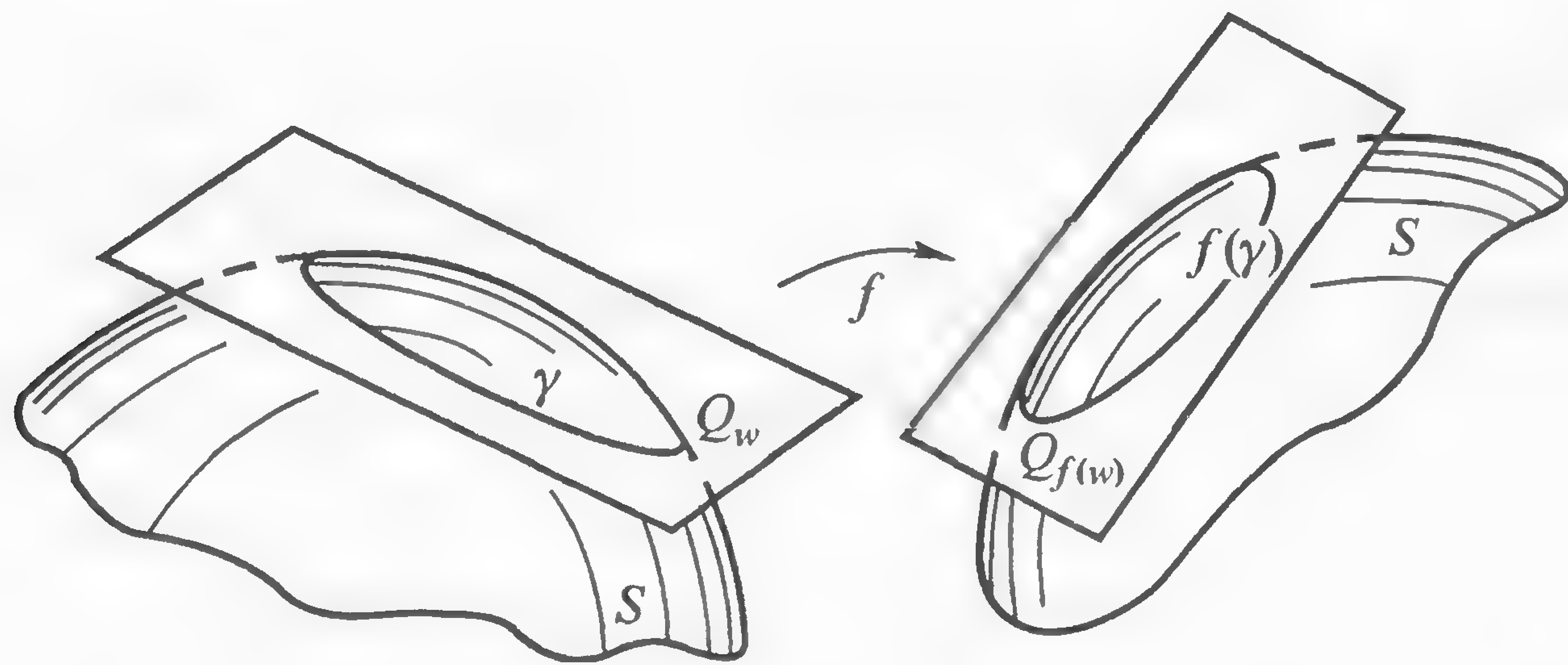


图 55

对于 f 在平行于 Q_w 且充分靠近它的复直线上的限制可以说同样的话, 同样还有它在某个平行于另一个方向的直线族的限制. 用非退化线性变换可以把这个族变到平行于 z_1 和 z_2 轴的复直线族. 于是函数 f 为在某个邻域 u_1 中任意固定的 z_1 下, 对 z_2 是线性分式, 又在另一个邻域 u_2 中固定的任意 z_2 下, 对于 z_1 是线性分式. 根据哈托格斯定理 (第 6 目), 它在 $u_1\times u_2$ 中为线性分式, 从而在整个 $\mathbb{C}^2$ 上如此.

我们归纳地假定定理对某个 $n-1\geqslant 2$ 成立. 固定点 $w\in U\backslash\overline{B}$, 其充分靠近 a, 我们发现 Q_w 为一个复平面, 它交 B 于一个复 $n-1$ 维的球, 又由定理 2 的推论知映射 f 将其变换到平面 $Q_{f(w)}$, 其具有相同的维数, 另外根据所证定理的假设条件有 $f(B\bigcap Q_w)=B\bigcap Q_{f(w)}$, 就是说又是一个 $(n-1)$ 维球. 因此, 限制 $f\Big|_{Q_w}$ 是一个线性分式函数. 对于 f 在平行于 Q_w 并充分靠近它的平面上的限制也可以进行同样的讨论, 而这个函数在与 Q_w 横截的一些平行的复直线族上的限制也是如此. 再次应用哈托格斯定理, 则可断言函数 f 是线性分式的. □

这个定理的历史十分有趣. 阿历克山大在 1974 年发表了对它的一个十分复杂的证明, 后来平

丘克大大地简化了它, 他使用了自己的对称原理 (参看本书的前一版). 我们在上面所给出的非常简单的证明则属于韦伯斯特. 在阿历克山大的定理发表的那时, 它的不寻常的表述给人们极为深刻的印象. 但是后来明白, 在全双纯映射下至少在一点局部保持球面的结果导致其整体上的保持这个事实已在 1907 年由庞加莱所发现. 庞加莱写下了在 $\mathbb{C}^2$ 中的球面的方程为 $y_2 = |z_1|^2$ (参看第 I 卷问题 18) 并由保持该球面一片的局部条件出发去计算出这样的映射应是线性分式的结论.

这个结果后来有了实质性的强化.

定理 (平丘克)[1]. 设 D 和 $G \subset \mathbb{C}^n$ 为严格伪凸域, 并具实的单连通边界, 而 U 为点 $a \in \partial D$ 的邻域. 于是任意非常值全纯映射 $f : U \to \mathbb{C}^n$, 使得 $f(U \bigcap \partial D) \subset \partial G$ 可延拓为 D 到 G 的双全纯映射.

我们最后注意到, 我们在前面第 63 目一开始的脚注中引述的韦伯斯特的文章中, 他应用对称原理证明了在 $\mathbb{C}^n$ 的区域的双全纯映射, 当由条件 $P_\nu(z, \bar{z}) = 0$ 定义时, 必定可以代数函数实现, 其中的 P_ν 为多项式.

64. 向量场

为了讨论函数和映射的有界性质, 更仔细地考察向量场的结构是有好处的, 这里所说的向量场是在区域的边界上或者更一般地在 $\mathbb{C}^n$ 的光滑子流形上. 设这样的流形 M 在邻域 U 中局部地由方程

$$\varphi_1(z) = \cdots = \varphi_k(z) = 0 \tag{1}$$

定义, 其中 φ_μ 为 C^1 类实函数, 并在 U 中

$$d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_k(z) \neq 0, \tag{2}$$

即向量 $\triangledown\varphi_1, \cdots, \triangledown\varphi_k$ 为实线性无关 (参看第 17 目). 于是 M 的实维数等于 $r = 2n - k$.

我们知道, M 在点 $\zeta \in M$ 的切向量是指

$$X_\zeta = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\zeta) \frac{\partial}{\partial z_\nu} + \overline{a_\nu(\zeta)} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu},$$

其中 $X_\zeta(\varphi_\mu) = 0, \mu = 1, \cdots, k$.

如果可以随意一点, 我们所称的切向量将不是 X_ζ 而是向量

$$Z_\zeta = \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu(\zeta) \frac{\partial}{\partial z_\nu}, \quad \text{其中} \quad \operatorname{Re} Z_\zeta(\varphi_\mu) = 0, \quad \mu = 1, \cdots, k. \tag{3}$$

---

[1] 平丘克(S. I. Pinchuk), *On holomorphic mappings of real-analytic hypersurfaces*, Mat. Sb. **105 (147)** (1978), no. 4, 574-593; 英译本, Math. USSR-Sb. **34** (1978), 503-519.

称向量 (3) 为*复切向量*是说, 如果与它同时还有 iZ_ζ 也是切向量, 即 $Z_\zeta(\varphi_\mu)=0,\mu=1,\cdots,k$. M 在点 ζ 的切向量的集合构成了切平面 $T_\zeta(M)$, 而复切向量的集合则构成为复切平面 $T^c_\zeta(M)=T_\zeta(M)\bigcap iT_\zeta(M)$ (参看第 17 目).

显然, $\dim_{\mathbb{R}}T^c_\zeta(M)=r$ 等于 M 的实维数, 而 $T^c_\zeta(M)$ 的维数不但依赖于 r 而且依赖于 $T_\zeta(M)$ 在 $\mathbb{C}^n$ 的位置. 就是说 (参看第 17 目), 如果在向量 $\triangledown\varphi_\mu$ 中存在 $k'\leqslant k$ 个复线性无关的元, 即存在 $1,\cdots,k$ 中的指标组 $j_1,\cdots,j_{k'}$, 使得

$$\overline{\partial}\varphi_{j_1}\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\varphi_{j_{k'}}(\zeta)\neq 0 \tag{4}$$

并且数 k' 是具有这种性质的最大数, 故 $\dim T^c_\zeta(M)=n-k'$.

如果假设 $\zeta\in M$ 是变量, 则切平面 T_ζ 和 T^c_ζ 的集合构成了丛 $T(M)$ 和 $T^c(M)$. 这些丛的截影, 即 (连续或 C^1 类) 函数, 它把每个点 $\zeta\in M$ 相伴于它的切向量称其为*向量场* (参看第 27 目). 在考虑复向量场时通常要求 $T^c_\zeta(M)$ 的维数对所有的点 $\zeta\in M$ 都相同. 称具有这个性质的流形为*柯西 – 黎曼流形*或者简短地称做 *CR – 流形*. 对所有 $\zeta\in M$ 都相同的这个 (复) 维数被称做 M 的 CR – 维数 (以 $\dim_{\mathrm{CR}}M$ 表示).

例题. CR – 流形的平凡例子是*全实*[1] *流形* M, 它在所有 $\zeta\in M$ 有 $T^c_\zeta(M)=0$. 所有 C^1 类的实超曲面 $S\subset\mathbb{C}^n$ 也是 CR – 流形: 在它的每个点上有 $\dim T^c_\zeta(S)=n-1$. 所有生成流形 $M\subset\mathbb{C}^n$ 也是如此: 对它的每个点满足 (4) 中 $k=k'$ 的条件, 从而 $\dim_{\mathrm{CR}}(M)=n-k=r-n$. 所有*极大复流形*也是 CR – 流形: 对它有 $\dim_{\mathrm{CR}}M=\dfrac{1}{2}(\dim_{\mathbb{R}}M-1)$.

实二维流形 $M=\{z\in\mathbb{C}^2:z_2=|z_1|^2\}$ 则不是 CR – 流形: 对它当 $\zeta\neq 0$ 时 $T^c_\zeta(M)=0$, 而 $T^c_0(M)$ 由向量 $a\dfrac{\partial}{\partial z_1}(a\in\mathbb{C})$ 组成, 从而是条复直线 $\{z_2=0\}$.

* 证明, 对在*生成流形* (1) 上的 C^1 类函数, 柯西 – 黎曼切方程为 $\overline{\partial}f\wedge\overline{\partial}\varphi_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\varphi_k=0$. *

在复流形 $M\subset\mathbb{C}^n$ 上连同 T_ζ 和 T^c_ζ 一起对复函数进行研究时也要考虑*一般切平面* $\mathfrak{T}_\zeta(M)$, 它由形如

$$Z_\zeta=\sum_{\nu=1}^{n}a_\nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial z_\nu}+b_\nu(\zeta)\frac{\partial}{\partial\overline{z}_\nu}:Z_\zeta(\varphi_\mu)=0,\quad \mu=1,\cdots,k \tag{5}$$

的向量组成. 从 $\mathfrak{T}(M)$ 的截影, 即一般向量场, 在 CR – 流形上考虑也较方便.

设给出了 CR – 流形 $M\subset\mathbb{C}^n$, 其 $\dim_{\mathbb{R}}M=r,\dim_{\mathrm{CR}}M=l$, 并它由形 (1) 给出. M 上的复向量场的基可取为向量场

$$Z_j(\zeta)=\sum_{\nu=1}^{n}a_{\nu j}(\zeta)\frac{\partial}{\partial z_\nu},\quad j=1,\cdots,l \tag{6}$$

[1] 关于在此对不同流形所采用的术语可参看第 17 目.

其中在每点 $\zeta \in M$ 向量 $Z_j(\zeta)$ 为复线性无关并且 $Z_j(\varphi_\mu) = 0, \mu = 1, \cdots, k$ (即 $Z_j(\zeta) \in T_\zeta^c(M)$), 而一般向量场的基为 (6) 中的场 $Z_j(\zeta)$, 它们的复共轭 $\overline{Z}_j(\zeta), j = 1, \cdots, l$, 还有场

$$X_{l+j}(\zeta) = \operatorname{Re} \sum_{\nu=1}^{n} b_{\nu j}(\zeta) \frac{\partial}{\partial z_\nu}, \quad j = 1, \cdots, r-2l,$$

它们在每点 $\zeta \in M$ 属于 $T_\zeta(M)$, 并与 (6) 线性无关.

特别地, 对实超曲面 $S = \{z \in \mathbb{C}^n : \varphi(z) = 0\}$, 其维数为 $r = 2n-1$, CR – 维数 $l = n-1$, 并在 $\left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_n}\right|_S \neq 0$ 的邻域中 $\mathfrak{T}(S)$ 的截影基可取为

$$\begin{aligned} &Z_j = \frac{\partial \varphi}{\partial z_n} \frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial z_n}, \quad \overline{Z}_j = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_n} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n}, \quad j = 1, \cdots, n-1, \\ &X_n = \frac{i}{2} \sum_{\nu=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\nu} \frac{\partial}{\partial z_\nu} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\nu} \right). \end{aligned} \tag{7}$$

最后面这个场可以表示为 $X_n = \operatorname{Re} \mathbf{T}$ 的形式, 其中

$$\mathbf{T} = \sum_{\nu=1}^{n} i \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}_\nu} \frac{\partial}{\partial z_\nu} \tag{8}$$

为 S 上的向量场, 它在每点 $\zeta \in S$ 按 $T_\zeta(S)$ 中正交于 $T_\zeta^c(S)$ 的方向 (对应于 $\mathbf{T}$ 的向量 $i\overline{\nabla}\varphi$ 便是这样的, 参看第 17 目). 如果在固定点 $a \in S$ 上选取坐标使得 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_\nu} = 0, \nu = 1, \cdots, n-1$ 和 $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z_n} = 1$, 则其形象变得特别直观. 于是在这个点有 $T_a(S) = \{x_n = 0\}, T_a^c(S) = \{z_n = 0\}$ 和向量 $Z_j = \dfrac{\partial}{\partial z_j}, j = 1, \cdots, n-1$ (T_a^c 的基), 而 $X_n = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial}{\partial y_n}$.

作为在此所考虑的概念的应用例子, 我们将给出不是生成流形的 CR – 函数的简单的延拓定理 (它由韦尔斯 (Wells) 在 1969 年证明).

定理 1. 设给出了 CR – 流形 $M \subset \mathbb{C}^n$, 对其有 $\operatorname{codim}_{\mathbb{R}} M = k$ 而 $\dim_{\mathrm{CR}} M = n - k'$, 其中 $k' < k$. 于是在任意点 $a \in M$ 的充分小邻域 U 中存在生成流形 $\widetilde{M} \supset M \bigcap U, \operatorname{codim}_{\mathbb{R}} \widetilde{M} = k'$, 使得在 $M \bigcap U$ 上的任一 CR – 函数 f 可延拓为 $\widetilde{M}$ 上的 CR – 函数.

证明. 不失一般性, 取 $a = 0$ 以及在 U 中流形 M 由满足 (2) 的方程组 (1) 给出, 且 $\overline{\partial}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\varphi_k = 0$, 但 $\overline{\partial}\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \overline{\partial}\varphi_{k'} \neq 0$. 如有必要可进行 $\mathbb{C}^n$ 的线性坐标变换, 从而可假设切平面 $T_0(M)$ 与坐标 $x_1, \cdots, x_{2n-k}$ 的平面相重合 (我们设 $z_j = x_j + ix_{n+j}$), 而其余坐标记为 $y_1, \cdots, y_k$. 根据隐函数定理, M 可局部地由向量

方程 $y=\psi(x)$ 给出, 其中 ψ 为 C^1 类函数. 令 $\widetilde{\varphi}_j(x,y)=y_j-\psi_j(x), j=1,\cdots,k$, 从而 M (也是局部地) 可由方程 $\widetilde{\varphi}_1=\cdots=\widetilde{\varphi}_k=0$ 描述.

因为 $\dim T_0^c(M)=n-k'$, 故在向量 $\overline{\nabla}\widetilde{\varphi}_j(0)$ 中存在 k' 个复线性无关的向量, 并且我们就假设它们为前 k' 个. 于是在点 0 $\overline{\partial}\widetilde{\varphi}_1\wedge\cdots\wedge\overline{\partial}\widetilde{\varphi}_{k'}\neq 0$, 而这表明在某个邻域中也成立; 设就在 U 中如此. 我们考虑流形 $\widetilde{M}=\{z\in U:\widetilde{\varphi}_1(z)=\cdots=\widetilde{\varphi}_{k'}(z)=0\}$; 因为对于它有 $\dim_{\mathrm{CR}}\widetilde{M}=n-k'$, 其中 $k'=\operatorname{codim}_{\mathbb{R}}\widetilde{M}$, 故它是生成流形 (参看第 17 目), 并且显然它包含了 $M\bigcap U$.

流形 M 被分层为相互不交的流形 $M_t=\{\widetilde{\varphi}_1=\cdots=\widetilde{\varphi}_{k'}=0,\widetilde{\varphi}_{k'+1}=t_1,\cdots,\widetilde{\varphi}_k=t_{k-k'}\}$, 其中 $t=(t_1,\cdots,t_{k-k'})$ 为 $0\in\mathbb{R}^{k-k'}$ 的充分小的邻域中的点. 每个 M_t 是由 M 经平行移动了向量 a_t 得到, 且 $T^c_{\zeta+a_t}(M_t)=T^c_\zeta(M)$; 因为这些空间的维数等于 $n-k'=\dim_{\mathrm{CR}}\widetilde{M}$, 故在每个点 $z\in M_t$ 有 $T^c_z(M_t)=T^c_z(\widetilde{M})$.

我们以条件 $\widetilde{f}(\zeta+a_t)=f(\zeta)$ 来给出 f 到 $\widetilde{M}$ 上的延拓, 其中 $\zeta\in M$. 因为 f 在 M 上满足柯西－黎曼切条件, 故 $\overline{Z}_\zeta(f)$ 对任意复切向量 $Z\in T^c_\zeta(M)$ 和任意点 $\zeta\in M$ 为 0 (参看第 31 目). 但是由此知, 对任意 $Z\in T^c_{\zeta+a_t}(\widetilde{M})$ 具有 $\overline{Z}_{\zeta+a_t}(\widetilde{f})=\overline{Z}_\zeta(f)=0$, 即 $\widetilde{f}$ 为 $\widetilde{M}$ 上的 CR－函数. □

因此, 对于不是生成流形的流形, CR－函数到生成流形局部延拓以简单的平移产生. 从生成流形上的 CR－函数延拓问题却是极其复杂. 它的一个特殊情形, 即对实超曲面已在第 52 目中考虑过 (参看定理 1). 对于具有大的余维的流形, 它的其他方面的性质可参看辛钦 (G. M. Khenkin) 和丘尔卡 (E. M. Chirka) 在文集《现代数学问题》中的综述文章 *Boundary properties of holomorphic functions of several complex variables* (vol.4, VINITI, Moscow, 1975, pp.13-141; 英译本 J. Soviet Math. **5** (1976), no. 5, 612-687).

我们现在转而注意两个向量场的括号概念. 设 CR－流形像前面那样由方程 (1) 及条件 (2) 定义, 但 $\varphi_j\in C^2(U)$. 如果

$$Z=\sum_{\mu=1}^n a_\mu(\zeta)\frac{\partial}{\partial z_\mu},\quad Z(\varphi_j)=0,\quad j=1,\cdots,k,\tag{9}$$

为 M 上的复向量场, 而 $\overline{Z}$ 为它的复共轭场, 则复合

$$\begin{aligned}Z\circ\overline{Z}&=\left(\sum_{\mu=1}^n a_\mu\frac{\partial}{\partial z_\mu}\right)\left(\sum_{\nu=1}^n \bar{a}_\nu\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\nu}\right)\\&=\sum_{\nu=1}^n\left(\sum_{\mu=1}^n a_\mu\frac{\partial\bar{a}_\nu}{\partial z_\mu}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{z}_\nu}+\sum_{\mu,\nu=1}^n a_\mu\bar{a}_\nu\frac{\partial^2}{\partial z_\mu\partial\bar{z}_\nu}\end{aligned}$$

由于第二项的原因不是一个向量场. 为了消去它, 考虑换位子

$$\begin{aligned}[Z,\overline{Z}] &= Z\circ\overline{Z}-\overline{Z}\circ Z\\ &=\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu}\frac{\partial\bar{a}_{\nu}}{\partial z_{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial\bar{z}_{\nu}}-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{n}\bar{a}_{\mu}\frac{\partial a_{\nu}}{\partial\bar{z}_{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial z_{\nu}},\end{aligned}$$

称其为向量场 Z 和 $\overline{Z}$ 的泊松括号: 在计算中, 该和的多余部分被消去, 得到了一般向量场, 即从 $\mathfrak{T}(M)$ 的截影. 但是容易从它得到一个实向量场, 即 $T(M)$ 的截影: 只要将 $[Z,\overline{Z}]$ 换为 $i[Z,\overline{Z}]$, 于是 $\dfrac{\partial}{\partial z_{\nu}}$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}_{\nu}}$ 的系数为复共轭, 并且对应于在本目开始部分所谈及那样, 我们可以替代 $i[Z,\overline{Z}]$ 而去考虑场

$$W=-\sum_{\nu=1}^{n}\left(\sum_{\mu=1}^{n}i\bar{a}_{\mu}\frac{\partial a_{\nu}}{\partial\bar{z}_{\mu}}\right)\frac{\partial}{\partial z_{\nu}},\tag{10}$$

对其只有 $\operatorname{Re}W(\varphi_j)=0, j=1,\cdots,k$. 我们也称这个场为 Z 和 $\overline{Z}$ 的泊松括号.

对于超曲面, 泊松括号原来与莱维形式相关.

定理 2. 如要 $S=\{z\in U:\varphi(z)=0\}$ 为 C^2 类的实超曲面, $Z:Z(\varphi)=0$ 为 S 上的复向量场, 而 $\mathbf{T}$ 为在 $T(S)$ 上形如 (8) 的向量场, 它正交于 $T^c(S)$, 则在每个点 $\zeta\in S$ 埃尔米特内积

$$(W,\mathbf{T})_{\zeta}=H_{\zeta}(\varphi,Z),\tag{11}$$

其中 W 为泊松括号 (10), 而 H 为函数 φ 的莱维形式.

证明. 如果 W 为形如 (10) 的向量场, 而 $\mathbf{T}$ 形如 (8), 则

$$(W,\mathbf{T})=-\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\bar{a}_{\nu}\frac{\partial a_{\mu}}{\partial\bar{z}_{\nu}}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\mu}}\tag{12}$$

(我们在这里改变了指标 μ 和 ν 的位置). 但是由条件

$$Z(\varphi)=\sum_{\mu=1}^{n}a_{\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\mu}}=0,$$

这是 Z 所满足的, 通过微分 [1] 我们得到

$$\sum_{\mu=1}^{n}\left(\frac{\partial a_{\mu}}{\partial\bar{z}_{\nu}}\frac{\partial\varphi}{\partial z_{\mu}}+a_{\mu}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_{\mu}\partial\bar{z}_{\nu}}\right)=0,\quad \nu=1,\cdots,n.$$

---

[1] 当进行微分时, 我们假设向量场 Z 已延拓到 S 的邻域中, 并满足条件 $Z(\varphi)=0$. 例如可以这样来做到: 设 $\widetilde{Z}$ 为场 Z 的任意一个 C^1- 延拓, 而 $\mathbf{T}$ 为形如 (8) 的场, 于是场

$$Z=\widetilde{Z}-\frac{(\widetilde{Z},\mathbf{T})}{|\nabla\varphi|^2}$$

便是我们想要的. 事实上, 条件 $Z(\varphi)=0$ 等价于 $(Z,\mathbf{T})=0$, 且显然在 S 的邻域中成立, 这是因为 $(\mathbf{T},\mathbf{T})=|\nabla\varphi|^2$. 此外, $\widetilde{Z}|_S=Z$ 并在此 $(Z,\mathbf{T})=0$, 故在 S 上这个场等于 Z.

对它们乘以 $\bar{a}_\nu$ 并相加便得到

$$-\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\bar{a}_\nu\frac{\partial a_\mu}{\partial\bar{z}_\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial z_\mu}=\sum_{\mu,\nu=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_\mu\partial\bar{z}_\nu}a_\mu\bar{a}_\nu.$$

由莱维形式的定义 (参看第 37 目) 这就是它在向量 Z 上的值, 故而 (12) 等同于 (11). □

注. 如果函数 φ 的莱维形式在复切向量 $Z\neq 0$ 上不为零 (例如, 如果 S 为严格伪凸曲面, 参看第 39 目), 则根据定理 2 知, 在每个点括号 $i[Z,\overline{Z}]$ (更准确地说是对应于它的向量 W) 有在 $\mathbf{T}$ 上的非零投影, 它在 $T(S)$ 中正交于切平面 $T^c(S)$, 从而括号 $i[Z,\overline{Z}]$ 横截于 $T^c(S)$ (图 56). 这个注释在下一目中有用.

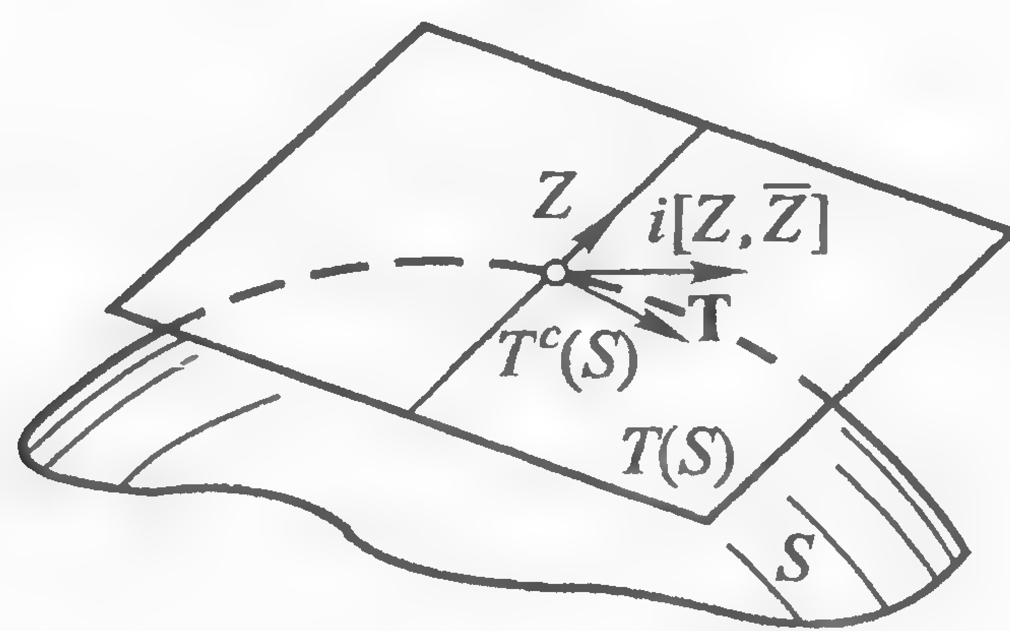


图 56

65. 函数的边界性质

在这里我们将考虑上一目所讨论的概念的一些应用. 我们先从图马洛夫 (A. E. Tumanov)[1] 的一个结果开始, 在其中利用了在超曲面上的向量场结构.

定理 1. 设 $D=\{z\in\mathbb{C}^n:\varphi(z)<0\}$ 为其边界 S 是 C^2 类的区域, E 为 S 的具有 $(2n-1)$ 维正体积的子集, 又, 莱维形式对于所有 $\zeta\in E, Z\in T^c_\zeta(S), Z\neq 0$ 有

$$H_\zeta(\varphi,Z)\neq 0. \tag{1}$$

如果函数 $f\in C^2(\overline{D})$ 并在 D 中全纯, 在 E 上为实, 则它为常数.

证明. 由于 f 在 S 上满足柯西 – 黎曼切条件, 故对 S 上的任意复向量场有 $Z(f)=0$. 在集合 E 上 f 为实, 也成立等式 $\overline{Z}(f)=0$, 从而对任意 $Z\in T^c(S)$, 有括号 $[Z,\overline{Z}](f)=0$. 但是根据上一目末尾的注知, 由 (1) 得到在 E 上括号 $[Z,\overline{Z}]$ 横截于 $T^c(S)$. 因此在 E 上一般切向量 $\mathbb{Z}\in\mathfrak{T}(S)$ 被表示为形如 T^c 和 $\overline{T}^c$ 中向量的和, 并且与括号成复比例的向量也是如此, 从而对所有 $\zeta\in E$ 和任意 $Z\in\mathfrak{T}_\zeta(S)$, 有 $\widetilde{Z}(f)=0$. 由此得出, 在所有 $\zeta\in E$, f 对 $T_\zeta(S)$ 中所有方向的导数都等于 0, 即 $f|_E=$ 常数.

[1] A. M. Tumanov, *On boundary values of holomorphic functions of several complex variables*, Uspekhi Mat. Nauk **29** (1974), no. 4, 158-159. (Russian)

在最简单的情形, 即 E 包含了 S 的开子集中, 考虑 f 在与这个子集的相交复直线上的限制并对单变函数在边界的唯一性定理, 由此容易得出结论: 在 D 的与该子集相邻接的邻域中 $f=$ 常数, 从而在 D 中处处为常数. 这个结论对于 $\mathrm{mes}_{2n-1}E>0$ 的情形同样成立; 详细的证明可在阿慈恩伯格 (L. A. Aĭzenberg)[1] 的文章中找到. □

由定理 1 知, 如果 $D\subset\mathbb{C}^n, n>1$, 为严格伪凸域, 而函数 $f\in\mathscr{O}(D)\bigcap C^2(\overline{D})$, 使得在集合 $E\subset\partial D$ 上 $|f|=c=$ 常数, 其中 $\mathrm{mes}_{2n-1}E>0$, 则 $f\equiv c$ (事实上, 当 $c=0$ 时此论断由边界的唯一性定理得到, 而当 $c\neq 0$ 时可将定理 1 应用函数 $g=\ln|f|$, 其在 D 与 E 的邻域的交集上全纯.) 当 $n=1$ 时这个结果不再成立: 在单位圆盘 $U\subset\mathbb{C}$ 的情形时的反例是线性分式函数的有限积, 这是 U 的自同构. 当 $n>1$ 时, 严格伪凸的假设条件是本质性的, 它保证了 (1) 成立, 而缺少了它此结果也不再为真: 在双圆盘 U^2 边界的开子集 $\{|z_1|=1,|z_2|<1\}$ 上函数 $f(\zeta)=z_1$ 的模等于 1, 但 f 并非常数.

在单变量函数的边界性质的理论中, 所谓的在圆盘 U 中的内函数起了作用, 这是一个在 U 中非常值的全纯和有界的函数, 它的模当沿半径趋向 $S=\partial U$ 时几乎处处趋向于 1. 图马洛夫 (Tumanov) 的定理表明当 $n\geqslant 1$ 时, 在严格伪凸区域中不存在在区域闭包中二阶光滑的内函数. 二阶光滑性的假设在后来被许多作者减弱了, 例如萨都拉叶夫 (A. Sadullaev) 在 1976 年证明了: 任意在严格伪凸域 $D\subset\mathbb{C}^n, n>1$ 中全纯而在某个非空开子集 $E\subset\partial D$ 中有径向极限并且其模为 1 的函数是个常数.

有一个被叫做内函数猜想, 它说的是在空间 $\mathbb{C}^n, n>1$ 中的严格伪凸域里没有内函数. 但是在 1982 年列宁格勒的数学家阿历克山大罗夫 (A. B. Aleksandrov) 证明了 [2] 对任意 n, $\mathbb{C}^n$ 中的球甚至都存在内函数.

后面的性质反映了空间 $\mathbb{C}^n$ 当 $n>1$ 时其中区域的边界的结构特点. 在这样边界上的所有方向中可以区分开切方向和正交于这个复平面的 $\mathbf{T}$ 的方向. 最后发现, 全纯函数的边界行为在不同类型的方向上本质上不相同.

作为出现所说的这些差异的例子, 我们给出由丘尔卡所得到的结果 [3]. 为了叙述它, 我们以 $\nu_\zeta=\dfrac{\overline{\nabla_\zeta\varphi}}{|\nabla_\zeta\varphi|}$ 记 ∂D 在点 ζ 的一个单位法向量, 以 $\delta_\zeta(z)=|\mathrm{Re}(z-\zeta,\nu_\zeta)|$ 记点 z 到实切平面 $T_\zeta(\partial D)$ 的距离, 并对固定的 $\alpha,k>0$ 和 $\varepsilon, 0<\varepsilon<1$, 考虑区域

$$K_\zeta=\{z\in D:|(z-\zeta,\nu_\zeta)|<(1+\alpha)\delta_\zeta(z),|z-\zeta|^2<k\delta_\zeta^{1+\varepsilon}(z)\}. \tag{2}$$

在方向 T_ζ^c 中, 这个区域切于 ∂D, 而在方向 $\mathbf{T}$ 中与它构成锐角 (图 57). 事实

[1] L. A. Aĭzenberg, *Some boundary properties of analytic functions of several complex variables*, Research on Contemporary Problems of the Theory of Functions of a Complex Variable, Fizmatgiz, Moscow, 1961, pp. 239-241. (Russian)

[2] A. B. Aleksandrov, *The existence of inner functions in the ball*, Mat. Sb. **118** (**160**) (1982), no. 2, 147-163; 英译本, Math. USSR-Sb. **46** (1983), 143-159.

[3] E. M. Chirka, *The theorems of Lindelöf and Fatou in* $\mathbb{C}^n$, Mat. Sb. **92** (**134**) (1973), no.4, 622-644; 英译本, Math. USSR-Sb. **21** (1973), 619–639.

上, 如果 z 属于图 57 中的超平面 I, 它通过 ν_ζ 和 T^c_ζ, 于是 $|(z-\zeta,\nu_\zeta)|=\delta_\zeta(z)$, 从而 K_ζ 的定义中的第一个条件自动地满足, 而第二个条件给出了 $\xi^2+\eta^2<k\eta^{1+\varepsilon}$ (ξ 和 η 的意思从图上可清楚看出); 交集 $\partial K_\zeta\bigcap$I 是曲面 $\xi^2+\eta^2=k\eta^{1+\varepsilon}$, 它在点 ζ 切于 T^c_ζ. 如果 z 属于超平面 II, 它通过 ν_ζ 和 $\mathbf{T}_\zeta$, 于是 $|(z-\zeta,\nu_\zeta)|=|z-\zeta|$, 故对充分靠近 ζ 的 z, 在 K_ζ 定义中的第二个条件可由第一个条件推出, 而第一个给出了 $\xi^2+\eta^2<(1+\alpha)^2\eta^2$; 交集 $\partial K_\zeta\bigcap$ II 靠近 ζ, 是一对相交的平面 $\xi=\pm\sqrt{2\alpha+\alpha^2}\eta$.

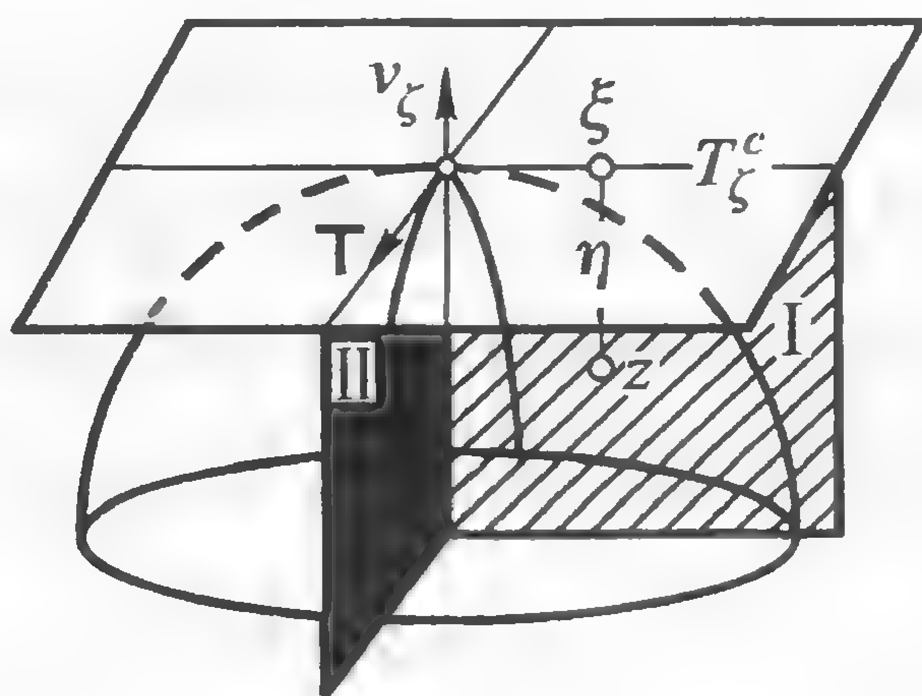


图 57

在单复变函数论中有一个定理, 按此定理, 在区域 D 中的全纯和有界的函数且当按照法方向 $\nu_\zeta, z\to\zeta\in\partial D$ 时有极限, 则按任意不切于 ∂D 的方向 $z\to\zeta$ 时它也趋向于同一极限 (林德勒夫 (Lindelöf) 定理). 像简单例题所表明的, 沿切方向的趋近必须排除: 函数 $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$ 在圆盘 $\{|z-1|<1\}$ 中全纯且有界, 而在边界点 $z=0$ 它沿非切路径的极限等于零, 而沿切路径时的极限却不存在. 当 $n>1$ 时情形则有所变化, 它允许沿某些切方向的趋向, 即复切方向. 我们有

定理 2 (丘尔卡). 如果在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中函数 f 全纯与有界, 且沿实的法方向 $z\to\zeta\in\partial D$ (即沿直线 $z=\zeta+t\nu_\zeta, t\in\mathbb{R}$) 它有极限 A, 则当沿点 $z\in K_\zeta\bigcap D, z\to\zeta$ 时它有同一个极限, 其中 K_ζ 为在 (2) 中定义的区域.

证明. 为简单起见, 我们将对区域 D 为单位球的情形进行证明 (一般情形可参看前面所引述过的丘尔卡的文章). 不失一般性, 设 $\zeta=('0,1)$; 因为这里的 $\varphi(z)=|z|^2-1$, 故 $\triangledown\varphi=\bar{z}$ 及 $\nu_\zeta=\zeta$. 以 T^c 表示在点 ζ 切于 ∂B 的复切平面 (在所做的 ζ 的选取下它由 $z_n=1$ 定义) 而以 $T^c_\lambda=\{('z,1-\lambda):{}'z\in\mathbb{C}^{n-1}\}$ 表示平行于 T^c 的一个平面.

我们来弄清楚交集 $B_\lambda=T^c_\lambda\bigcap B$ 的样子. 为此, 我们用 ζ 引进 ∂B 的法线 $N^c=\{('0,t):t\in\mathbb{C}\}$; 它与 T^c_λ 的交点为 $c_\lambda=('0,1-\lambda)$. 交集 $T^c_\lambda\bigcap\partial B$ 由条件 $|'z|^2+|1-\lambda|^2=1, z_n=1-\lambda$ 定义, 其中的第一个等式可改写为 $|'z|^2=2\mathrm{Re}\,\lambda-|\lambda|^2$. 故而 B_λ 是在平面 T^c_λ 中以 c_λ 为中心, 半径为 $R_\lambda=\sqrt{2\mathrm{Re}\,\lambda-|\lambda|^2}$ 的球:

$$B_\lambda=\{z\in T^c_\lambda:|z-c_\lambda|<R_\lambda\}. \tag{3}$$

现在来弄清交集 $B'_\lambda=T^c_\lambda\bigcap K_\zeta$ 的样子. 在我们的情形下定义 K_ζ 的不等式是这样的: $|z_n-1|<(1+\alpha)|\mathrm{Re}\,(z_n-1)|, |'z|^2+|z_n-1|^2<k|\mathrm{Re}\,(z_n-1)|^{1+\varepsilon}$. 因为在 T^c_λ

上 $z_n-1=-\lambda$, 故 B'_λ 由不等式 $|\lambda|<(1+\alpha)|\mathrm{Re}\,\lambda|, |'z|^2<k|\mathrm{Re}\,\lambda|^{1+\varepsilon}-|\lambda|^2$, 即也是平面 T^c_λ 中的一个球, 具相同的中心以及半径 $R'_\lambda=\sqrt{k|\mathrm{Re}\,\lambda|^{1+\varepsilon}-|\lambda|^2}$:

$$B'_\lambda=\{z\in T^c_\lambda:|z-c_\lambda|<R'_\lambda\},\quad |\lambda|<(1+\alpha)|\mathrm{Re}\ \lambda|. \tag{4}$$

球 B'_λ 和 B_λ 的半径的平方比为

$$\left(\frac{R'_\lambda}{R_\lambda}\right)=\frac{k|\mathrm{Re}\,\lambda|^{1+\varepsilon}-|\lambda|^2}{2\mathrm{Re}\,\lambda-|\lambda|^2}\leqslant\frac{k|\mathrm{Re}\,\lambda|^2}{2-|\lambda||\lambda/\mathrm{Re}\,\lambda|},$$

而因为我们有 $|\lambda/\mathrm{Re}\,\lambda|<1+\alpha$, 故当 $\lambda\to 0$ 时 $R'_\lambda/R_\lambda\to 0$.

因为由在 B 中 f 为有界的假设条件, 设 $|f(z)|\leqslant M$, 故根据第 9 目的施瓦茨引理, 对所有 $z\in B_\lambda$ 我们有 $|f(z)-f(c_\lambda)|\leqslant\dfrac{2M}{R_\lambda}|z-c_\lambda|$, 而如果 $z\in B'_\lambda$, 则 $|f(z)-f(c_\lambda)|\leqslant 2MR'_\lambda/R_\lambda$. 点 c_λ 属于法线 N^c_ζ 且当 $\lambda\to 0$ 时趋向于 ζ. 按照对单变量的林德勒夫定理并将其应用于 $N^c_\zeta\bigcap B$, 由当沿实法线 $z\to\zeta$ 时 $f(z)$ 极限的存在性以及条件 $|\lambda|<(1+\alpha)|\mathrm{Re}\,\lambda|$ 也得到了 $\lim\limits_{\lambda\to 0}f(c_\lambda)=A$ 的存在性. 因为 $\dfrac{R'_\lambda}{R_\lambda}\to 0$, 故由最后面的这个不等式我们有, 当 $z\in K_\zeta, z\to\zeta$ 时 $f(z)$ 有同一极限. □

我们注意到, 对于任意切方向定理的断言不再正确: 函数 $f(z)=\dfrac{z_2^2}{1-z_1}$ 在单位球 $B\subset\mathbb{C}^2$ 中全纯并有界, 这是因为 $|f(z)|\leqslant\dfrac{1-|z_1|^2}{1-|z_1|}\leqslant 2$, 而当 z 沿曲面 $1-z_1=\lambda z_2^2$ 的在点 ζ 切于 ∂B 地趋于边界点 $\zeta=(1,0)$ 时具有不同的极限. 对于具不光滑边界的区域定理也不成立: 函数 $f(z)=\dfrac{z_1}{z_2}$ 在区域 $\{z\in\mathbb{C}^2:|z_1|<|z_2|\}$ 全纯并有界, 但当沿不同直线 $\{z_1=\lambda z_2\}z\to(0,0)$ 时有不同的极限.

注意一下在丘尔卡定理中所要求的函数有界性条件可以自动地由一些更少的要求所保证是有趣的. 这类结果中的第一个是由德罗热诺夫 (Yu. N. Drozhzhinov) 和扎维雅洛夫 (B. I. Zav′yalov) 在 1982 年得到的, 他们证明了在一个区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 的全纯函数, 如果它在某个实 $(n+1)$ 维的并与 D 的边界相交的流形上有界, 则它在非切方向趋向边界时有界. 不久这个结果由胡鲁莫夫 (Yu. V. Khurumov) 给予了强化 [1]:

定理. 如果函数 f 在区域 $D\subset\mathbb{C}^n, n>1$ 全纯, 并具有 C^1 类边界, 又对点 $\zeta\in\partial D$ 存在 n 维 C^2 类生成流形 $M\subset D\bigcup\{\zeta\}$, 则由 f 在 $M\setminus\{\zeta\}$ 上的有界性可推导出, 它在任意以 ζ 为顶点的非切的锥与这个点的邻域的交集上有界.

由此定理可推出, 在定理的条件下林德勒夫定理的结果仍然有效: 沿 D 中某个非切路径趋向点 ζ 的极限的存在性可以得到沿任意通向这个点的非切路径达到同

[1] YU. V. Khurumov, *On Lindelöf's theorem in* $\mathbb{C}^n$, Dokl. Akad. Nauk SSSR **273** (1983), no.6, 1325-1328; 英译本, Soviet Math. Dokl. **28** (1983), 806-809.

一极限的结论. 这个结果在 $n=1$ 时不成立: 函数 $f(z)=e^{-1/z^4}$ 在区域 $D=\{z\in\mathbb{C}:x<y^2\}$ 与 $M=\{y=0\}$ 的交集上有界, 在沿实轴 $z\to 0$ 时它趋向 0, 但在射线 $\arg z=3\pi/4$ 通向 $z=0$ 时无界.

如果在所证明的这个定理中复切方向起着所谓的正面作用 (它可以在靠近边界时切于它而同时保持了函数的法向极限值), 那么在某一些问题中它们却起了负面的作用. 我们用波列茨基 (E. A. Poletskiĭ) 的例子来解释这点.

例题. $\mathbb{C}^2$ 中的复曲线 $\{z_1^2+z_2^2=1\}$ 沿 $\gamma=\{z\in\partial B:\operatorname{Im}z_1=\operatorname{Im}z_2=0\}$ 这条实一维的曲线切于球面 $\partial B=\{|z_1|^2+|z_2|^2=1\}$ (γ 是在 $\mathbb{C}^2$ 的实子空间中的单位圆 $x_1^2+x_2^2=1$).

在点 $z\in\partial B$ 的复切方向由向量 $u=\overline{z}_2\dfrac{\partial}{\partial z_1}-\overline{z}_1\dfrac{\partial}{\partial z_2}$, 而因为 z_1 和 z_2 在 γ 上为实的, 故在 γ 的点上这个方向等同于方向 $x_2\dfrac{\partial}{\partial x_1}-x_1\dfrac{\partial}{\partial x_2}$, 它切于 γ. 故而在它的每个点上 γ 有复切方向.

映射 $f:B\to\mathbb{C}^2$ 的坐标为

$$f_1(z)=z_1^2+z_2^2,\quad f_2(z)=z_1(z_1^2+z_2^2-1)\tag{5}$$

并其雅可比 $J_f(z)=2z_2(1-z_1^2-z_2^2)$ 在 $B\setminus\{z_2=0\}$ 中局部双全纯, 特别地, 它在某个严格伪凸域 $D\subset B$ 中为双全纯, 其中的这个区域的边界部分为球面 ∂B 中包含曲线 γ 一段的一块. 映射 f 连续地延拓到 $\overline{D}$ 中, 并且把属于 ∂D 的曲线 γ 那一段收缩为点 $(1,0)$. 当然, 像 $f(D)=G$ 不可能是个严格伪凸域, 这是因为在这种情形下, 逆映射 f^{-1} 按照第 63 目的定理 1, 将在 $\overline{G}$ 中连续, 从而不能把点 $(1,0)$ 拉伸为曲线 γ.

我们可清楚看出, 非严格伪凸域的边界可以包含有以全纯映射收缩成一个点的复曲线. 已给出的这个例子表明在严格伪凸域的边界上, 沿复切方向引出的曲线可以同样具有所谓负面的性质. 因此, 高维区域的双全纯映射的边界性质与平面区域的共形映射的性质有本质区别.

66. 唯一性定理和延拓

我们从定义着手: 设给出了区域 $D\subset\mathbb{C}^n$; 称集合 $M\subset\overline{D}$ 为**唯一性集合**是说, 如果对任意在 D 中全纯并在 $D\bigcup M$ 中连续的函数 f 由条件 $f|_M=0$ 可以推出 $f\equiv 0$. 条件 $f\in C(D\bigcup M)$, 当然, 重要的只是 $M\bigcap\partial D\neq\varnothing$ 的情形.

由内点组成的唯一性集合的最简单例子是区域的非空开子集或者它与实子空间的交 (见第 5 目). 这些例子可推广为

定理 1. 任意生成子流形 $M\subset D$ 是唯一性集合.

证明. 因为不恒为零的全纯函数的零点构成了余维 1 的解析集, 故只要证明 M 不可能属于这样的集合即可. 设若相反, $M\subset A,\operatorname{codim}A=1$; 如果 $z\in M$ 为正则

点, 则 $T_z(M) \subset T_z(A)$, 而后者是个复超平面. 但是对于生成流形则不是如此 (见第 17 目), 从而 M 应完全属于 A 的临界点集 A^c. 集合 A^c 也是解析的, 但余维 $k \geqslant 2$, 并且按前面讨论, 我们得到, M 应该属于这个集合 A^c 的临界点集它是解集, 其余维 $k_1 \geqslant 3$. 经过有限次这种论证我们便导出了矛盾: 我们得出 M 应该属于一个实维小于 $\dim_{\mathbb{R}} M$ 的集合. □

转到边界集的讨论, 我们先从解释应如何理解在区域边界上函数仅仅连续时的柯西 – 黎曼切条件开始. 考虑更为一般的情形, 此时 $M \subset \mathbb{C}^n$ 为任意 CR – 流形, $\dim_{\mathbb{R}} M = r, \dim_{\mathrm{CR}} M = l > 0$. 显然, $2l \leqslant r$, 并且如果 $2l = r$, 则 $T_\zeta^c(M) = T_\zeta(M)$, 其中 $\zeta \in M$ 为任意点, 又由第 17 目的莱维 – 奇维塔定理知流形 M 是复的.

如同第 64 目中所表明的那样, 在 M 上的一般切向量场具有以下结构: 存在由 l 个复向量场 Z_j, l 个反复向量场 $\overline{Z}_j$, 又, 如果 $2l < r$, 还有 $r - 2l$ 个实向量场 X_j 组成的基. 对应于此, 双阶 (l, m) 的微分形式在 $T_\zeta(M)$ 上的限制在 M 的每个点上有沿 Z_j 方向的 l 个微分, 沿 $\overline{Z}_j$ 方向的 l 个以及沿 X_j 方向的 $m - l$ 个微分, 其中的 $m = r - l \geqslant l$. 双阶为 $(l, m-1)$ 的形式同样的限制是一些形式的和, 它们中的每一个缺少了一个沿 $\overline{Z}_j$ 方向的微分, 而其余方向的微分都出现.

以 $\mathscr{D}^{p,q}(M)$ 记双阶 (p, q) 的微分形式的集合, 其中的这些形式的系数在 M 的邻域中无限光滑. 于是任意 CR – 函数有

$$\overline{\partial} f \wedge \alpha|_M = 0, \quad \alpha \in \mathscr{D}^{(l,m-1)} \text{ 为任意}. \tag{1}$$

事实上, 因为根据上面所指出的, $\alpha|_M$ 由那些包含沿除了 $\overline{Z}_j$ 外的所有基方向的微分的项组成, 故在 $\overline{\partial} f$ 与这个形式的乘积中需要考虑的只是 f 沿那些缺失方向的导数. 但是在 M 上的柯西 – 黎曼切条件意味着对于所有 $j = 1, \cdots, l$, 有 $\overline{Z}_j(f) = 0$ (见第 31 目). 故 (1) 成立.

反之, 如果条件 (1) 被满足, 则由形式 α 的任意性可得到对所有 $j = 1, \cdots, l$, 有 $\overline{Z}_j(f) = 0$, 就是说 f 为 M 上的 CR – 函数. 故 (1) 是柯西 – 黎曼切条件的一种形式. 显然, 在这个条件下, $\mathscr{D}^{l,m-1}(M)$ 可以换成是 $\mathscr{D}^{l,m-1}(M)$ 中所有具紧支集的形式的集合 $\mathscr{D}_0^{l,m-1}(M)$, 即其系数在边界 ∂M 的邻域中恒为零的形式的集合 (对每个形式有自己的邻域).

利用广义函数论的思想可以修改条件 (1), 使得可将它应用到任意的连续 (甚至只沿 M 局部可积的) 函数. 为此, 先局限于函数 $f \in C^1(M)$, 并注意到对于任意 $\alpha \in \mathscr{D}^{l,m-1}(M)$, 有 $\partial(f\alpha)|_M = 0$, 这是因为 $f\alpha|_M$ 包含了所有的沿方向 Z_j 的微分. 故在 M 上有 $d(f\alpha) = \overline{\partial}(f\alpha) = \overline{\partial} f \wedge \alpha + f \overline{\partial} \alpha$, 并由斯托克斯定理, 如果 $\alpha \in \mathscr{D}_0^{l,m-1}(M)$, 即在 M 的边界上 $\alpha = 0$, 则

$$\int_M \overline{\partial} f \wedge \alpha = \int_{\partial M} f\alpha - \int_M f \overline{\partial} \alpha = -\int_M f \overline{\partial} \alpha.$$

在此基础上, 可以说 f 满足在 M 上的柯西 - 黎曼弱条件, 这是指它局部地在 M 上可积并且对任意 $\alpha \in \mathscr{D}_0^{l,m-1}(M)$

$$\int_M f\bar{\partial}\alpha = 0. \tag{2}$$

再回到边界的唯一性集合. 我们记得, 这种集合是区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 边界的一个任意的 $(2n-1)$ 维子集合 M (这可用把函数限制到于 M 相交的复直线上加以证明; 参看第 65 目). 在 ∂D 中低维的子集中一些也是唯一性集合, 而一些则不是 (单位双圆盘 U^2 的骨架是个唯一性集合, 而 $\{z \in \partial U^2 : z_1 = 1\}$ 则不是, 虽说两个集合都是实二维的流形). 成立下面的边界唯一性集合定理.

定理 2. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为具 C^2 类边界的区域, 而 M 为 ∂D 中具相同光滑性的子集. 如果 M 为生成流形, 则它是唯一性集合.

这个定理由平丘克在 1974 年所证明; 不可能在此进行它的证明 [1)], 我们将只指出它基于这样的事实, 即可粘合位于区域中的全纯圆盘到 M 上, 而由这些圆盘构造出一个生成流形 $\overline{M} \subset D$, 使得所考虑的函数在其上为零, 然后再利用定理 1.

* 1. 证明在 $\mathbb{C}^n$ 中的实余维 2 的 C^1 – 流形, 如果它不在任何一个点为生成的, 则它是个超曲面 [提示: 利用第 17 目的莱维 – 奇维塔定理.]

2. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为具 C^2 – 边界的区域, 它不包含复的超曲面 (例如, D 为严格伪凸域). 证明任意的 C^2 – 子流形 $M \subset \partial D, \dim_{\mathbb{R}} M = 2n-2$, 是个唯一性集合. [提示: 利用上面的题 1 和定理 2.] *

边界的唯一性集合定理可以推广到全纯映射. 设 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为具有光滑边界的区域, $E \subset \partial D$ 为生成流形, 而 $f : \overline{D} \to \mathbb{C}^m$ 为在 D 中全纯而在 $\overline{D}$ 中连续的映射. 如果 $M = f(E)$ 为一个薄集 (在其意义下表明存在在 M 的邻域中的多重次调和函数 $u \not\equiv -\infty$, 并使得 $u|_M \equiv -\infty$), 则 f 是一个退化映射, 即 $f(D)$ 不包含内点 [2)].

最后还要考虑在一个重要定理的推广上, 这是所谓的嵌入边定理, 它也是由平丘克得到的 [3)]. 这个定理由博戈柳博夫 (N. N. Bogolyubov) 在 1956 年证明, 它在分析和数学物理中有许多重要的应用.

---

1) S. I. Pinchuk, *A boundary uniqueness theorem for holomorphic functions of several variables*, Mat. Zametki **15** (1974), 205-212; 英译本, Math. Notes **15** (1974), 116-120. 这个定理依据另一个想法的证明可见 R. A. Aĭrapetyan 和 G. M. Khenkin 的论文, *Analytic continuation of CR-functions through the "edge of the wedge"*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **259** (1981), no.4, 777-781; 英译本, Soviet Math. Dokl. **24** (1981), 128-132.

2) 参看平丘克 (Pinchuk) 前面定理 2 下面的脚注, 也可参看 A. Sadullaev, *A boundary uniqueness theorem in* $\mathbb{C}^n$, Mat. Sb. **101 (143)** (1976), no.4, 568-583; 英译本, Math. USSR-Sb. **30** (1976), 501-514.

3) S. I. Pinchuk, *Bogolyubov's "edge-of-the-wedge" theorem for generating manifolds*, Mat. Sb. **94 (136)** (1974), no.3, 468-482; 英译本, Math. USSR-Sb. **23** (1974), 441-455.

我们来叙述平丘克结果的一种简化形式. 设在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中给出了 n 个实函数 $\varphi_j \in C^2(D)$, 使得在集合

$$M = \{z \in D : \varphi_1(z) = \cdots = \varphi_n(z) = 0\} \tag{3}$$

上有 $d\varphi_1 \wedge \cdots \wedge d\varphi_n \neq 0$, 且此集合非空. 这表明 $S_j = \{z \in D : \varphi_j(z) = 0\}$ 相交于一般位置, 并且它们的交集 M 为实 n 维流形.

定理 3. 如果 M 是生成流形, 且函数 f^+ 和 f^- 分别在区域

$$\begin{aligned} D^+ &= \{z \in D : \varphi_1(z) > 0, \cdots, \varphi_n(z) > 0\}, \\ D^- &= \{z \in D : \varphi_1(z) < 0, \cdots, \varphi_n(z) < 0\} \end{aligned} \tag{4}$$

中全纯, 并连续地延拓到 M 上, 而在 M 上它们的值相等: $f^+|_M = f^-|_M$, 则 f^+ 和 f^- 可延拓为在 M 的邻域中的全纯函数 f.

证明. 我们局限于 $n = 2$ 的情形, 并记 $U_j = \{z \in D : \varphi_j(z) > 0\}, U_{-j} = \{z \in D : \varphi_j(z) < 0\}, j = 1, 2$; 又设另外的条件, 即 $f^\pm$ 被延拓到 $\overline{D}^\pm$ 上, 为 C^1 类函数. 区域 $U_{\pm 1}, U_{\pm 2}$ 构成了 $D \backslash M$ 的开覆盖, 我们又令 $h_{12} = f^+, h_{-1-2} = -f^-, h_{-12} = h_{21} = 0$. 因为 $U_{12} = U_1 \bigcap U_2 = D^+, U_{-1-2} = U_{-1} \bigcap U_{-2} = D^-$, 而三重交为空 (图 58), 故 $\{h_{\alpha\beta}\}, \alpha, \beta = \pm 1, \pm 2$ 是个全纯上闭链 (参看第 44 目). 让我们先假定第一库赞问题有解, 即存在函数 $h_\alpha \in \mathscr{O}(U_\alpha)$, 使得 $h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$, 或者更详细地,

$$\begin{aligned} f^+ &= h_{12} = h_2 - h_1, \\ f^- &= -h_{-1-2} = h_{-1} - h_{-2}, \\ 0 &= h_{-21} = h_1 - h_{-2}, \\ 0 &= h_{-12} = h_2 - h_{-1}, \end{aligned} \tag{5}$$

由最后面两个方程式我们得到函数

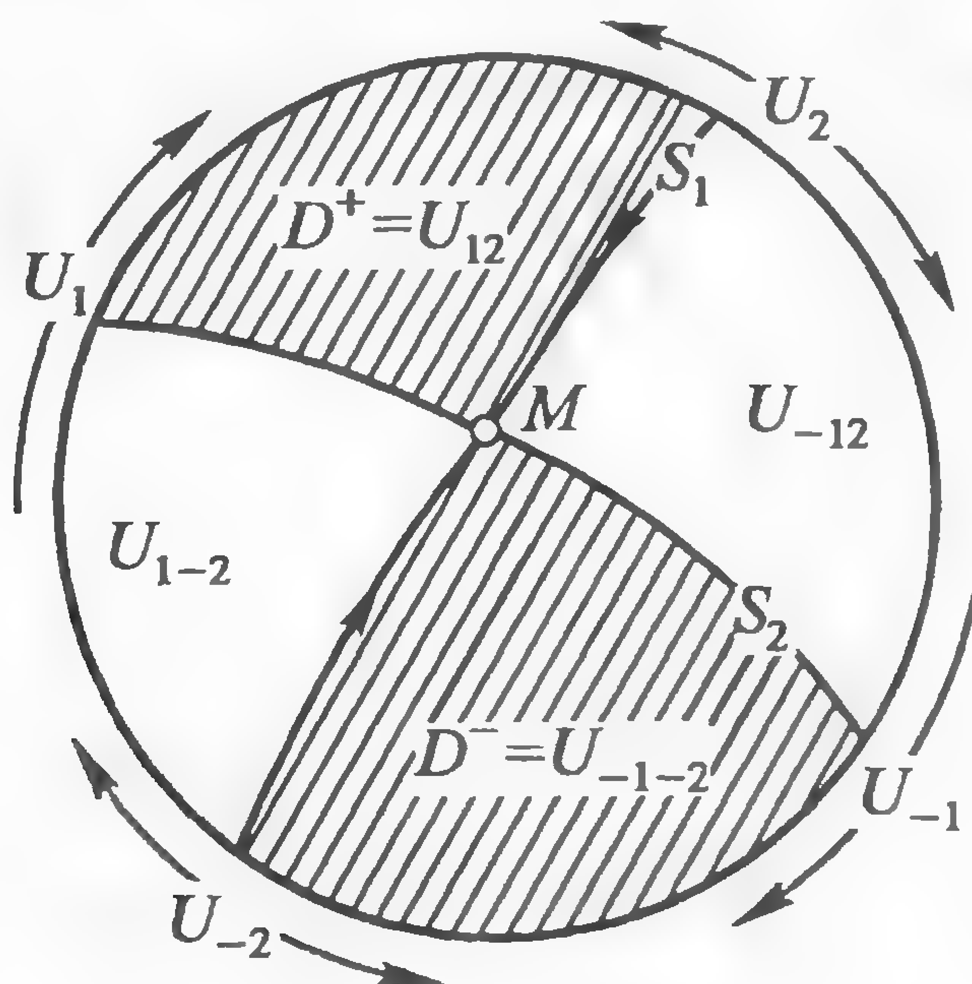


图 58

$$g_1 = \begin{cases} h_1, & \text{在 } U_1, \\ h_{-2}, & \text{在 } U_{-2}, \end{cases} \qquad g_2 = \begin{cases} h_2, & \text{在 } U_2, \\ h_{-1}, & \text{在 } U_{-1} \end{cases} \tag{6}$$

分别在并集 $U_1\bigcup U_{-2}$ 和 $U_2\bigcup U_{-1}$ 中全纯的结论. 因为交集 $\partial U_1\bigcap\partial U_{-2}=\partial U_2\bigcap\partial U_{-1}=M$ 按假设条件是个实余维 2 的生成流形, 故它不可能是复的 (参看前面定理 2 下面的习题). 由第 42 目关于嵌入边的定理得出 g_1 和 g_2 可全纯延拓到 M 的邻域: 设其分别为在图 59 中以 G_1 和 G_2 所表示的区域. 但是这样一来函数 g_2-g_1 便在交 $G_1\bigcap G_2$ 中全纯, 而这个交集包含了 M, 而正像由 (5) 和 (6) 看到的, 这个函数在 $U_{12}=D^+$ 中等于 f^+, 在 $U_{-1-2}=D^-$ 中等于 f^{-1}. 因此, 它给出了所需要全纯延拓 f.

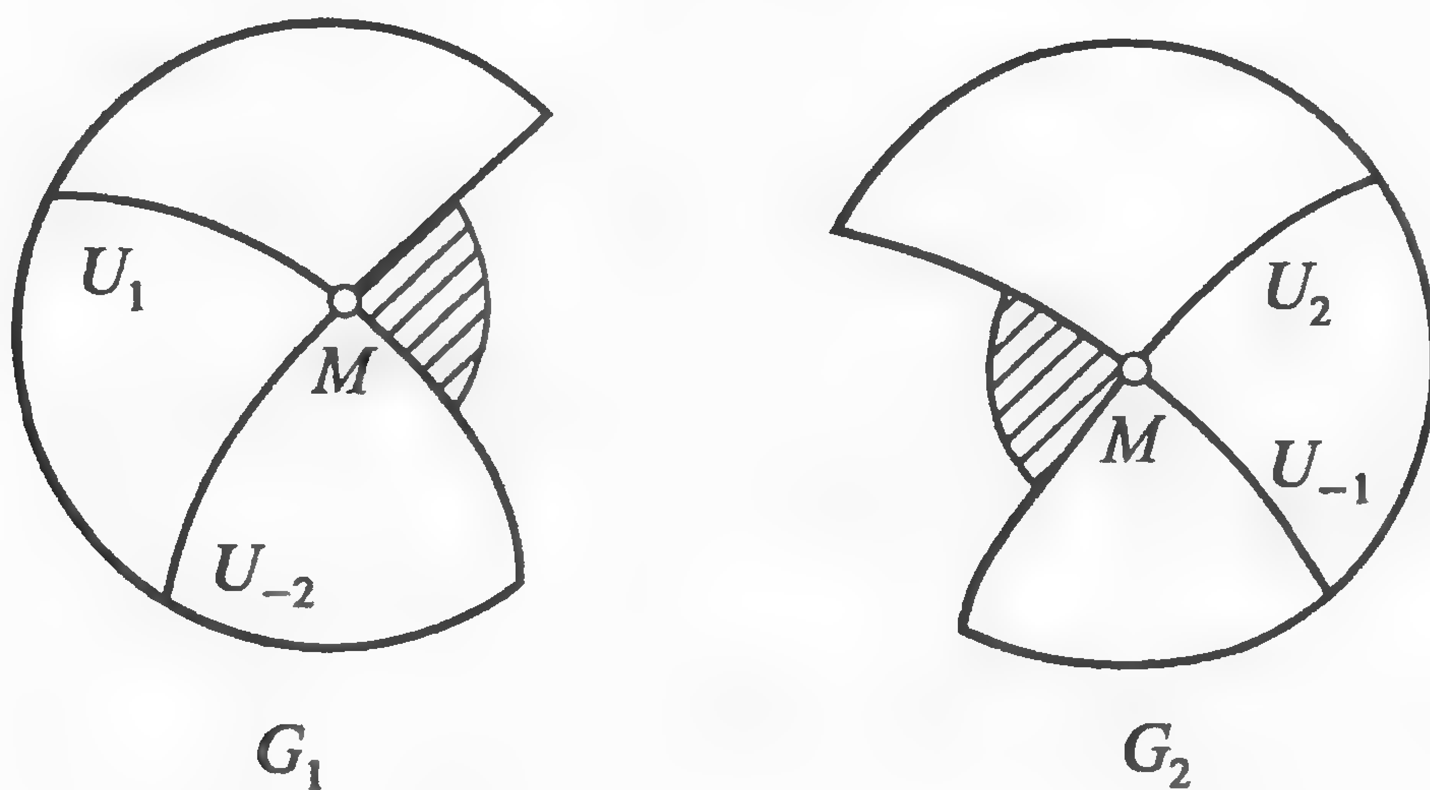


图 59

剩下的要证明全纯上链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 是个上边缘, 即它在全纯函数范围内可解 (参看第 44 目). 我们将按照在第 IV 章中的框架来进行证明, 只是不用光滑函数而代之以广义函数来进行 [1]. 首先我们注意到, 上闭链 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 在分段全纯函数范围内有解: 可令

$$f_2=\begin{cases}h_{12}=f^+, & \text{在 } U_{12} \text{ 中},\\ 0, & \text{在 } U_{-12} \text{ 中},\end{cases}\qquad f_{-2}=\begin{cases}h_{-1-2}=-f^-, & \text{在 } U_{-1-2} \text{ 中},\\ 0, & \text{在 } U_{1-2} \text{ 中},\end{cases}\tag{7}$$

而其他的 $f_\alpha=0$, 于是 $h_{12}=f_2-f_1, h_{1-2}=f_{-2}-f_1$ 等等. 这些函数与全纯函数的偏离由它们对 $\bar z_\nu$ 的导数决定, 这必须在广义函数的意义下加以理解. 例如, 如果 $\psi\in C_0^\infty(U_2)$ 是个检验函数, 即一个具有属于 U_2 的紧支集的 C^∞ 类函数, 则对于 $\dfrac{\partial f_2}{\partial\bar z_\nu}$ 应理解为泛函

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial f_2}{\partial\bar z_\nu},\psi\right\rangle&=-\left\langle f_2,\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_\nu}\right\rangle=\frac14\int_{U_{12}}h_{12}\frac{\partial\psi}{\partial\bar z_\nu}dz\wedge d\bar z\\&=-\frac{(-1)^\nu}{4}\int_{U_{12}}\frac{\partial(h_{12}\psi)}{\partial\bar z_\nu}d\bar z_\nu\wedge dz\wedge d\bar z_j,\end{aligned}$$

其中 $\nu,j=1,2$ 且 $j\neq\nu$ (我们考虑到在 $\mathbb{C}^2$ 中实的体积元为 $\left(\dfrac{i}{2}\right)^2dz\wedge d\bar z=-\dfrac14 dz\wedge$

---

[1] 对进一步利用广义函数论的结果可参看赫尔曼德尔的书, 我们在第 41 目末尾已引述过.

$d\bar{z}$), 或者

$$\left\langle \frac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_\nu}, \psi \right\rangle = \frac{(-1)^\nu}{4} \int_{U_{12}} d(h_{12}\psi) \wedge dz \wedge d\bar{z}_j$$
$$= -\frac{(-1)^\nu}{4} \int_{S_1 \cap U_2} h_{12}\psi dz \wedge d\bar{z}_j \tag{8}$$

(我们在这里用了斯托克斯公式 [1]) 并考虑到在 ∂U_2 的邻域中 $\psi = 0$).

正像我们应该预期的, $\dfrac{\partial f_2}{\partial \bar{z}_\nu}$ 的支集集中在 $S_1 \bigcap U_2$ 上. 类似地可计算广义函数 $\dfrac{\partial f_{-2}}{\partial \bar{z}_\nu}$; 它的支集则集中在 $S_1 \bigcap U_{-2}$ 上, 但是在这里 S_1 的定义与前面的相反:

$$\left\langle \frac{\partial f_{-2}}{\partial \bar{z}_\nu}, \psi \right\rangle = \frac{(-1)^\nu}{4} \int_{S_1 \cap U_{-2}} h_{-1-2}\psi dz \wedge d\bar{z}_j \tag{9}$$

(参看图 58). 因为交集 $S_1 \bigcap \overline{U}_2$ 与 $S_1 \bigcap \overline{U}_{-2}$ 等于 M, 而在 M 上由假定有 $h_{12} = f^+ = f^- = -h_{-1-2}$, 故公式 (8) 和 (9) 可以组合为一个: 对任意函数 $\psi \in C_0^\infty(D)$, 有

$$\langle p_\nu, \psi \rangle = -\frac{(-1)^\nu}{4} \int_{S_1} h\psi dz \wedge d\bar{z}_j,$$
$$h = \begin{cases} h_{12}, & \text{在 } S_1 \bigcap U_2 \text{ 中}, \\ -h_{-1-2}, & \text{在 } S_1 \bigcap U_{-2} \text{ 中}, \end{cases} \tag{10}$$

其中 p_ν 在 $U_{\pm 2}$ 的限制分别与广义导数 $\dfrac{\partial f_{\pm 2}}{\partial \bar{z}_\nu}$ 相等.

因此, 在 D 中整体定义了一个微分形式 $\omega = p_1 d\bar{z}_1 + p_2 d\bar{z}_2$, 它具有广义函数的系数, 而其支集集中在 S_1 中. 我们将证明它是闭的, 即 $\dfrac{\partial p_1}{\partial \bar{z}_2} - \dfrac{\partial p_2}{\partial \bar{z}_1} = q$ 在广义函数的意义等于零. 事实上, 对任意 $\psi \in C_0^\infty(D)$, 我们有

$$\langle q, \psi \rangle = -\frac{1}{4} \int_D \left(\frac{\partial p_1}{\partial \bar{z}_2} - \frac{\partial p_2}{\partial \bar{z}_1} \right) \psi dz \wedge d\bar{z}$$
$$= \frac{1}{4} \int_D \left(p_1 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_2} - p_2 \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_1} \right) dz \wedge d\bar{z}$$
$$= \left\langle p_2, \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_1} \right\rangle - \left\langle p_1, \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_2} \right\rangle,$$

而因为 $\dfrac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_\nu} \in C_0^\infty(D)$, 故由公式 (10) 有

$$\langle q, \psi \rangle = -\frac{1}{4} \int_{S_1} h \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_1} dz \wedge d\bar{z}_1 - \frac{1}{4} \int_{S_1} h \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_2} dz \wedge d\bar{z}_2$$
$$= -\frac{1}{4} \int_{S_1} h \bar{\partial} \psi \wedge dz.$$

[1]) 由于我们给出的另外的对函数 $f^\pm$ 的假设条件, 故可以应用它.

但是在 S_1 上 h 满足柯西 – 黎曼条件, 因此在那里有 $h\overline{\partial}\psi = \overline{\partial}(h\psi)$, 而 $\overline{\partial}(h\psi) \wedge dz = d(h\psi) \wedge dz = d(h\psi dz)$, 从而斯托克斯公式给出了

$$\langle q, \psi \rangle = -\frac{1}{4}\int_{S_1} d(h\psi dz) = -\frac{1}{4}\int_{\partial S_1} h\psi dz = 0,$$

这是因为在 ∂S_1 的邻域中 $\psi = 0$, 这表明在广义函数的意义下 $q = 0$.

因为定理的断言是局部的, 故不失一般性可假设 D 具有全纯性. 于是每个具广义函数为系数的形式若在 D 中闭, 则为恰当, 即在 D 中存在广义函数 u, 使得 $\overline{\partial}u = \omega$, 或者说 $\dfrac{\partial u}{\partial \overline{z}_\nu} = p_\nu$ $(\nu = 1, 2)$. 由构造, 我们有 $p_\nu\big|_{U_{\pm 2}} = \dfrac{\partial f_{\pm 2}}{\partial \overline{z}_\nu}$, 因此, 令 $f_{\pm 2} - u = h_{\pm 2}$, 我们则有

$$\frac{\partial h_2}{\partial \overline{z}_\nu} = \frac{\partial f_2}{\partial \overline{z}_\nu} - p_\nu = 0, \qquad \text{在 } U_2 \text{ 中},$$
$$\frac{\partial h_{-2}}{\partial \overline{z}_\nu} = \frac{\partial f_{-2}}{\partial \overline{z}_\nu} - p_\nu = 0, \quad \text{在 } U_{-2} \text{ 中}.$$

但柯西 – 黎曼方程的广义解是个全纯函数, 这表明 $h_2 \in \mathscr{O}(U_2)$, $h_{-2} \in \mathscr{O}(U_{-2})$. 除此之外, 因为函数 p_ν 的支集集中在 S_1 上, 故函数 u 在区域 $U_{\pm 1}$ 中全纯, 并可以令在 U_1 中 $h_1 = -u$, 在 U_{-1} 中 $h_{-1} = -u$. 现在容易看出, 对所有 $\alpha, \beta = \pm 1$ 有 $h_{\alpha\beta} = h_\beta - h_\alpha$, 就是说 $\{h_{\alpha\beta}\}$ 是个全纯上边缘. □

我们注意到, 在平丘克的定理的一般陈述中, 如同博戈柳博夫定理中那样, 只假定了 $f^\pm$ 在 M 上具有广义函数意义下的极限值, 并且在这同样的意义下相等. M 为生成流形的假设是不可或缺的: 例如, 如果 M 被包含在复超曲面中, 则存在函数 $f^\pm \in \mathscr{O}(D^\pm)$ 在 M 上等于 0, 但不能被延拓为一个全纯函数.

博戈柳博夫的分类定理在 M 是 $\mathbb{C}^n$ 的实子空间 $\mathbb{R}^n$ 的特殊情形时可由定理 2 推导出来. 另外, 在这个定理中还对函数 $f^\pm$ 延拓到的区域给出了估计. 它的证明可以在弗拉基米罗夫 (Vladimirov) 的书的 §27 中找到, 该书在第 40 目末尾已有索引.

博戈柳博夫定理与所谓的**跳跃问题**有关, 这个问题是: 在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中存在实超曲面 S, 它把 D 分成两部分 D_+ 和 D_-, 而在 S 上给出了函数 f; 要求将 f 表示为函数边界值的差的形式:

$$f = h_+ - h_-, \tag{11}$$

这两个函数分别在区域 $D_\pm$ 中全纯. 在这种情形下函数 f 有可能只是局部可积, 并且这些边界值是在广义函数的意义下被理解的. 在一般提法下的跳跃问题的解由丘尔卡得到 [1].

容易得到这个问题可解性的必要条件: 函数 f 应该在 S 上满足柯西 – 黎曼弱条件, 即在 S 上应满足在 $l = n, m = n - 1$ 时的关系式 (2). 丘尔卡证明了这个条

[1] E. M. Chirka, *Analytic representation of CR-functions*, Mat. Sb. **98** (**140**) (1975), no.4, 591-623; 英译本, Math. USSR-Sb. **27** (1975), 526-553.

件对该问题的局部可解性也是充分的, 而对于它的完全形式的解则需要要求, 在区域 D 中具全纯系数的第一上同调群为平凡: $H^1(D,\mathscr{O})=0$. 在各种不同类型的对曲面 S 和函数 f 的附加条件下他证明了该问题的解具有相应的边界性质. 例如, 如果 $S\in C^k$ 且 $f\in C^k(S)$, 其中 $k\geqslant 1$, 则 $h_\pm\in C^{k-\varepsilon}(\overline{D}_\pm)$, 其中 $\varepsilon>0$ 为任意, 并且条件 (11) 在通常的意义下得到满足.

关于跳跃问题的定理已被应用于许多复分析的问题中.

问题

1. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, $K\Subset D$. 证明, 对于任意全纯映射 $f:D\to K$ 具有一个且唯一一个不动点.

2. 证明, 如果双全纯映射 $f^\nu:D\xrightarrow{\text{onto}}G$ 的序列在 D 的紧子集上一致收敛, 其中 D 和 G 为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界区域, 则极限映射 f 或者双全纯, 或者把 D 映成属于 ∂D 的解析集.

3. 如果双全纯映射 $f^\nu:D\to D^\nu$ 的序列在区域 D 的紧子集上一致收敛, 则极限映射 f 或者双全纯, 或者退化, 其中退化的意思是在 D 上雅可比 $J_f(z)\equiv 0$.

4. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的有界区域, K 为 D 中紧集. 于是区域 D 的满足 $\varphi(a)\in K$ 的自同构的集合在空间 $\mathscr{O}(D,D)$ 中为紧, 其中 a 为 D 中某个固定点, 而 $\mathscr{O}(D,D)$ 为具有在 D 中紧子集上一致收敛的拓扑.

5. 如果 φ_1 和 φ_2 是区域 D 到自己的全纯映射, 且 $\varphi=\varphi_1\circ\varphi_2$ 为 D 的自同构, 则 φ_1 和 φ_2 也是自同构.

6. 称区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 为齐性的是说, 对任意一对点 $a,b\in D$, 存在 $f\in\operatorname{Aut}D$, 使得 $f(a)=b$. 证明任意有界齐性区域是全纯域.

7. 称区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 的自同构 φ 的一个群 Γ 为离散的是说, 如果对一个固定点 $z\in D$ 的像 $\varphi(z)$, 当在所有可能的 $\varphi\in\Gamma$ 时, 在 D 中没有极限点. 证明, 对 D 的任意自同构的离散群 Γ, 级数 $\sum\limits_{\varphi\in\Gamma}|J_\varphi|^2$ 在 D 中任意紧集上一致收敛, 其中 J_φ 为映射 φ 的雅可比.

8. 设 Γ 为区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 的一个离散自同构群, 且 D/Γ 为下面关系的等价类集合: $z'\sim z''$, 如果存在 $\varphi\in\Gamma$ 使得 $\varphi(z')=z''$.

如果区域 D 有界, 而集合 D/Γ 为紧, 则 D 为全纯域.

9. 证明: 为了使管状锥 $T=K\times\mathbb{R}^n(y)$ 双全纯等价于有界区域, 其中 K 为 $\mathbb{R}^n(x)$ 中的锥, 其顶点为 $x=0$, 当且仅当 K 不包含直线.

10. 证明: 为了使管状全纯域双全纯等价于有界区域的充分必要条件为它的底不包含直线.

11. 设 D 和 G 为 $\mathbb{C}^n$ 中区域, $n>1$, 具有光滑边界. 证明, 如果 D 为严格伪凸, 而在 ∂G 上存在使莱维形式具负特征值的点, 则 D 和 G 不可能双全纯等价.

12. 证明, 不存在双圆盘 U^2 到球 B^n 的逆紧全纯映射, 其中维数 n 为任意, 同时 B^n 到 U^2 的映射也同样如此.

13. 设 $f: U \to B^n, f(0)=0$ 为圆盘 $U=\{|\zeta|<1\}$ 到球 B^n 的全纯嵌入映射. 如果 B^n 中的伯格曼度量在 $f(U)$ 上的限制等于这个嵌入将 U 中的罗巴切夫斯基度量在 $f(U)$ 上的诱导度量, 则 $f(U)$ 是 B^n 与一条复直线 $l \ni 0$ 的交.

14. 证明, 在任意双曲流形 M 上, 小林度量诱导了 M 的拓扑, 就是说, 小林球的集合构成了 M 在通常拓扑下的拓扑基.

15. 证明, 由 $\mathbb{C}^2$ 去掉了复直线 $\{z_1=0\}, \{z_1=1\}, \{z_2=0\}$ 和 $\{z_1=z_2\}$ 得到的集合 M 为双曲流形.

16. 如果单变整函数 f 和 g 满足 $f^m+g^m=1$, 其中 m 和 n 为满足 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}<1$ 的整数, 则 f 和 g 为常数. [提示: 证明曲线 $\{z_1^m+z_2^n=1\} \subset \mathbb{C}^2$ 为双曲流形.]

17. (阿勃罗谢莫夫, (A. V. Abrosimov)). 设 $S=\{(z,w)\in\mathbb{C}^2 : w=t+i\varphi(z)\}$ 为光滑实超曲面, 其中 $t\in\mathbb{R}, \varphi$ 为实函数, 而 $Z=\dfrac{\partial}{\partial z}+a\dfrac{\partial}{\partial t}$ 为其上的柯西 – 黎曼切算子. 证明, 如果对 S 上的光滑 CR – 函数 f 成立恒等式 $Z^{n+1}(f)=0$, 则存在 z 和 w 的 n 次多项式 P_n, 使 $f=P_n\big|_S$.

附录
复位势论

在这里由于需要将给出在基本内容之外的对某些专题作一个简略的综述. 这些专题主要涉及调和函数的高维推广, 而其与空间 $\mathbb{C}^n$ 的复结构有关.

1. 多重次调和测度

在单复变函数论中的许多问题中, 某个区域 $D \subset \mathbb{C}$ 的闭包中的子集 E 的调和测度起着重要的作用. 它是那样的函数 $\omega_D(z, E)$, 具在每点 z 等于在此点函数 u 的值的上确界, 其中 u 属于 D 中次调和函数类 $\mathrm{sh}(D)$, 并且 u 在 D 中非正但在 E 上不超过 -1. 函数 $\omega_D(z, E)$ 被证实在 $D\backslash\overline{E}$ 中为调和 (这表明了这个名称的合理性); 要了解它的性质譬如可以去看哥鲁辛 (G. M. Goluzin) 的书《复变函数的几何理论》(*Geometric theory of functions of a complex variable*, 2nd ed., "Nauka", Moscow, 1966; 英译本, Transl. Math. Monographs, vol. 26, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1969.). (我们注意到, 在这里所考虑的函数 ω_D 通过经典的 ω 以公式 $\omega_D = 1 - \omega$ 表达: 这是由于我们宁愿处理次调和函数而不是上调和函数.)

转向区域 $D \subset \mathbb{C}^n, n > 1$, 自然地, 要以在 D 中的多重次调和函数类 $\mathrm{psh}(D)$ 替代 $\mathrm{sh}(D)$:

$$\omega_D(z, E) = \sup\{u(z) : u \in \mathrm{psh}(D), \quad u \leqslant 0, u\big|_E \leqslant -1\}. \tag{1}$$

但是当 $n > 1$ 时, 它在一般情形下非但不是调和的, 甚至连上半连续都不是. 故而代替 ω_D 我们去考虑它的所谓的**上正则化**:

$$\omega_D^*(z, E) = \lim_{z' \to z} \sup \omega_D(z', E), \tag{2}$$

它已经是上半连续了, 因而在 $D\backslash E$ 中为多重次调和. 称这个函数为对于区域 D 的集合的**多重次调和测度**, 或简短地称为 p – 测度 [1].

虽然非正则化前的函数 ω_D 在集合 E 上等于 -1, 但在正则化后, 它在 E 的某些点可能会进行向上的跳跃. 称闭集合 $E\subset\overline{D}$ 为**多重正则**是说, 如果这样的跳跃不出现, 即 $\omega_D^*|_E=-1$. 称区域 D 为**强伪凸**的是说, 如果它有界并且它的定义函数 $\in C(\overline{D})\bigcap \mathrm{psh}(\overline{D})$. 如果区域 D 为强伪凸, 而 $E\Subset D$ 为多重正则的集合, 则正如扎哈尔尤达 (V. P. Zakharyuta) 所证明的, 函数 $\omega_D^*(z,E)$ 在 D 中连续.

当在 $n=1$ 时的函数 ω_D 满足 $D\backslash E$ 中的拉普拉斯方程时, 它的高维类比也与一个非线性偏微分方程相联系, 这个方程被称做蒙日 – 安培 (Monge-Ampère) 方程. 确切地说, 这个方程在许多问题中是作为拉普拉斯方程的自然类比出现的, 它反映了 $\mathbb{C}^n$ 的复结构 (这与高维的拉普拉斯方程不同).

对于在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的 C^2 类函数, 蒙日 – 安培复算子定义为算子 $dd^c=\dfrac{i}{2}\partial\overline{\partial}$ (参看第 18 目) 的 n 次外幂:

$$(dd^cu)^n=n!\det\left(\frac{\partial^2u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right)\prod_{j=1}^{n}\frac{i}{2}dz_j\wedge d\overline{z}_j \tag{3}$$

而在 $\mathbb{C}^n$ 中的复蒙日 – 安培方程具有形式[2]

$$(dd^cu)^n=0\Leftrightarrow\det\left(\frac{\partial^2u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\right)=0. \tag{4}$$

当 $n=1$ 时它与拉普拉斯方程相同.

如果 u 为 C^2 类的多重次调和函数, 则 $dd^cu\geqslant 0$ (参看第 38 目). 利用所谓流动形 (current) 的理论, 贝德福德 (Bedford) 和泰勒 (B. A. Taylor)[3] 对任意连续的以及甚至只是局部有界的多重次调和函数的情形定义了广义的蒙日 – 安培算子.

对在区域 $D\subset\mathbb{C}^n$ 中的蒙日 – 安培方程的狄利克雷问题, 在于求出在边界 ∂D 上取已知值 φ 的解. 当 $n=1$ 时解决这个问题的方法之一是**佩龙** (Perron) **法**; 将其推广到函区域 $D\subset\mathbb{C}^n,n>1$ 上, 为此考虑函数

$$\omega(z)=\sup\{u(z):u\in\mathrm{psh}(D),u|_{\partial D}\leqslant\varphi\}, \tag{5}$$

以及它的上正则化 $\omega^*(z)=\varlimsup\limits_{z'\to z}\omega(z')\in\mathrm{psh}(D)$. 如果 D 又是严格伪凸的, 而 $\varphi\in C(\partial D)$, 则正如贝德福德和泰勒所证明的, ω^* 是狄利克雷问题的广义解.

---

[1] 参看萨都拉叶夫 (A. Sadullaev) 的文章 *Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds*, Uspekhi Mat. Nauk **36** (1981), no.4, 53-105; 英译本, Russian Math. Surveys **36** (1981), no.4, 61-119. 也可参看作者的书, 它在第 60 目末尾引述过.

[2] 在区域 $D\subset\mathbb{R}^n$ 中的实蒙日 – 安培方程是指方程 $\det\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial x_j\partial x_k}\right)=0$; 在几何中它有重要作用.

[3] 参看 E. Bedford 和 B. A. Taylor, *The Dirichlet theorem for a complex Monge-Ampère equation*, Invent. Math. **37** (1976), 1-44.

同样是这些作者, 证明了蒙日 – 安培的连续多重次调和函数解的**极大性质**: 如果 $u \in C(\overline{D})$ 是这样的解, 而 $v \in \mathrm{psh}(D) \bigcap C(\overline{D})$ 为任意函数, 则

$$u\big|_{\partial D} \geqslant v\big|_{\partial D} \Rightarrow u(z) \geqslant v(z), \quad z \in D. \tag{6}$$

上面所采用的条件中. 显然这个性质保证了对蒙日 – 安培方程的狄利克雷问题解的唯一性.

定理 1. 如果 D 为伪凸域, 而 $E \Subset D$ 为多重正则集合, 则 p– 测度 $\omega_D^*(z, E)$ 在 $D \backslash E$ 中处处是蒙日 – 安培方程的连续解.

证明. 设 $B \Subset D\backslash E$ 为任意一个球, 而 u_B 为 $(dd^c u)^n = 0$ 的 $u|_{\partial B} = \omega_D^*|_{\partial B}$ 的狄利克雷问题的解; 在假设条件 $\omega_D^* \in C(\overline{D})$ 下, 则这个问题的解在 $\overline{B}$ 中存在并连续. 由极大性质 (6) 知, 在 B 中处处有 $u_B(z) \geqslant \omega_D^*(z, E)$. 因此函数

$$v(z) = \begin{cases} u_B(z), & \text{当 } z \in \overline{B}, \\ \omega_D^*(z, E), & \text{当 } z \in D\backslash\overline{B} \end{cases}$$

属于 $\mathrm{psh}(D)$, 因它是两个多重次调和函数的上确界. 它在 D 中非正 (因为它只可能在 B 中取得正值, 从而在此达到极大值, 这与多重次调和性相矛盾) 并在 E 上等于 -1. 因此, 根据 p – 测度的定义, 在 D 中有 $v(z) \leqslant \omega_D^*(z, E)$, 特别地, $u_B(z) \leqslant \omega_D^*(z, E)$ 在 B 中成立. 将此与上面所得到的反向不等式结合一起便得到: 在 B 中 ω_D^* 与蒙日 – 安培方程的解相合. □

注. 由此证明看出, 在 D 中的任意连续的多重次调和函数, 若在子集 $C \Subset D$ 中具有极大性质, 则在 D 中为蒙日 – 安培方程的广义解.

我们来指出 p – 测度与薄集 (即 D 的一个子集, 在其上一些 $\not\equiv -\infty$ 的 $\mathrm{psh}(D)$ 中函数等于 $-\infty$, 参看第 66 目习题 2 下面的叙述) 的关联; 称这种集合为**多重极集**. 根据极大值原理, p – 测度 $\omega_D^*(z, E)$ 或者在 D 中处处不为零, 或者 $\equiv 0$. 萨都拉叶夫 (A. Sadullaev) 证明了 (参看附录一开始的脚注所引述的文章), 最后面的这种情形刻画了多重极集的特性.

定理 2. 如果区域 D 为强伪凸, 则一个集合 $E \subset D$ 为多重极集当且仅当 $\omega_D^*(z, E) \equiv 0$.

我们还注意到了所谓**双常数定理**的一个推广, 它直接由 p – 测度的定义得出.

定理 3. 设在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中的多重次调和函数 u, 在某个集合 $E \subset \overline{D}$ 上满足 $u \leqslant m$, 且在 D 中处处不超过 M. 于是对所有 $z \in D$ 有

$$u(z) \leqslant M(1 + \omega_D^*(z, E)) - m\omega_D^*(z, E). \tag{7}$$

p – 测度的另一个应用可参看譬如作者的书, 它已在第 60 目的末尾引述过.

2. 不变格林函数

区域 $D \subset \mathbb{C}$ 的格林函数是拉普拉斯方程的在定点 $w \in D$ 具有 $\ln|z-w|$ 型奇点而在 ∂D 等于零的基本解. 我们将描述属于坡列茨基 (E. A. Poletskiĭ) 的关于它在高维的推广, 这个推广反映了复结构; 拉普拉斯方程的角色在此再次被复的蒙日 – 安培方程所代替.

在区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 中, 我们取定两个不同点 z 和 w, 并考虑单位圆盘 $U \subset \mathbb{C}$ 到 D 的全纯映射 f 使得 $f(0)=z$, 并记

$$u_f(z,w) = \sum_{\zeta_\nu \in f^{-1}(w)} k_\nu \ln|\zeta_\nu|, \tag{1}$$

其中的和取遍点 w 的所有的原像 $\zeta_\nu \in U$, 而 k_ν 为 f 在点 ζ_ν 的重数 (参看第 Ⅲ 章的问题 1); 如果这样的逆像不存在, 则令 $u_f=0$. 我们称函数

$$g_D(z,w) = \inf\ u_f(z,w) \tag{2}$$

为区域 D 的以 w 为奇点的格林函数, 其中的下确界取自所有的全纯映射 $f: U \to D, f(0)=z$.

显然, $g_D(z,w) \leqslant 0$, 而在 w 邻域中的有界区域中有 $g_D(z,w) = \ln|z-w| + O(1)$, 其中 $O(1)$ 为有界函数. 也显然 g_D 对于双全纯映射为不变, 这也说明了它的名字的合理性.

下面的结果的证明可在别列茨基 (E. A. Poletskiĭ) 和作者的文章《不变度量 (*Invariant metrics*)》中找到, 它发表在 Itogi Nauki i Tekhniki: Sovremennye Problemy Mat.: Fundamental′nye Napravleniya, vol.9, VINITI, Moscow, 1986, pp.73-127; 英译本 in Encyclopedia of Math. Sci., vol.9 (Several Complex Variables. Ⅲ), Springer-Verlag, Berlin, 1989.

定理 1. 在对任意固定点 $w \in D$ 的函数 g_D 是在区域 D 中的对 z 的多重次调和函数.

定理 2. 函数 $g_D(z,w)$ 可以由关系式

$$g_D(z,w) = \sup\ v_w(z) \tag{3}$$

定义, 其中的上确界取遍在 D 中所有非正函数 $v_w \in \mathrm{psh}(D)$, 其在点 w 的邻域中具有形式 $\ln|z-w| + O(1)$.

定理 3. 如果 $D \subset \mathbb{C}^n$ 为强伪凸域, 则函数 $g_D(z,w)$ 在 D 中对 z 满足复蒙日 – 安培方程.

推论. 当 $n=1$ 时函数 $g_D(z,w)$ 与经典的格林函数相等.

不变格林函数与卡拉泰奥多里和小林度量的不变性有关. 我们称

$$c_1(z,w) = \inf \ \ln(1/|f_w(z)|\} \tag{4}$$

为区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的*卡拉泰奥多里函数*, 其中的下确界取遍所有全纯函数 $f_w : D \to U, f_w(w) = 0$. 称

$$k_1(z,w) = \sup\{1/|\zeta|\} \tag{5}$$

为区域 D 的*小林函数*, 其中上确界取遍所有全纯曲线 $f : U \to D, f_z(0) = z$, 而 ζ 为点 $w \in D\backslash\{z\}$ 中的原像, 其中 w 具有极小模. 这些函数分别以简单的关系式与卡拉泰奥多里距离 $c_D(z,w)$ 和与小林 "单链环距离" $\overline{k}(z,w)$ 相关联 (见在第 58 目的定理 1 后面的习题).

两个函数 c_1, k_1 相对于自身的变量都是对称的, 并且对这些变量中的每一个都是下半连续的. 在有界区域 D 的点 w 的邻域中, 它们两个都具有形式 $-\ln|z-w|+O(1)$. 不难看出, 这些函数对于区域 D 的不变格林函数以两个不等式相关联

$$k_1(z,w) \leqslant -g_D(z,w) \leqslant c_1(z,w). \tag{6}$$

卡拉泰奥多里函数 $c_1(z,w)$ 在固定其中一个变量时对另一个变量为多重次调和, 而小林函数并不总具有这个性质. 如果它具有了这个性质, 则 $-k_1(z,w) \in \mathrm{psh}(D \times D)$, 又由 (6), 有 $-k_1(z,w) \geqslant g_D(z,w)$; 再考虑到 $-k_1$ 所必需具有的形式的奇异性, 由定理 2 便推出在这种情形下有 $k_1(z,w) \equiv -g_D(z,w)$. 如果对某个区域 D 卡拉泰奥多里距离 c_D 与小林距离 $\overline{k}_D$ 重合, 则 $k_1 \equiv c_1$; 由于 (6), 则这些函数都与 $-g_D$ 相等, 从而是多重次调和的并满足蒙日 – 安培方程的条件. 勒姆佩尔特 (L. Lempert) 证明了这三个函数对所有几何凸的区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 都相等 (参看第 62 目开始部分的脚注所引述的 Lempert 的文章).

3. 伪凹集合

称区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的闭子集合是*伪凹*的是说, 如果它的补集 $D\backslash\Sigma$ 是伪凸的. 按照丘尔卡的想法, 我们考虑与这种集合有关的一些结果. 这些结果集中地围绕在第 42 目的关于奇异解析集的哈托格斯定理周围. 因为全纯函数的奇点集是伪凹的, 故哈托格斯定理可以如此来叙述: 如果伪凹集 $\Sigma = \{(z,w) : z \in D, w \in \mathbb{C}\}$ 是某个函数 g 的图像, 则此函数在 D 中全纯.

我们需要一个对于多重次调和函数的*局部极大原理*.

定理 1. 设 Σ 为区域 $D \subset \mathbb{C}^n$ 的伪凹子集, 且 $u \in \mathrm{psh}(D)$. 于是对任意区域 $G \Subset D$ 有

$$\max_{\Sigma\cap\overline{G}} u = \max_{\Sigma\cap\partial G} u. \tag{1}$$

证明. 设 $M = \max\limits_{\Sigma\cap\overline{G}} u$ 在内点 $z^0 \in G$ 达到, 而 $\max\limits_{\Sigma\cap\partial G} u < M$. 不失一般性, 函数 u 可假定为严格多重次调合的, 而此极大是严格的 (参看第 38 目). 于是实超曲面 $S = \{z \in G : u(z) = M\}$ 除去点 z^0 外整个位于 Σ 之外. 因为使 $u(z) > M$ 的集合不是全纯域, 故而存在全纯圆盘族 $S_t, 0 < t < 1$, 其在 Σ 之外且当 $t \to 0$ 时趋向于圆盘 S_0, 并且 ∂S_0 也在 Σ 之外, 但有 $S_0 \ni z^0$. 根据连续性原理 (第 36 目), 于是 Σ 的补集不可能是全纯域. □

下面, 我们假定 $\Sigma \subset D \times \mathbb{C}$, 其中 $D \subset \mathbb{C}^n$, 并且投射 $\pi : \Sigma \to D$ 是逆紧映射[1]. 对于 $z \in D$, 记 $\Sigma_z = \{w \in \mathbb{C} : (z, w) \in \Sigma\}$.

我们需要以下的论断: 在 $D \subset \mathbb{C}$ 中上半连续的函数 $\varphi > 0$ 具有次调和的对数, 条件是: 对于 $|e^p|\varphi$ 成立极大值原理, 其中 $p = p(z)$ 为任意多项式. 证明的思路基于这样的事实: 如果 $\mathrm{Re}\, p + \ln \varphi$ 具有这个性质, 则 $h + \ln \varphi$ 也有这些性质, 其中的 h 为任意调和函数, 从而由此容易推出 $\ln \varphi$ 的次调和性.

引理 1. 如果 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, $\Sigma \subset D \times \mathbb{C}$ 为伪凹集, 而 $u \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})$, 则函数

$$v(z) = \max_{w\in\Sigma_z} u(z, w) \in \mathrm{psh}(D). \tag{2}$$

证明. v 的上半连续性是显见的, 从而只需要断言它在任意复直线 l 上的限制在 $l \bigcap D$ 中为次调和; 故而不失一般性可以假定 $D \subset \mathbb{C}$. 只要证明对函数 $|e^p|e^v$ 成立极大值原理, 其中 p 为任意多项式即可.

设 $U \Subset D$ 为圆盘并在其中的点 z_0 达到极大值, 其中

$$|e^{p(z_0)}|e^{v(z_0)} = \max_{w\in\Sigma_{z_0}} |e^{p(z_0)}|e^{u(z_0,w)}.$$

但是函数 $|e^{p(z)}|e^{u(z,w)} \in \mathrm{psh}(D \times \mathbb{C})$, 而集合 Σ 伪凹, 因此按照定理 1 有

$$|e^{p(z_0)}|e^{v(z_0)} \leqslant \max_{z\in\partial U} \max_{w\in\Sigma_z} |e^{p(z)}|e^{u(z,w)} = \max_{z\in\partial U} |e^{p(z)}|e^{v(z)},$$

从而成立极大值原理. □

由此引理对 k 进行归纳可得

引理 2. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, 函数 $u(z, w)$ 在 $D \times \mathbb{C}^k$ 中为多重次调和, 其中 $z \in D, w = (w_1, \cdots, w_k) \in \mathbb{C}^k$. 如果 $\Sigma \subset D \times \mathbb{C}$ 为伪凹集, 且 $\Sigma_z^k = \Sigma_z \times \cdots \times \Sigma_z$ (k 次), 则函数

$$v(z) = \max_{w\in\Sigma_z^k} u(z, w) \in \mathrm{psh}(D). \tag{3}$$

---

1) 我们可以用线性分式变换做到这点: 考虑 $\Sigma \subset \mathbb{C}^{n+1}$ 与通过定点 $a \in \mathbb{C}^{n+1}\backslash\Sigma$ 的复直线的交.

冈洁在 1934 年得到了哈托格斯定理的一个推广, 但是直到 1962 年由于西野 (T. Nishino) 的文章它才被认同. 西野的证明基于他所得出的一个定理, 这是关于函数 $\ln \operatorname{diam} \Sigma_z$ 的多重次调和性的, 其中的 Σ 为伪凹集. 我们将给出这个定理的更强形式, 在这个形式中集合 Σ_z 的直径被它的容积所替代. 我们记得, 一个闭集 $E \subset \mathbb{C}$ 的容积是指数

$$\operatorname{cap} E = \lim_{k\to\infty} \left(\max \prod_{1\leqslant i<j\leqslant k} |w_i - w_j| \right)^{2/(k(k-1))}, \tag{4}$$

其中的极大取遍所有可能的点 $w_1, \cdots, w_k \in E$ 的位置; 因为所考虑的序列递降, 故此极限存在 (参看在附录开始部分所引证的哥鲁辛 (Goluzin) 的书).

定理 2. 如果 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, $\Sigma \subset D \times \mathbb{C}$ 为伪凹集, 则 $\operatorname{cap} \Sigma_z$ 在 D 中为对数多重次调和的.

证明. 如果 $w_1, \cdots, w_k$ 为 Σ_z 中的不同点, 则函数 $\ln \prod |w_i - w_j| = \sum \ln |w_i - w_j|$, 其中的积与和取遍所有的组 $1 \leqslant i < j \leqslant k$. 对于 $w = (w_1, \cdots, w_k)$ 为 $\mathbb{C}^k$ 中的多重次调和函数. 于是由引理 2 得到, 对所有 k 有

$$\delta_k(z) = \frac{2}{k(k-1)} \max_{w\in\Sigma_z^k} \ln \prod |w_i - w_j| \in \operatorname{psh}(D). \tag{5}$$

因为 $\ln \operatorname{cap} \Sigma_z = \lim\limits_{k\to\infty} \delta_k(z)$, 而 $\delta_k(z)$ 当 k 增大时减小, 故 $\ln \operatorname{cap} \Sigma_z \in \operatorname{psh}(D)$. □

利用定理 2 可以给出上面提到的西野对冈洁定理的大为简单的证明.

定理 3. 设 D 为 $\mathbb{C}^n$ 中的区域, $\Sigma \subset D\times\mathbb{C}$ 为伪凹集. 如果对非多重极集 $M \subset D$ 中每个点 z, 分层 Σ_z 由有限个点组成, 则 Σ 为解析集.

证明. 记 $M_j = \{z \in M : \operatorname{card} \Sigma_z \leqslant j\}$, 其中 card 表示点数; 这是个递增的集合序列, 它穷竭了 M. 由 p- 测度的性质知, 其中至少有一个集合是非多重极的, 设其为 M_k. 于是函数 $\delta_{k+1}|_{M_k} = -\infty$, 而因为它在 D 为多重次调和, 而 M_k 为非多重极的, 故 $\delta_{k+1}(z) \equiv -\infty$ 在整个 D 上成立. 由此推出 $\operatorname{card} \Sigma_z \leqslant k$ 对所有 $z \in D$ 成立, 从而由哈托格斯定理 (第 42 目的末尾) 知 Σ 为解析集. □

最后, 我们注意到, 萨都拉叶夫 (Sadullaev) 在一系列的工作中对于伪凹性的概念, 在以有理函数逼近多复变函数的问题中进行了实质性的应用.

索　　引

A

B

C

D

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

W

X

Y

Z

其他